République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA

FACULTÉ des SCIENCES et de la MATIÈRE et de l'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT de PHYSIQUE

Matrices, Déterminants et Systèmes d'Équations Linéaires

Mathématiques II : Analyse 2 et Algèbre 2

Destiné aux étudiants de

Première Année Licence SM & ST

Présenté par

Dr. Leila SLIMANE

2024- 2025

Table des matières

Chapitre 1

Matrices et Déterminants

1.1 Matrices

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramènent à des manipulations sur les matrices. Comme nous le verrons dans ce chapitre, cela est vrai pour la résolution des sytèmes linéaires.

1.1.1 Définitions et notions

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{k}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

Définition 1.1.1 *On appelle matrice A de dimension (taille) $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{k}$ un tableau rectangulaire de nombres dans $\mathbb{k}$ comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice A.*

Notations

1. Les matrices sont représentées par des lettres majuscules $(A, B, C, \cdots \text{etc.})$.
2. Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

ou encore $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou $A = (a_{ij})$.

3. On note a_{ij} l'élément ou le coéfficient de la matrice situé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne (ces indices donnent l'adresse ou la position de chaque élément).
4. La dimension (la taille, l'ordre) de la matrice est notée par $\dim A$: $\dim A = n \times p$, n désigne le nombre de lignes et p le nombre de colonnes.
5. L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$ à coéfficients dans $\mathbb{k}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{k})$.

Remarque 1.1.1 *On ne doit pas confondre a_{ij} qui est un élément avec (a_{ij}) qui est une matrice dont les éléments sont les a_{ij}.*

Exemple 1.1.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \pi & -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} i & 3+2i & 0 \\ 1 & 0 & e \\ -7 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

On a $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim B = 3 \times 3$. *On a par exemple :* $a_{12} = 0$, $a_{23} = 1 + \sqrt{5}$, $b_{11} = i$, $b_{12} = 1$, $b_{33} = 11$.

1.1.2 Matrices particulières

1. La matrice nulle de dimension $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on la note $0_{n,p}$. Par exemple :
$$0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. La matrice A est une matrice ligne (vecteur-ligne) si $\dim A = 1 \times p$ $(n = 1)$:
$A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1p})$ .Par exemple : $A = \left(-7, 4, \sqrt{3}\right)$.

3. La matrice A est une matrice colonne (veteur-colonne) si $\dim A = n \times 1$ ($p = 1$) :
$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$.

4. La matrice A est dite matrice carrée si $n = p$ (le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes). On note $M_{n,n}(\mathbb{k})$ par $M_n(\mathbb{k})$. Les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forment la diagonale principale.

5. La matrice identité (ou unité) I_n est une matrice carrée d'ordre n où $a_{ij} = 1$ si $i = j$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Par exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. La matrice A est une matrice diagonale si A est carrée et si $a_{ij} = 0$ quand $i \neq j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. A est une matrice triangulaire supérieure si A est une matrice carrée et $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. A est une matrice triangulaire inférieure si A est une matrice carrée et $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.3 Égalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si elles ont la même dimension et si les coefficients (ou les éléments) situés à la même place sont égaux :

$\dim A = \dim B = n \times p \quad \text{et } a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$

Exemple 1.1.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

On a $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim B = 3 \times 2$. *Donc* $A \neq B$ *car* $\dim A \neq \dim B$.

Exemple 1.1.3 *Trouver les valeurs des réels x et y tels que $A = B$, où :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ y^2 - 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2x - 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme les deux matrices ont la même dimension, on a $A = B$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y^2 - 3 = 6 \\ 2x - 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

1.1.4 Opérations sur les matrices

Dans cette section on va définir quelques opérations sur l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{k})$.

Addition des matrices

Définition 1.1.2 *Soient* $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *deux matrices de même dimension* $n \times p$. *Leur somme est la matrice* $C = (c_{ij})$ *de dimension* $n \times p$ *définie par :*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

(On additionne les éléments qui ont la même position). On note $C = A + B$.

