

Chapitre 2

Modèles Nucléaires

2.1 Introduction

L'étude des noyaux exotiques ou loin de la vallée de stabilité étaient et demeurent un problème majeur pour les physiciens. Le développement de techniques expérimentales de plus en plus performantes permet désormais de produire et d'étudier la structure de ces noyaux. Ceux-ci présentent de nouveaux comportements par rapport aux noyaux stables, dont les propriétés sont bien reproduites par les modèles théoriques. L'un des premiers modèles du noyau, proposé par Weizsacker en 1935, est celui de la goutte liquide où le noyau est assimilé à un fluide classique constitué de nucléons qui sont confinés dans un volume fini de l'espace par l'interaction forte. Le deuxième modèle est le modèle en couche, où les nucléons sont considérés comme des particules indépendantes, l'un de l'autre, rend naturelle l'existence d'un potentiel moyen dans lequel évoluent les nucléons. Le problème qui se pose alors en physique nucléaire est la définition de ce potentiel moyen qui a la particularité ici d'être produit par les nucléons eux-mêmes. Les potentiels qui seront cités ici sont le potentiel d'oscillateur harmonique, le potentiel de Wood-Saxon et le potentiel du couplage spin-orbite.

2.2 Modèle de la goutte liquide

Dans ce modèle on considère le noyau comme un ensemble de nucléons, traités de manière collective interagissant entre eux par interaction forte. Le noyau est considéré comme une matière incompressible. La force nucléaire est la même pour chaque nucléon, ainsi que est à courte portée.

Ce modèle a été proposé en 1935 par Von Weizsacher donnant une approche semi-empirique de l'énergie de liaison pour des noyaux appartenant à la vallée de stabilité. En 1936 Beth et Bacher ont simplifié cette approche en donnant la formule de Beth-Weizsacher [1, 4].

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (2.1)$$

dont les paramètres sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_v = 15.56 \text{ Mev} \\ a_s = 17.23 \text{ Mev} \\ a_a = 23.6 \text{ Mev} \\ a_c = 0.7 \text{ Mev} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

- Le terme a_v est un terme de volume qui correspond à l'énergie de liaison moyenne par nucléon.

- Le terme a_s est un terme de surface qui abaisse l'énergie de liaison.

- Le terme a_c est un terme de répulsion coulombienne des protons. La répulsion électrostatique entre protons tend à diminuer l'énergie de liaison.

- Le terme d'asymétrie a_a vient pour les noyaux lourds, le nombre de neutrons est supérieur à celui des protons pour compenser l'augmentation d'énergie de répulsion coulombienne.

- Le terme $\delta(A)$ est un terme quantique d'appariement traduit le fait que le noyau est plus stable lorsque les protons et neutrons sont appariés, de sorte que, $\delta = 0$ pour les noyaux pair-impair ou impair-pair, $\delta = 12A^{-1/2}$ pour les noyaux pair-pair et $\delta = -12A^{-1/2}$

pour les noyaux impair-impair.

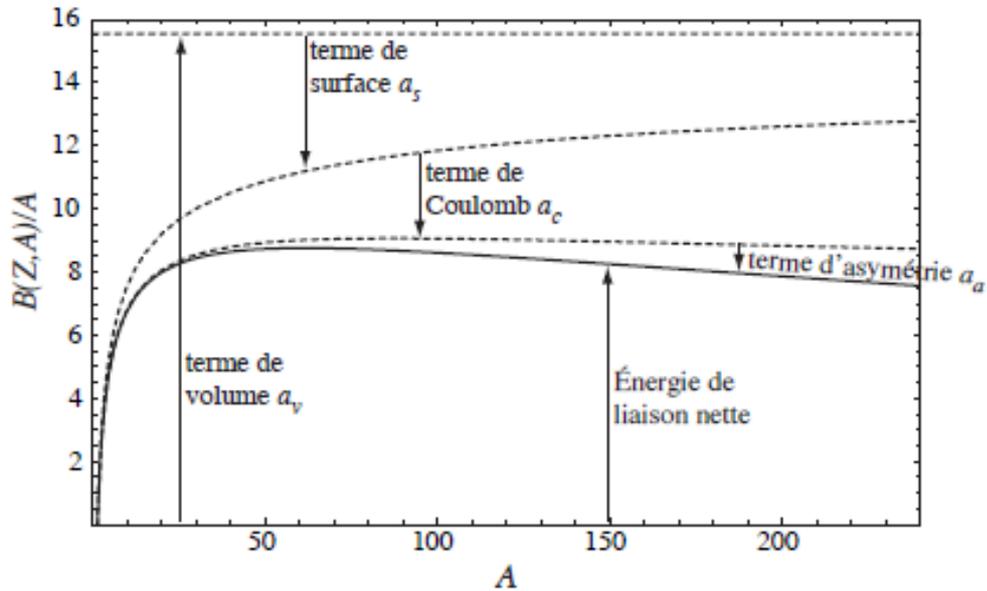


FIG. 2-1: Énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de masse A et contribution relative des différents termes de la formule de masse [4].

2.3 Modèle en couches des noyaux

Le modèle en couche ou modèle à particules indépendantes, est un modèle microscopique, à pour objectif de décrire la structure des noyaux où les nucléons sont arrangés dans des couches ou des niveaux dans le noyau. Dans ce modèle à particules indépendantes (les nucléons sont supposés indépendants), contrairement au modèle de la goutte liquide (modèle macroscopique), chaque nucléon se déplace dans un champ moyen créé par les autres nucléons sans aucune interaction entre eux. Approximativement, le champ moyen est un potentiel moyen $V(r)$ et peut avoir la forme d'un oscillateur harmonique [1, 4, 8].

2.3.1 Equation de Schrödinger

L'objet de ce problème est de déterminer la configuration du noyau dans l'état fondamental. Pour cela, on résout d'abord l'équation de Schrödinger pour un nucléon unique, puis on place les nucléons sur les niveaux successifs, on a [11] :

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (2.3)$$

où :

H est l'hamiltonien du système, son expression est :

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(r) \quad (2.4)$$

avec $V(r)$ est le potentiel de l'oscillateur harmonique.

Ψ est la fonction d'onde et E est l'énergie.

On peut écrire l'expression :

$$\Delta\Psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.5)$$

Le potentiel $V(r)$ est un potentiel à symétrie sphérique et dépend de r et (θ, φ) qui désignent la position d'un nucléon. Les variables r et (θ, φ) sont indépendants, donc on peut écrire :

$$\Psi(\vec{r}) = R(r)S(\theta, \varphi) \quad (2.6)$$

Le laplacien en coordonnées sphérique s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.7)$$

en remplaçant les expressions (2.6) et (2.7) dans l'expression (2.5), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{S(\theta, \varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) + \frac{R(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \varphi) \right) + \frac{R(r)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} S(\theta, \varphi) \\ + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) R(r)S(\theta, \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

On multiplie par $\frac{r^2}{R(r)S(\theta,\varphi)}$, on obtient :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) = \frac{-1}{S(\theta,\varphi)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S(\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \quad (2.9)$$

ceci nous permet de dire que :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) = \lambda \quad (2.10)$$

$$\frac{-1}{S(\theta, \varphi)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = \lambda \quad (2.11)$$

L'expression (2.10) est une équation radial, tandis que l'expression (2.11) est une équation angulaire qui n'admet pas de solution physiquement acceptable que si la constante λ est de la forme $\lambda = l(l + 1)$ où l est un entier positif ou nul.

On multiplie par $\frac{R(r)}{r^2}$ et en remplaçant λ par son expression, l'équation (2.10) devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[\frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l + 1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (2.12)$$

Les solutions correspondantes sont alors les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$ où l est un nombre quantique de moment angulaire orbital et m est un nombre quantique magnétique orbital.

Posant $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, l'expression (2.12) devient :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l + 1)}{r^2} \right] u(r) = 0 \quad (2.13)$$

Afin de trouver les énergies des états, de cette dernière expression, pour reproduire les nombres magiques 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126, et de décrire la structure en couches des noyaux, il faut déterminer la forme du potentiel moyen. En première approximation ce potentiel prend la forme d'un oscillateur harmonique sous forme : $-V_0 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$. Ce potentiel reproduit seulement les nombres magiques 2, 8 et 20. Une amélioration a été apportée

en introduisant un terme représentant l'effet de bord Dl^2 , ($D < 0$), qui permet de lever la dégénérescence en l . Là encore on ne trouve pas la bonne séquence de nombres magiques, un autre troisième terme a été ajouté dit spin-orbite $f(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$ au potentiel moyen.

Potentiel de l'oscillateur harmonique

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 \quad (2.14)$$

où V_0 est la profondeur du puits de potentiel, μ est la masse réduite du nucléon ($\mu = m \frac{A-1}{A}$) et m étant la masse du nucléon libre et r est la distance entre le nucléon et l'origine du référentiel.

L'expression des niveaux d'énergies est donnée par :

$$\begin{aligned} E_N &= \left(N_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \left(N_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \left(N_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \\ &= \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \end{aligned} \quad (2.15)$$

où la quantité $\hbar\omega$ représente le quantum de l'énergie de l'oscillateur harmonique.

et

$$\begin{aligned} N &= N_x + N_y + N_z \\ &= 2(n-1) + l \end{aligned} \quad (2.16)$$

où N est un nombre quantique principale prend les valeurs entières à partir de 0, n est un nombre quantique radial et l est un nombre quantique du moment angulaire orbital prend les valeurs repérés par des notations de la spectroscopie $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, qui correspondent respectivement les sous-couches $s, p, d, f, g, h, i, j, \dots$

On peut alors écrire pour quelques valeurs de N :

$$N = 0 \longrightarrow (n, l) = (1, 0) \longrightarrow 1s$$

$$N = 1 \longrightarrow (n, l) = (1, 1) \longrightarrow 1p$$

$$N = 2 \longrightarrow (n, l) = \begin{cases} (1, 2) \longrightarrow 1d \\ (2, 0) \longrightarrow 2s \end{cases}$$

$$N = 3 \longrightarrow (n, l) = \begin{cases} (1, 3) \longrightarrow 1f \\ (2, 1) \longrightarrow 2p \end{cases}$$

La spectroscopie d'un tel noyau pour les différentes valeurs de N est schématisée en structure en couches sur la figure suivante comme suit :

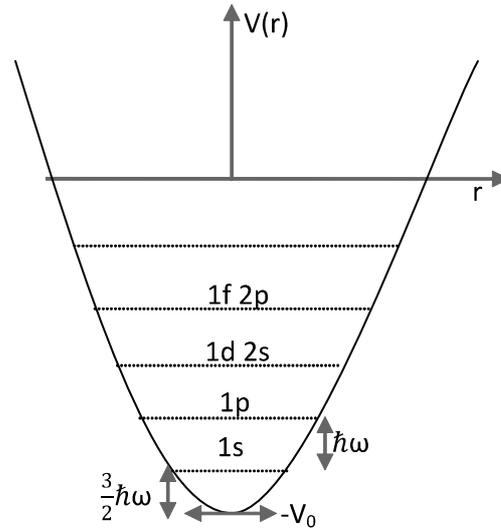


FIG. 2-2: Séquence des couches principales de l'oscillateur harmoniques.

La dégénérescence d_l de chaque couche se calcule à partir de la relation :

$$d_l = 2(2l + 1) \quad (2.17)$$

La parité (π) est une propriété des fonctions d'ondes décrivant le système du noyau en

mécanique quantique par :

- $\Psi(-\vec{r}) = \Psi(\vec{r})$ qui désigne à une parité positive.
 - $\Psi(-\vec{r}) = -\Psi(\vec{r})$ qui désigne à une parité négative.
- où $\pi = (-1)^l$.

Le tableau suivant résume les caractéristiques des premières couches et qui représentent les états des différents nucléons du noyau :

N	E_N	n	l	sous-couches	d_l	$\sum d_l$	π
0	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	1	0	1s	2	2	+
1	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	1	1	1p	6	8	-
2	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	1 2	2 0	1d 2s	10 2	20	+
3	$\frac{9}{2}\hbar\omega$	1 2	3 1	1f 2p	14 6	40	-
4	$\frac{11}{2}\hbar\omega$	1 2 3	4 2 0	1g 2d 3s	18 10 2	70	+

Potentiel de Woods-Saxon

Le potentiel de Woods-Saxon est un potentiel réaliste du champ moyen empirique, sa forme est la même que celle de la distribution de Fermi et la même aussi que la densité nucléaire [11].

$$V_{w.s}(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} \quad (2.18)$$

où V_0 est la profondeur du puits, R_0 est le rayon du noyau représentant la largeur du potentiel et a_0 est l'épaisseur de surface. Les valeurs des paramètres sont :

$$\begin{cases} V_0 \simeq -50 \text{ Mev} \\ R_0 \simeq +1.1A^{1/3} \\ a \simeq 0.5 \text{ fm} \end{cases}$$