Remarque 1.1.2 – *On ne peut pas additionner deux matrices de dimension différentes.*

– *De même on peut définir la soustraction de deux matrices :* $C = A - B$ *est la matrice de dimension* $n \times p$ *définie par* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.1.3 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *une matrice et* $\alpha \in \mathbb{k}$ *un scalaire. Le produit de la matrice* A *par le scalaire* α *donne une matrice notée* $\alpha A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *et définie par :* $\alpha A = \alpha\,(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$ *(i.e. on multiplie chaque coefficient de* A *par* α*).*

Exemple 1.1.4 *Soit :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.
Evaluons $A+2B$, $B+C$. *Les matrices* A *et* B *ont la même dimension* $(\dim A = 2\times 2 = \dim B)$ *par la suite* A *et* $2B$ *ont aussi la même dimension donc* $A+2B$ *est bien définie :*

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2-6 & 5+0 \\ -1+4 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\dim B = 2\times 2 \neq \dim C = 2\times 3$, $B+C$ *n'est pas définie (elle ne peut pas être calculée).*

Proposition 1.1.1 *Soit* $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Commutativité :* $A + B = B + A$.
2. *Associativité :* $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. *Elément neutre pour la somme :* $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
4. *Elément symétrique :* $A - A = A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$.
5. *Associativité du produit par un scalaire :* $(\alpha\beta)A = \alpha\,(\beta A)$.
6. *Distributivité sur l'addition des scalaires :* $(\alpha+\beta)\,A = \alpha A + \beta A$.
7. *Elément neutre pour le produit par un scalaire :* $1A = A$.

Remarque 1.1.3 *On peut montrer que l'ensemble* $M_{n,p}(\mathbb{k})$ *muni des deux opérations précédentes est un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel.*

Produit (multiplication) matriciel

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(\mathbb{k})$ deux matrices. Le produit matriciel de ces deux matrices $C = AB$ est une matrice de $M_{n,q}(\mathbb{k})$ dont les coéfficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Autrement dit l'élément c_{ij} est le résultat du produit scalaire de la ligne i de la matrice A avec la colonne j de la matrice B.

Exemple 1.1.5 *Soit :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Effectuons le produit matrciel AB *et* AC *si c'est possible.*

On a : $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim B = 3 \times 2$*. Alors le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B *donc le produit* AB *est bien défini avec* $\dim AB = 2 \times 2$ *et on a :*

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times (-3) + 5 \times 2 + 4 \times 0 & 2 \times 0 + 5 \times 1 + 0 \times (-7) \\ -1 \times (-3) + 0 \times 2 + 3 \times 4 & (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 3 \times (-7) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}.$$

Comme le nombre de colonnes de A *n'est pas égal au nombre de lignes de* C*, car* $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim C = 2 \times 2$*, alors le produit* AC *n'est pas défini.*

Le produit matriciel a des propriétés différentes de celles du produit de deux réels :

- Le produit AB n'est pas toujours défini : il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- En géneral $AB \neq BA$: le produit n'est pas commutatif, même dans le cas de deux

matrices carrées. Prenons : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On a $AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$.

– $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$, *i.e.* il existe A et B non nulles telles que $AB = 0$. On a par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

– $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. Comme exemple on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.1.2 *Soient A, B et C des matrices de dimension $n \times p$, $p \times q$ et $q \times m$ respectivement et α et β deux scalaires. On a les propriétés suivantes :*

1. *Associativité du produit matriciel* $A(BC) = (AB)C$.
2. *Distributivité à gauche sur l'addition matricielle :* $A(B + C) = AB + AC$.
3. *Distributivité à droite sur l'addition matricielle :* $(A + B)C = AC + BC$.
4. *Associativité pour la multiplcation par un scalaire :* $(\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta(AB)$.
5. $I_n A = AI_p = A$, $A0_{p,r} = 0_{n,r}$ *et* $0_{r,n}A = 0_{r,p}$.