Ce potentiel est schématisé sur la figure suivante :

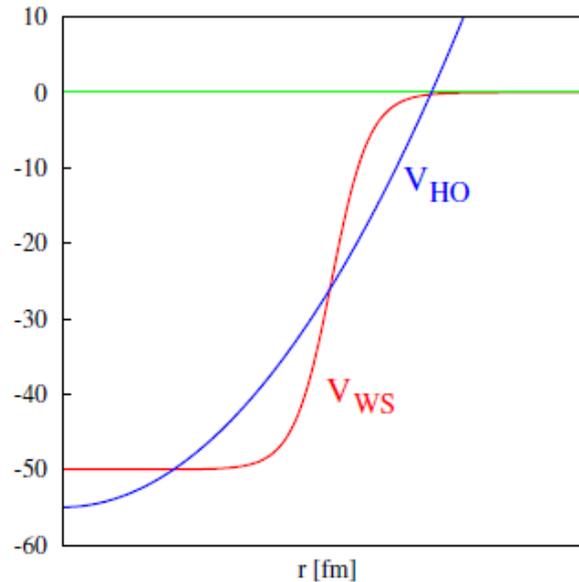


FIG. 2-3: Potentiel de l'oscillateur harmonique et le potentiel de Woods-Saxon [12]

Les deux potentiels cités précédemment ne sont pas suffisants pour interpréter tous les nombres magiques, d'où la nécessité d'ajouter un terme correctif dit le couplage spin-orbite.

Potentiel spin-orbite

M.G. Mayer et al ont proposé d'ajouter un terme spin-orbite au potentiel du champ moyen de l'oscillateur harmonique. Le potentiel du champ moyen prend la forme suivante [11] :

$$V(r) = V_{o.h} + Dl^2 + f(r) (\vec{s} \cdot \vec{l}) \quad (2.19)$$

où s et l représentent respectivement les vecteurs spin et le moment angulaire orbital et $f(r)$ est une fonction d'onde de potentiel. Cette interaction couplage spin-orbite explique qu'il existe un couplage fort entre le spin et le moment angulaire orbital de chaque nucléon et qui permet d'expliquer tous les nombres magiques de 2 jusqu'à 126. Les carrés des

valeurs numériques de s et l sont $s(s+1)$ et $l(l+1)$. Les deux vecteurs se combinent pour donner un moment angulaire total j .

où :

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (2.20)$$

le spin de nucléon est caractérisé par le nombre quantique $s = 1/2$ et le nombre j peut prendre les valeurs suivantes :

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad \text{cas parallèle} \quad (2.21)$$

$$j = l - \frac{1}{2}, \quad \text{cas antiparallèle} \quad (2.22)$$

sauf pour, $l = 0$, $j = 1/2$.

La quantité du couplage spin-orbite se calcule comme :

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (j^2 - l^2 - s^2) \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (2.24)$$

$$= \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) & \text{si } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Expérimentalement, il est trouvé que la fonction d'onde $f(r)$ est négative, ce qui veut dire que le niveau $j = l - \frac{1}{2}$ est toujours plus haut que le niveau $j = l + \frac{1}{2}$.

La différence entre les énergies potentielles est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta U_{sl} &= f(r) \left[\left(\vec{l} \cdot \vec{s} \right)_{\text{parallèle}} - \left(\vec{l} \cdot \vec{s} \right)_{\text{antiparallèle}} \right] \\ &= \frac{1}{2} f(r) (2l+1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La figure (2.3) montre que les nombres magiques sont identiques à ceux de l'oscillateur harmonique jusqu'à 20. Au-delà, le terme de spin-orbite devient si important (puisque la levée de dégénérescence s'accroît avec l), que c'est lui qui détermine les nombres magiques

à partir de 28 comme on peut le constater sur le figure (2.3).

Les noyaux sphériques ayant un nombre de protons ou de neutrons égal à un nombre magique sont donc plus stables que leurs voisins.

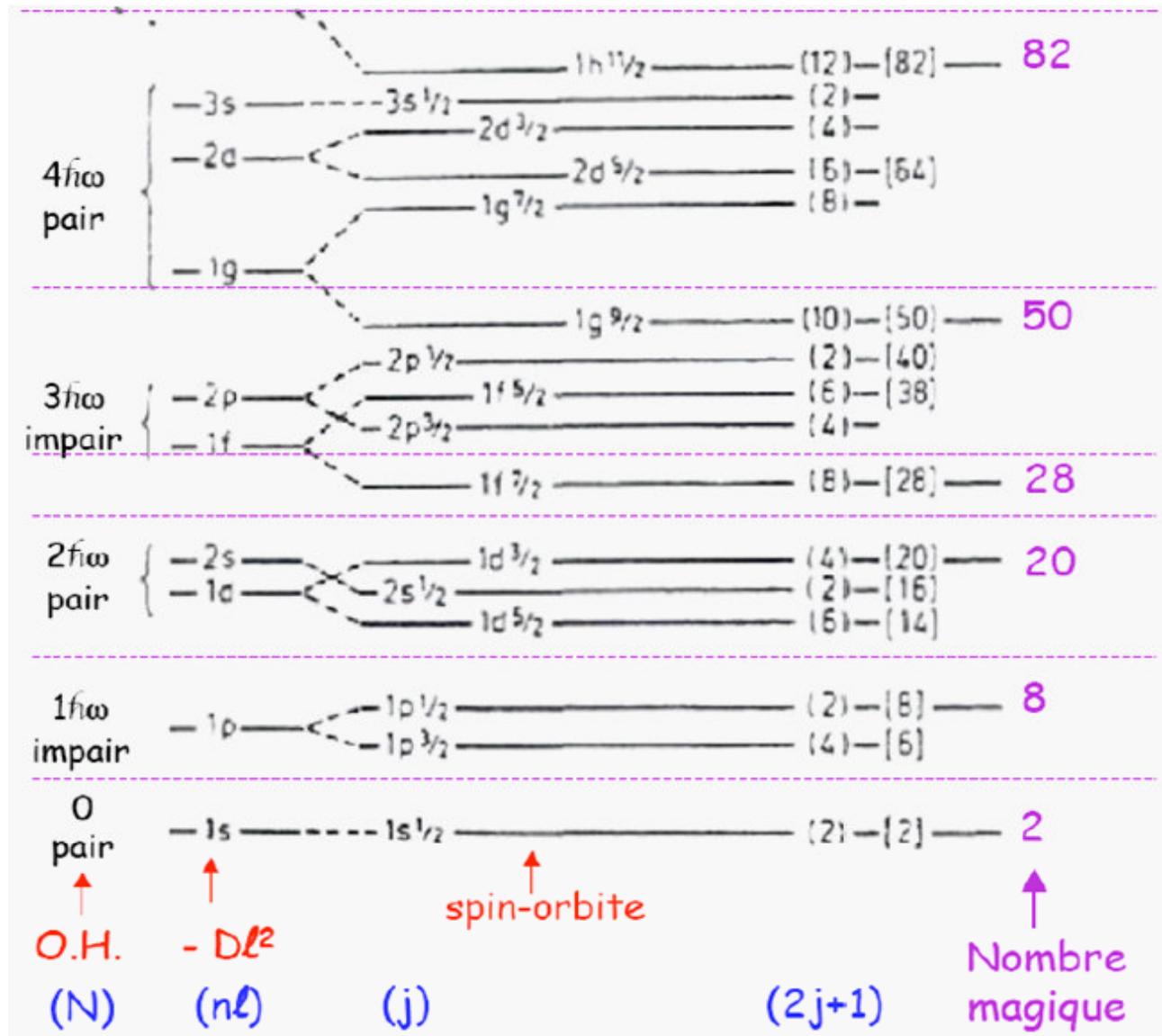


FIG. 2-4: Les niveaux d'énergie des nucléons dans le modèle en couches.

Spin et parité des états fondamentaux des noyaux

- Un noyau pair-pair, (Z pair et N pair), a un moment angulaire total d'état fondamental,

$$J = 0^+ \quad (2.26)$$

- Un noyau impair, (Z impair et N pair ou Z pair et N impair), a un moment angulaire demi entier J et à la parité,

$$\pi = (-1)^l, \quad (2.27)$$

de la particule célibataire. Il existe quelques exceptions à cette règle, par exemple le noyau ${}_{9}F_{10}$ (J observé est $(\frac{1}{2})^+$ et J preuve est $(\frac{5}{2})^+$).

- Un noyau impair-impair a un moment angulaire total qui est la somme vectorielle des valeurs de J du proton impair et du neutron impair, tels que :

$$\vec{J} = \vec{J}_p + \vec{J}_n \iff |J_n - J_p| \leq J \leq J_n + J_p \quad (2.28)$$

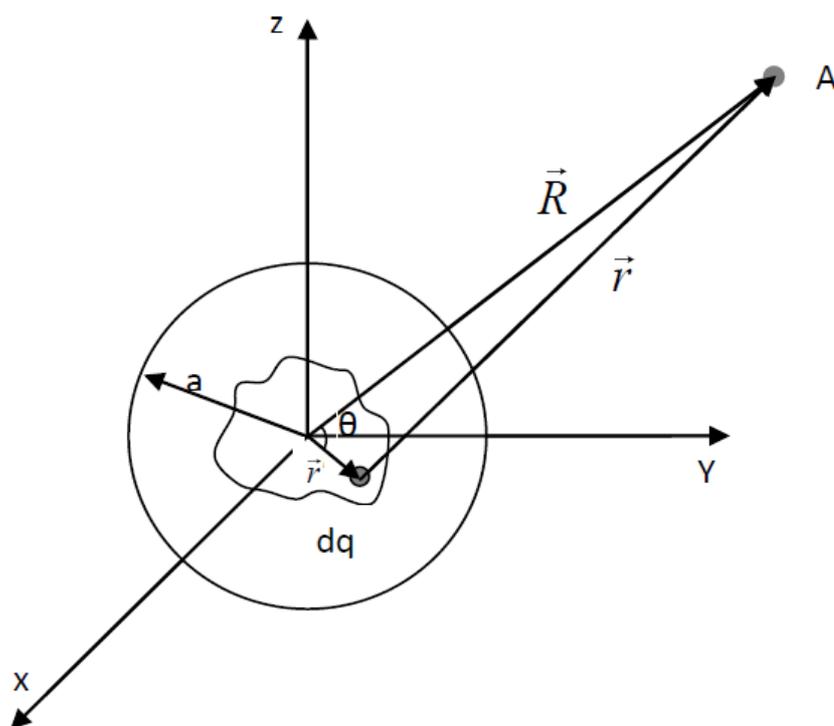
et la parité $\pi = (-1)^{l_n}(-1)^{l_p}$.

2.4 Moment quadripolaire électrique

Le moment quadripolaire électrique permet de mettre en évidence la déformation des noyaux par rapport à la forme sphérique ou bien il permet de mesurer la déviation de la distribution de charge par rapport à la sphéricité. Considérons une distribution de charge $\rho(r)$ contenue dans une sphère de rayon a . Plaçons l'origine d'un système d'axes $Oxyz$ au centre de cette sphère et considérons un observateur situé suffisamment loin de la distribution ($R \gg a$). Soit un élément de charge $dq = \rho d\tau$ et sa distribution dv_A au potentiel en A .

on a : $dv_A = \frac{dq}{r^2}$ et que :

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}' \quad (2.29)$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{r}' &= \vec{R} - \vec{r} \\
 &= R \left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Posons $\frac{r}{R} = t \ll 1$

Donc :

$$r' = R (1 - 2t \cos \theta + t^2)^{1/2} \tag{2.31}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 dv_A &= \frac{dq}{r'} \\
 &= \frac{dq}{R} (1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

La quantité $(1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2}$ est appelée fonction génératrice des polynômes de Legendre.

on peut écrire donc :

$$(1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) t^l \quad (2.33)$$

avec :

$$\begin{cases} P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \end{cases} \quad (2.34)$$

En remplaçant ces dernières expressions dans l'expression (2.32), il vient :

$$dv_A = \frac{dq}{R} \left[1 + \frac{r}{R} \cos \theta + \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right] \quad (2.35)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} v_A &= \iiint_v dv_A \\ &= \frac{1}{R} \iiint_V \rho d\tau + \frac{1}{R^2} \iiint_V r \cos \theta \rho d\tau + \frac{1}{R^3} \iiint_V \frac{r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho d\tau \end{aligned} \quad (2.36)$$

où :

$\iiint_v \rho d\tau = c$ est un moment monopole électrique de la distribution d'ordre 0, $\iiint_v r \cos \theta \rho d\tau$ est un moment dipolaire électrique d'ordre 1 et $\iiint_v \frac{r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho d\tau = Q$ est un moment quadripolaire électrique de la distribution d'ordre 2.