Définition 1.1.4 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On définit les puissances succecives de A par :* $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^{k+1} = A^k A$, $k \in \mathbb{N}$. *C'est-à-dire :*

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k\ fois}.$$

Proposition 1.1.3 *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{k})$. On a*

1) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$,

2) $(A + I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$.

Exemple 1.1.6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2, A^3, A^4.

- Déduire $A^p, p \geq 4$.

On trouve $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

- D'après les calculs précédents on peut déduire que

$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. *Cette formule peut être démontrée par le principe de récurrence.*

Transposition de matrices

Définition 1.1.5 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$. *La matrice transposée de* A*, notée* A^t *est obtenue en permutant les lignes et les colonnes de* A :

$A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k}) \Rightarrow A^t = (a_{ji}) \in M_{p,n}(\mathbb{k})$.

Exemple 1.1.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Alors sa transposée* $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. *De plus* $\dim A = 2 \times 3 \Rightarrow \dim A^t = 3 \times 2$.

Proposition 1.1.4 *Soit* A *et* B *deux matrices et* $\alpha \in \mathbb{k}$ *un scalaire. On a :*

1. $(A^t)^t = A$,
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$,

3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$,

4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Définition 1.1.6 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$, *une matrice carrée.*

1) A est dite "symétrique" si et seulement si $A^t = A$.

2) A est dite "antisymétrique" si et seulement si $A^t = -A$.

Exemple 1.1.8 *1) Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. *On a* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A$, *donc la matrice A est symétrique.*

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & -6 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -B$, *donc la matrice B est antisymétrique.*

Définition 1.1.7 *La trace de la matrice carrée* $A \in M_n(\mathbb{k})$, *notée* trA, *est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit :*

$$trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Exemple 1.1.9 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -7 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. *Alors :* $trA = a_{11}+a_{22}+a_{33} = 2+6+5 = 13$.

Proposition 1.1.5 *Soit* $A, B \in M_n(\mathbb{k})$, *alors :*

1. $tr(A+B) = trA + trB$,

2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$,

3. $tr(A^t) = tr(A)$,

4. $tr(AB) = tr\,(BA)$.

1.2 Déterminants

Le déterminant est un nombre que l'on associe à une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$. Le déterminant est un outil très important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires. Avant de donner son expression dans le cas générale on commence par donner sa formule pour des matrices de petites tailles.

Cas d'une matrice d'ordre 1

Dans ce cas $A = a_{11}$ et le déterminant est défini par : $\det A = a_{11}$.

Cas d'une matrice d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est le nombre :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Cas d'une matrice d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Dans ce cas le déterminant est défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

On définit le déterminant dans le cas général d'une manière récursive.

Définition 1.2.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On note A_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. En développant* *suivant une ligne i quelconque, le déterminant est le nombre :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

ou d'une manière équivalente en développant suivant une colonne j quelconque :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Le nombre $\det A_{ij}$ est appelé le mineur d'ordre $n-1$ de la matrice A et $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est appelé le cofacteur de A relatif au coéfficient a_{ij}. Le terme $(-1)^{i+j}$ donne une distribution des signes $+$ et $-$ analogue à la distribution des cases noirs et blans sur un damier :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Exemple 1.2.1 *Soit* $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. *Alors* $\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times 7 - 3 \times 9 = 8.$

Exemple 1.2.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

En développant suivant la prmière ligne on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-6+3) + (-3-12) + 0 = -24.$$

Développant maintenant suivant la troixième colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Règle de Sarrus

Cette règle s'applique uniquement pour les matrices d'ordre 3 :

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ alors on a :

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$.

Exemple 1.2.3 *Calculons le déterminant suivant par la règle de Sarrus :* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= [2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2] - [0 \times (-1) \times 3 + 2 \times 3 \times 2 + 1 \times 1 \times 1] \\ &= 6. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire supérieure (ou inférieure) A est égal au produit des termes diagonaux :*

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}.$$

Exemple 1.2.4 *On a :* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (-8) \times 4 = -32.$

C'est facile à voir que $\det(I_n) = 1$ et $\det(0_n) = 0$.