Si A situé sur l'axe Oz , l'expression (2.36) devient :

$$v_A = \frac{c}{R} + \frac{1}{R^2} \iiint_V z \rho d\tau + \frac{1}{R^3} \iiint_V \frac{(3z^2 - r^2)}{2} \rho d\tau \quad (2.37)$$

avec :

$$z = r \cos \theta \quad (2.38)$$

si la distribution de charge admet un plan symétrie perpendiculaire à Oz et passant par

l'origine, c'est à dire le moment dipolaire s'annule pour une telle distribution, alors on a :

$$\begin{aligned} \rho \iiint_v z d\tau &= \rho \int dx \int dy \int_{-Z}^{Z_0} z dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

l'expression (2.37) devient alors :

$$v_A = \frac{c}{R} + \frac{1}{R^3} \iiint_V \frac{(3z^2 - r^2)}{2} \rho d\tau \quad (2.40)$$

$$\text{avec : } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

2.5 Moment quadripolaire électrique d'un ellipsoïde

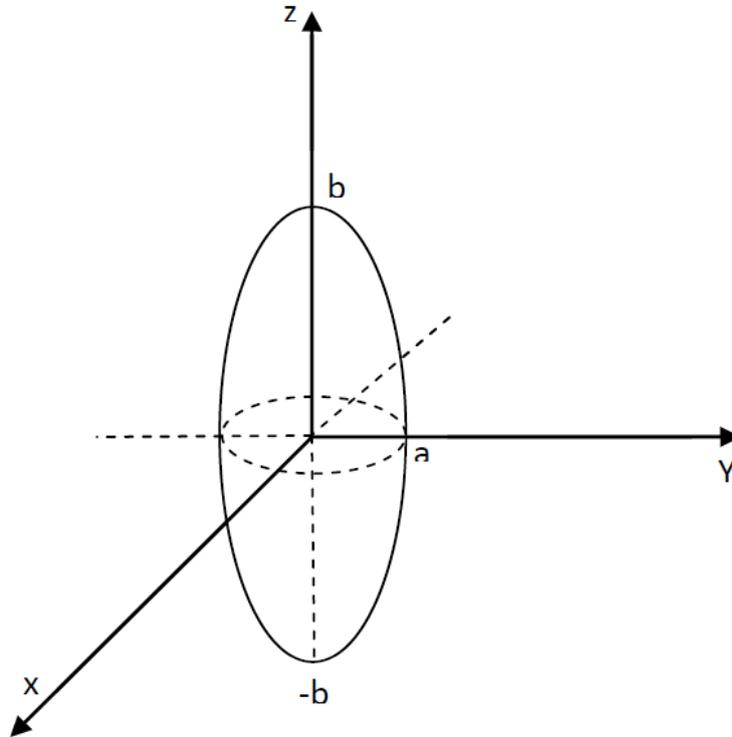
Simulons le noyau par un objet ellipsoïdal de demi-axes a et b , b étant porté par Oz , et l'on supposera que l'ellipsoïde renferme la charge Z_e avec une densité de charge centrale.

à partir de l'expression (2.40), on peut écrire l'expression du moment quadripolaire Q par :

$$\begin{aligned} Q &= \rho \iiint_v \frac{3z^2 - r^2}{2} d\tau \\ &= \rho \iiint_v z^2 d\tau - \frac{\rho}{2} \iiint_v (x^2 + y^2) d\tau \end{aligned} \quad (2.41)$$

Considérons les coordonnées cylindriques (γ, φ, z) :

$$\begin{cases} x = \gamma \cos \varphi \\ y = \gamma \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (2.42)$$



et l'équation d'une ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.43)$$

d'où : $z = \pm b\sqrt{1 - \gamma^2/a^2}$, $0 \leq \gamma \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $d\tau = \gamma d\gamma d\varphi dz$.

après l'intégration l'expression (2.41), on obtient :

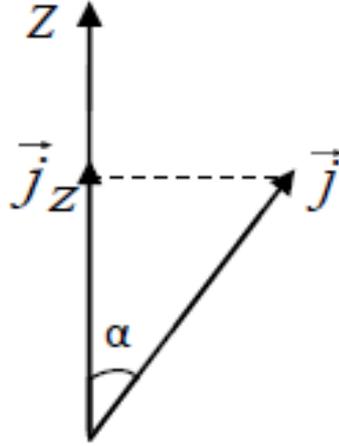
$$\begin{aligned} Q &= \frac{4}{3} \rho \pi a^2 b \left(\frac{b^2 - a^2}{5} \right) \\ &= Z_e \left(\frac{b^2 - a^2}{5} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

avec : $Z_e = \frac{4}{3} \rho \pi a^2 b$.

- si $Q > 0$ alors $b > a$, on a donc une forme de ballon de Rugby.
- si $Q < 0$ alors $b < a$, on a donc une forme de disque aplati.
- si $Q = 0$ alors $b = a$, on a donc une forme sphérique.

2.6 Description quantique du moment quadripolaire

Dans une approche semi-classique, on remarque que si j est le moment cinétique de la particule et m_j sa projection sur l'axe du gradient de champ, choisi comme axe de quantification, alors on peut écrire à partir de la figure suivante :



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\vec{j}_z|}{|\vec{j}|} \\ &= \frac{m_j}{\sqrt{j(j+1)}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

m_j est la valeur propre de j_z .

L'opérateur quadripolaire $(2j + 1)$ valeurs s'écrit :

$$Q_{m,j} = \int \varphi_{j,m_j}^*(r) [q(3z^2 - r^2)] \varphi_{j,m_j}(r) d\tau \quad (2.46)$$

où φ_{j,m_j} est la fonction d'onde associée à l'état $|j, m_j\rangle$.

2.7 Moment magnétique Dipolaire

Le moment magnétique dipolaire est induit par le moment magnétique dipolaire intrinsèque des protons et des neutrons du noyau, et par les courants qui circulent dans le noyau à cause du mouvement des protons.

Le moment magnétique orbital (μ_l) d'un atome s'écrit [9] :

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_l &= \frac{-e\hbar}{2m_e c} \vec{l} \\ &= -\mu_b \vec{l}\end{aligned}\quad (2.47)$$

où $\mu_b = \frac{-e\hbar}{2m_e c}$ est le magnétons de l'électrons se mesure en magnétons de Bohr.

Le moment magnétique de spin (μ_s) d'un atome s'écrit :

$$\vec{\mu}_s = -2\mu_b \vec{s} \quad (2.48)$$

Le moment magnétique orbital des nucléons ($\vec{\mu}_l^p$ pour les protons et $\vec{\mu}_l^n = 0$ pour les neutrons) est donné par [9] :

$$\vec{\mu}_l^p = g_l \mu_N \vec{l} \quad (2.49)$$

où $\mu_N = \frac{-e\hbar}{2m_p c}$ est le moment magnétique du noyau se mesure en magnétons nucléaire et g_l est un facteur positif ou négatif, vaut :

$$\begin{cases} g_l = 1 & \text{pour les protons} \\ g_l = 0 & \text{pour les neutrons} \end{cases} \quad (2.50)$$

Le moment magnétique de spin des nucléons ($\vec{\mu}_s^p$ pour les protons et $\vec{\mu}_s^n$ pour les neutrons) s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{\mu}_s^p = g_s \mu_N \vec{s} \\ \vec{\mu}_s^n = g_s \mu_N \vec{s} \end{cases} \quad (2.51)$$

où :

$$\begin{cases} g_s = 5.85 & \text{pour les protons} \\ g_s = -3.83 & \text{pour les neutrons} \end{cases} \quad (2.52)$$

Le moment magnétique total s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_j &= g_j \mu_N \vec{j} \\ &= \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s \end{aligned} \quad (2.53)$$

Le module du vecteur $\vec{\mu}_j$ est :

$$\mu_j = \mu_l \cos(\vec{j}, \vec{l}) + \mu_s \cos(\vec{j}, \vec{s}) \quad (2.54)$$

avec :

$$\begin{cases} \cos(\vec{j}, \vec{l}) = \frac{j^2 + l^2 - s^2}{2jl} \\ \cos(\vec{j}, \vec{s}) = \frac{j^2 + s^2 - l^2}{2jl} \end{cases} \quad (2.55)$$

et

$$g_j = g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (2.56)$$

Cas parallèle : En remplaçant l'expression (2.21) dans l'expression (2.56), il vient :

$$g_j = g_l \frac{l}{l+1/2} + g_s \frac{1}{2(l+1/2)} \quad (2.57)$$

$$= \frac{1}{j} \left[jg_l + \frac{1}{2}(g_s - g_l) \right] \quad (2.58)$$

Cas antiparallèle : De même, en remplaçant l'expression (2.22) dans l'expression (2.56), il vient :

$$g_j = g_l \frac{l+1}{l+1/2} - g_s \frac{1}{2(l+1/2)} \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{j+1} \left[jg_l + \frac{1}{2}(3g_l - g_s) \right] \quad (2.60)$$

On trace μ_j/μ_N pour protons et neutrons comme suit :

Pour les protons D'après les expressions (2.58) et (2.60) on a :

$$g_j = \begin{cases} 1 + 2.29/j, & \text{avec } j = l + 1/2 \\ \frac{1}{j+1}(j - 1.29), & \text{avec } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.61)$$

et à partir de l'expression (2.53), on peut écrire :

$$\frac{\mu_j}{\mu_N} = g_j j \quad (2.62)$$

En utilisant l'expression (2.61) dans cette dernière expression, on trouve :

$$\frac{\mu_j}{\mu_N} = \begin{cases} j + 2.29, & \text{pour } j = l + 1/2 \\ \frac{j}{j+1}(j - 1.29), & \text{pour } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.63)$$

Pour les neutrons De même pour les neutrons, on obtient :

$$g_j = \begin{cases} -1.91/j, & \text{avec } j = l + 1/2 \\ 1.91/(j + 1), & \text{avec } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.64)$$

et

$$\frac{\mu_j}{\mu_N} = \begin{cases} -1.91, & \text{pour } j = l + 1/2 \\ 1.91j/(j + 1), & \text{pour } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.65)$$

2.8 Interaction noyau champ magnétique externe

Soit \vec{H} un champ magnétique créé par les électrons et \vec{H}_e un champ magnétique externe. Le noyau étant soumis au champ magnétique externe en considérant qu'il y a interaction entre ce champ et le moment magnétique $\vec{\mu}_i$ du noyau. Cette interaction est caractérisée par une énergie de couplage $\Delta\omega$. Le couplage entre i et j forme le moment angulaire de l'atome comme :

$$\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} \quad (2.66)$$

où :

$$|i - j| \leq F \leq i + j \quad (2.67)$$

2.8.1 Champ magnétique externe faible

L'interaction (\vec{j}, \vec{H}_e) est faible devant l'interaction (\vec{i}, \vec{j}) qui se couplent pour donner $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j}$ ainsi que (\vec{i}, \vec{j}) processionnent autour de \vec{F} qui processionnent autour de \vec{H}_e . L'énergie d'interaction s'écrit :

$$\Delta\omega = -\vec{\mu}_F \vec{H}_e \quad (2.68)$$

$$= -\mu_F \vec{H}_e \cos(\vec{F}, \vec{H}_e) \quad (2.69)$$

où :

$$\vec{\mu}_F = \vec{\mu}_i + \vec{\mu}_j \quad (2.70)$$

avec :

$$\vec{\mu}_j = g_j \mu_b \vec{j} \quad (2.71)$$

et :

$$\vec{\mu}_i = g_i \mu_N \vec{i} \quad (2.72)$$

2.8.2 Champ magnétique externe fort

Les interactions (\vec{i}, \vec{H}_e) et (\vec{j}, \vec{H}_e) sont très supérieures à l'interaction (\vec{i}, \vec{j}) de couplage. Il y a donc rupture de couplage \vec{i} et \vec{j} . L'énergie d'interaction s'écrit :

$$\Delta\omega = -\vec{\mu}_i \vec{H}_e - \vec{\mu}_j \vec{H}_e \quad (2.73)$$

2.8.3 Absence du champ magnétique externe

On a dans ce cas une énergie d'interaction entre le noyau et le champ créé par le cortège électronique. Celle-ci est de la forme :

$$\Delta\omega = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{H}(0) \quad (2.74)$$

2.9 Exercices

Exercice 1. Déterminer le bilan d'énergie d'une réaction (p, n) à l'aide de la formule semi-empirique de masse de Von Weizacker. En utilisant les noyaux miroirs ${}^3_1\text{He}$ et ${}^3_1\text{H}$, calculer le terme d'interaction coulombienne de la formule de Von Weizacker. On donne : $[M({}^3\text{He}) - M({}^3\text{H})]c^2 = 0.073 \text{ MeV}$, $[M(n) - M({}^1\text{H})]c^2 = 0.782 \text{ MeV}$.