Théorème 1.2.1 *Soit A, $B \in M_n(\mathbb{k})$ deux matrices et $\lambda \in \mathbb{k}$ un scalaire. Alors :*

1. $\det(AB) = \det(A)det(B)$.
2. $\det(A^t) = \det(A)$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. $\det A = 0$ *si A contient une colonne (resp. ligne) nulle.*
5. $\det A = 0$ *si A contient deux colonnes (resp. lignes) égales.*
6. $\det A = 0$ *si une des colonnes (resp. lignes) de A est une combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. lignes).*
7. *Le déterminant de A ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. lignes).*
8. *Un déterminant change de signe si on effectue un nombre impair de permutations (si par exemple, on permute deux lignes uniquement ou deux colonnes uniquement).*

Exemple 1.2.5 *1) Le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ *est nul car la deuxième colonne C_2 est une combinisant linéaire des autres colonnes : $C_2 = C_1 + 2C_3$.*

2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times (-1) = -10.$

On a multiplié par -1 car on a permuté entre la première colonne et la troixième colonne.

1.3 Matrices Inverses

Définition 1.3.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{k})$ telle que :*

$$AB = I_n \qquad et \qquad BA = I_n.$$

On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

C'est facile à vérifier que la matrice I_n est inversible avec $I_n^{-1} = I_n$ et que la matrice nulle 0_n n'est pas inversible.

Exemple 1.3.1 *Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible. On va étudier l'existence d'une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_2$ et $BA = I_2$. On a :*

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 5c = 0 \\ 5d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{2}{5} \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Donc $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. De plus on a bien

$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire $BA = I_2$. Donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.*

Théorème 1.3.1 *La matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Exemple 1.3.2 *Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 9 & \alpha^2 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = \alpha^3 - 27$. La matrice A est inversible si $\det(A) = \alpha^3 - 27 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 3$.*

Proposition 1.3.1 *Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{k})$. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si A est inversible, alors son inverse est unique et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.*
2. *Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi inversible et on a $(A^{-1})^{-1} = A$.*

3. *Si A est inversible, alors A^t est aussi inversible et on a* $(A^t)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

4. *Si A et B sont inversibles, alors AB est aussi inversible et on a* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5. *Si C est inversible, alors* $AC = BC \Longrightarrow A = B$.

Soit $A \in M_n(\Bbbk)$ une matrice inversible et $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1 \in \mathbb{R}$. Si

$$a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A = I_n$$

alors :

$$A\left(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right) = I_n \Longrightarrow A^{-1} = \left(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right).$$

Exemple 1.3.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer $2A - A^2$ et déduire A^{-1}.*

On a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

donc $2A - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par la suite $2A - A^2 = I_3 \Rightarrow A(2I_3 - A) = I_3 \Rightarrow A^{-1} = (2I_3 - A)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 Calcul de la matrice inverse par la méthode de cofacteurs

On présente ici une méthode pratique pour calculer la matrice inverse.

Définition 1.3.2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$. On appelle matrice des cofacteurs $C = com(A)$ (ou la comatrice) la matrice de coefficients $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{èmé}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.*

Théorème 1.3.2 *Si A est inversible alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t$.*

Exemple 1.3.4 *Appliquons ce théorème pour une matrice d'ordre 2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*

Supposons que $\det(A) = ad - bc \neq 0$, donc A^{-1} existe.

On a $com(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}, \quad (com(A))^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Finalement : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 1.3.5 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = -2 \neq 0$, alors A est inversible.*

Evaluons la comatrice de A :

$$com(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

$$c_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \qquad c_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

donc $com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow com(A)^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(com(A)\right)^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

1.4 Matrices et applications linéaires

Les résultats fondamentaux développés ici décrivent un lien entre la notion de matrice et celle d'application linéaire. Nous allons voir que dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, l'étude des applications linéaires se ramène à l'étude des matrices, ce qui facilite les calculs.