Exercice 2. On considère la réaction ${}^{51}_{23}\text{V}(p, n){}^{51}_{24}\text{Cr}$ où $Q = -1.705 \text{ MeV}$ et la désintégration ${}^{51}\text{Ti} \longrightarrow {}^{51}\text{V} + \beta^- + \bar{\nu}$ où $T_{\beta_{\max}^-} = 2.28 \text{ MeV}$.

Sachant que : $[M(n) - M({}^1\text{H})]c^2 = 0.782 \text{ MeV}$.

1. Déterminer pour $A = 51$, les termes coulombien et d'asymétrie de la formule de Von Weizacker.

2. Pour quelle charge Z , le noyau est-il le plus stable ?

Exercice 3. Préciser, dans le cadre du modèle en couches, les caractéristiques spins et parités de l'état fondamental des noyaux ${}^4_2\text{He}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{13}_6\text{C}$, ${}^{13}_7\text{Ni}$, ${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{27}_{13}\text{Al}$ et ${}^{40}_{20}\text{Ca}$.

Exercice 4. Exprimer le moment quadripolaire (Q) en fonction de \bar{r}_p^2 puis Calculer Q du noyau ne possédant en plus des couches remplies qu'un proton en état : $s^{1/2}$; $p^{3/2}$ et $d^{5/2}$.

Exercice 5. L'atome dans l'état fondamental ${}^2s_{1/2}$ dont le noyau a un spin I est plongé dans un champ externe H .

1. Le champ magnétique externe est faible. Trouver les valeurs propres ΔW de l'énergie des différents sous-niveaux (on calculera g_i , $g_f(I)$ et on donnera l'expression de ΔW de chaque sous-niveau en fonction de I , M_F et H).

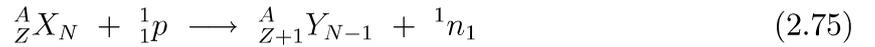
2. Le champ magnétique externe est un champ fort. Trouver les valeurs propres ΔW de l'énergie des différents sous-niveaux.

3. Application numérique : représenter graphiquement la décomposition hyperfine de l'état fondamental $^2s_{1/2}$ de l'isotope ^{42}K de spin $I = 2$ dans les trois cas : absence de champ externe, champ faible, champ fort.

2.10 Solutions des exercices

Exercice 1

Déterminons le bilan énergétique (Q) de la réaction (p, n) à l'aide de la formule semi-empirique de masse de Von Weizacker. Soit la réaction :



pour cela nous utilisons l'expression (1.20), il vient :

$$Q = [m({}^A_Z X_N) + m_p - m({}^A_{Z+1} Y_{N-1}) - m_n] c^2 \quad (2.76)$$

$$= [m({}^A_Z X_N) + Zm_e + m_e + m_p - m({}^A_{Z+1} Y_{N-1}) - (Z+1)m_e - m_n] c^2 \quad (2.77)$$

$$= [M_{at}({}^A_Z X_N) + M_H - M_{at}({}^A_{Z+1} Y_{N-1}) - m_n] c^2 \quad (2.78)$$

on sait que et d'après l'expression (1.41), on a :

$$B(A, Z) = [ZM_H + Nm_n - M_{at}(A, Z)] c^2 \quad (2.79)$$

l'expression de la masse atomique à partir de cette dernière expression est alors :

$$M_{at}(A, Z) c^2 = [ZM_H + Nm_n] c^2 - B(A, Z) \quad (2.80)$$

on remplace l'expression (2.80) dans l'expression (2.78), il vient :

$$Q = B(A, Z + 1) - B(A, Z) \quad (2.81)$$

on sait que l'énergie de liaison des nucléons dans le noyau, ou formule de Beth-Weizsacher, d'après l'expression (2.1) est :

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (2.82)$$

on remplace cette dernière expression dans (2.81), on obtient :

$$Q = \frac{-a_c}{A^{1/3}} (2Z + 1) + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z - 1) \quad (2.83)$$

afin de calculer le terme d'interaction coulombienne (a_c) de la formule de Von Weizsacker, nous calculons d'abord le bilan Q des noyaux miroirs ${}^3_1\text{He}$ et ${}^3_1\text{H}$, soit l'interaction :



le bilan Q de cette dernière expression d'après l'expression (2.78) est :

$$Q = [M_{at}({}^3_1\text{H}) + M_H - M_{at}({}^3_2\text{He}) - m_n] c^2 \quad (2.85)$$

le terme (a_c) se calcule à partir de l'expression (2.83) en remplaçant le bilan Q par son expression (2.85), soit :

$$a_c \simeq 0.41 \text{ MeV} \quad (2.86)$$

Exercice 2

1. Déterminons pour $A = 51$, les termes coulombien (a_c) et d'asymétrie (a_s) de la formule de Von Weizsacker.

soit la première réaction donnée :



le bilan d'énergie de cette réaction est :

$$Q = [M_{at}({}_{23}^{51}\text{V}) + m_p - M_{at}({}_{24}^{51}\text{Cr}) - m_n] c^2 \quad (2.88)$$

en appliquant l'expression (2.83), sur cette dernière expression pour $A = 51$, $Z = 23$ et $Q = -1.705 \text{ MeV}$, on obtient une première équation :

$$\frac{-47a_c}{51^{1/3}} + \frac{16a_a}{51} = -1.705 \quad (2.89)$$

nous avons la deuxième réaction :



en appliquant la loi de la conservation de l'énergie totale sur cette dernière réaction, on obtient :

$$m_{Ti}c^2 = m_Vc^2 + m_{\beta^-}c^2 + T_{\beta^-} + T_{\bar{\nu}} \quad (2.91)$$

on peut écrire l'expression du bilan énergétique de la désintégration bêta moins (Q_{β^-}) de la réaction (2.90) à partir de cette dernière expression :

$$Q_{\beta^-} = [m_{Ti} - m_V - m_{\beta^-}] c^2 \quad (2.92)$$

$$= T_{\beta^-} + T_{\bar{\nu}} \quad (2.93)$$

$$= T_{\beta_{Max}^-} \quad (2.94)$$

on ajoute et retrouche $(Z - 1)m_e$ dans l'expression (2.92), on obtient :

$$Q_{\beta^-} = [M_{at}({}_{22}^{51}\text{Ti}) - M_{at}({}_{23}^{51}\text{V})] c^2 \quad (2.95)$$

en utilisant l'expression (2.80), on peut écrire cette dernière expression comme suit :

$$Q_{\beta^-} = [-M_H + m_n] c^2 + B(A, Z) - B(A, Z - 1) \quad (2.96)$$

l'utilisation de l'équation d'énergie de liaison $B(A, Z)$ de l'expression (2.1) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= [-M_H + m_n] c^2 - \frac{a_c}{A^{1/3}} (2Z - 1) + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z + 1) \\ &= T_{\beta_{\max}^-} \end{aligned} \quad (2.97)$$

en utilisant les valeurs numériques pour $A = 51$, $Z = 23$ et $T_{\beta_{\max}^-} = 2.28 \text{ MeV}$, on obtient une deuxième équation :

$$\frac{-45a_c}{51^{1/3}} + \frac{24a_a}{51} = -0.782 \quad (2.98)$$

à partir de cette dernière expression et l'expression (2.89), on peut trouver les valeurs des termes a_c et a_s de la formule de Von Weizsacker comme suit :

$$\begin{cases} a_c = 0.59 \text{ MeV} \\ a_a = 18.4 \text{ MeV} \end{cases} \quad (2.99)$$

2. Déterminons Z pour le noyau le plus stable. Le noyau le plus stable est qui a une énergie de liaison des nucléons maximale, c-à-d :

$$\left. \frac{\partial B(A, Z)}{\partial Z} \right|_{Z=Z_0} = 0 \quad (2.100)$$

on dérive l'équation de l'expression (2.1), on obtient :

$$\left. \frac{\partial B(A, Z)}{\partial Z} \right|_{Z=Z_0} = \frac{-2a_c Z_0}{A^{1/3}} + \frac{4a_a (A - 2Z_0)}{A} = 0 \quad (2.101)$$

en remplaçant les valeurs de l'expression (2.101) et $A = 51$ dans cette dernière expression, on obtient :

$$Z_0 = 23$$

ceci montre que l'élément le plus stable correspond à $Z_0 = 23$ est ${}_{23}^{51}\text{V}$.

Exercice 3. En utilisant les expressions (2.26), (2.27) et (2.28), on peut trouver dans le cadre du modèle en couches les caractéristiques spins (J) et parités (π) de l'état fondamental des noyaux comme suit :

- le noyau ${}^4_2\text{He}$, $J^\pi = 0^+$.
- le noyau ${}^{10}_5\text{B}$, $J^\pi = 0^+$, 1^+ , 2^+ et 3^+ , ce sont des valeurs possibles, tandis que la valeur réelle est $J^\pi = 3^+$.
- le noyau ${}^{13}_6\text{C}$, $J^\pi = (\frac{1}{2})^-$.
- le noyau ${}^{13}_7\text{Ni}$, $J^\pi = (\frac{1}{2})^-$.
- le noyau ${}^{14}_6\text{C}$, $J^\pi = 0^+$.
- le noyau ${}^{17}_8\text{O}$, $J^\pi = (\frac{5}{2})^+$.
- le noyau ${}^{27}_{13}\text{Al}$, $J^\pi = (\frac{5}{2})^+$.
- le noyau ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, $J^\pi = 0^+$.

Exercice 4. En exprimant le moment quadripolaire (Q) en fonction de \bar{r}_p^2 .

Nous écrivons l'opérateur quadripolaire ($2j + 1$) valeurs comme suit :

$$Q_{m_j} = \int \phi_{j,m_j}^*(r) [q(3z^2 - r^2)] \phi_{j,m_j}(r) d\tau \quad (2.102)$$

ces valeurs sont reliées entre elles par la relation :

$$\frac{Q_{m_{j_1}}}{Q_{m_{j_2}}} = \frac{3m_{j_1}^2 - j(j+1)}{3m_{j_2}^2 - j(j+1)} \quad (2.103)$$

avec $\phi_{j,m_j}(r)$ est une fonction d'onde associée à l'état $|j, m_j\rangle$.

on peut écrire :

$$Q_j = \int \phi_{j,j}^*(r) [q(3z^2 - r^2)] \phi_{j,j}(r) d\tau \quad (2.104)$$

où,

$$\phi_{j,j}(r) = R_l(r) Y_l^l(\theta, \vartheta) , \quad (2.105)$$

sont des harmoniques sphériques.

et

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\vartheta \quad (2.106)$$

on remplaçant ces deux dernières expressions et l'expression (2.38) dans l'expression (2.14), on obtient :

$$Q_j = \int |R_l(r)|^2 |Y_l^l(\theta, \vartheta)|^2 [q(3r^2 \cos^2 \theta - r^2)] r^2 \sin \theta dr d\theta d\vartheta \quad (2.107)$$

$$= \frac{(2l+1)!! q \bar{r}_p^2}{2^{l+2} l! \pi} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) (\sin \theta)^{2l+1} d\theta \int_0^{2\pi} d\vartheta \quad (2.108)$$

où nous avons posé :

$$\bar{r}_p^2 = \int |R_l(r)|^2 r^4 dr \quad (2.109)$$

et

$$|Y_l^l(\theta, \vartheta)|^2 = \frac{(2l+1)!! (\sin \theta)^{2l}}{2^{l+2} l! \pi} \quad (2.110)$$

Le calcul de Q du noyau ne possédant en plus des couches remplies qu'un proton en état : $s^{1/2}$; $p^{3/2}$ et $d^{5/2}$ s'effectue à partir de l'expression (2.107) comme suit :

- Pour l'état $s^{1/2}$, le moment angulaire orbital qui correspond cet état est $l = 0$, et on obtient à partir de l'expression (2.108) :

$$Q_j = \frac{q \bar{r}_p^2}{2} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta \quad (2.111)$$

$$= 0 \quad (2.112)$$

- Pour l'état $p^{3/2}$, le moment angulaire orbital qui correspond cet état est $l = 1$, soit à

partir de l'expression (2.108) :

$$Q_j = \frac{3q\bar{r}_p^2}{4} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin^3 \theta d\theta \quad (2.113)$$

$$= \frac{-2}{5} q\bar{r}_p^2 \quad (2.114)$$

- Pour l'état $d^{5/2}$, le moment angulaire orbital qui correspond cet état est $l = 2$, le moment quadripolaire devient à partir de l'expression (2.108) :

$$Q_j = \frac{-4}{5} q\bar{r}_p^2 \quad (2.115)$$