Soient E et F deux espaces vectoriels, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire.

On appelle matrice de f relativement aux bases B de E et B' de F la matrice $m \times n$ dont la $j'ième$ colonne est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base de B' :

$$\mathcal{M}(f, B, B') = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où :

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \cdots + a_{mj}e'_m.$$

Exemple 1.4.1 *Soit* $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $B' = \{e'_1 = (1,0), e'_2 = (0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*. L'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :* $f(e_1) = 2e'_1 - e'_2,\ f(e_2) = 5e'_2$ *a pour matrice :* $\mathcal{M}(f, B, B') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

Remarque 1.4.1 – *La matrice associée à une application linéaire n'est pas unique, elle dépend des bases choisies dans les espace* E *et* F*.*

– *La taille de la matrice dépend uniquement de la dimension de E et celle de F.*

Exemple 1.4.2 *Soit $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. L'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f(x,y,z) = (2x - y, 3z + x, y + 2z),$$

a pour matrice :

$$\mathcal{M}(f,B,B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Car :

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (2,1,0) = 2e_1 + e_2,$$
$$f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,0,1) = -e_1 + e_3,$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,3,2) = 3e_2 + 2e_3.$$

On peut récuperer la formule de l'application f à partir de la matrice associée comme suit :

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - y, x + 3z, y + 2z).$$

1.4.1 Opérations sur les applications linéaires et les matrices

Proposition 1.4.1 *Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires et soit B base de E et B' base de F. Alors :*

– $\mathcal{M}(f + g, B, B') = \mathcal{M}(f, B, B') + \mathcal{M}(g, B, B')$.

– $\mathcal{M}(\lambda f, B, B') = \lambda \mathcal{M}(f, B, B')$.

Remarque 1.4.2 *Les propriétés ci-dessus sont vraies à condition de considérer la même base sur l'espace de départ pour les deux applications et la même base sur l'espace d'arrivée.*

Proposition 1.4.2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires et soit B base de E, B' base de F et B''une base de G. Alors :*

$$\mathcal{M}(g \circ f, B, B'') = \mathcal{M}(g, B', B'')\mathcal{M}(f, B, B').$$

Exemple 1.4.3 *On considère deux applications linéaires* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *et* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. *On pose* $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$ *et*

$G = \mathbb{R}^2$. *On se donne des bases : B de E, $B\prime$ une base de F et B' de G. Si les matrcies de f et de g sont données par :*

$$M(f,B,B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad M(g,B,B') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\mathcal{M}(g \circ f, B, B'') = \mathcal{M}(g, B', B^{''})\mathcal{M}(f, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.4.3 *Soit $f : E \to E$ où E muni de la même base B au départ et à l'arrivée alors*

- *f est bijective si et seulement si $\mathcal{M}(f, B, B)$ est inversible.*
- *Si f est bijective alors la matrice associée à f^{-1} dans la base B est $(\mathcal{M}(f, B, B))^{-1}$, c'est-à-dire :* $$\mathcal{M}(f^{-1}, B, B) = (\mathcal{M}(f, B, B))^{-1}.$$

1.4.2 Matrice de Passage d'une base à une autre

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 1.4.1 *Soit B une base de E. Soit B' une autre base de E. On appelle matrice de passage de la base B vers la base B', notée $P_{B,B'}$, la matrice carrée de taille $n \times n$, contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B' exprimé dans l'ancienne base B.*

Exemple 1.4.4 *Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On considère la base :*

$B = \{e_1 = (1, 0),\ e_2 = (1, 1)\}$ *et la base* $B' = \{e'_1 = (-1, 3),\ e'_2 = (3, 4)\}$

exprimons e'_1 et e'_2 en fonction de (e_1, e_2). On a :

$$e'_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 \quad \text{et} \quad e'_1 = \alpha' e_1 + \beta' e_2$$

Exemple 1.4.5 $(-1,3) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$ *et* $(3,4) = \alpha'(1,0) + \beta'(1,1)$.

On trouve : $\alpha = -4$, $\beta = 3$, $\alpha' = -1$, $\beta' = 4$. *Donc la matrice de passage est donc :*

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.4.4 – *La matrice de passage d'une matrice d'une base B vers une base B' est inversible et son inverse est ègale à la matrice de passage de la matrice B' vers la base B :*

$$P_{B',B} = (P_{B,B'})^{-1}.$$

– *Si B, B' et B'' sont trois bases alors :*

$$P_{B,B''} = P_{B,B'} \times P_{B',B''}.$$

Proposition 1.4.5 *Soit E un espace vectoriel de dimension n, B et $B\prime$ deux bases pour E, $f : E \to E$ une application linéaire et $P_{B,B'}$ la matrice de passage d'une matrice de la base B vers la base B'. Alors :*

$$M(f, B', B') = P^{-1}_{B,B'} M(f, B, B) P_{B,B'}$$

.

Théorème 1.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$, B et B' deux bases de E, et C et C', deux bases de F et $P_{B,B'}$ (resp. $P_{C',C}$) matrice de passage de B à B' (resp. matrice de passage de C' à C). Alors :*

$$M(f, B', C') = P^{-1}_{C',C} M(f, B, B) P_{B,B'}.$$

Exemple 1.4.6 *On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:*

$$f(x, y) = (3x - y, 2x + 5y).$$

La matrice $M(f, B', B')$ associée à f dans la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est :

$$M(f,B,B)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix}.$$

On considère la base $B'=\{v_1,v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ où $v_1=(1,1)$, $v_1=(-1,1)$. Alors la matrice de passage de B à B' est :

$$P_{B,B'}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent la matrice de l'application f dans la base B' est donnée par :

$$\begin{aligned} M(f,B',B') &= P_{B,B'}^{-1}M(f,B,B)P_{B,B'}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{9}{2} & \frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.5 Valeurs propres et vecteurs propres

Soit $A\in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée de taille $n\times n$.

Définition 1.5.1 *On dit que le scalar λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne $V\neq 0$ tel que $AV=\lambda V$. Dans ce cas, V est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Exemple 1.5.1 *Soit* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ *et* $V=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

On a

$$AV=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Donc V est un vecteur propre de A de valeur propre $\lambda=2$.

Théorème 1.5.1 *Soient $\lambda_i, i = 1, \dots n$ des valeurs propres distinctes de la matrice carrée A et soit V_i un vecteur propre associé à λ_i. Alors les vecteurs $V_i, i = 1, \dots n$ sont linéairement indépendants.*

On expose maintenant la méthode de trouver les valeurs propres.

Définition 1.5.2 *Lorsque $\lambda \in \mathbb{k}$ est une valeur propre de A, alors l'ensemble suivant*

$$E = \{V \in \mathbb{k}^n, \quad AV = \lambda V\}.$$

est un sous-espac vectoriel de $\mathbb{k}^n$,c'est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Proposition 1.5.1 *Soient $A \in M_n(\mathbb{k})$, $I \in M_n(\mathbb{k})$ la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{k}$. Alors*

$$\lambda \textit{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$$

Définition 1.5.3 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$. Le polynôme caractéristique de A est*

$$\chi_A(X) = \det(A - XI).$$

On note que $\chi_A(X)$ est un polynôme de degré n. Donc

$$\lambda \textit{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.$$

L'équation $\chi_A(\lambda) = 0$ est l'équation caractéristique de de A. Les racines de cette équation sont les valeurs propres de A.

Corollaire 1.5.1 *1. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors A admet au plus n valeurs propres.*

2. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors A admet au moins une valeure propre.

Exemple 1.5.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *alors* $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.
Donc A *a deux valeurs propres* $\lambda = 1$ *et* $\lambda = 2$ *(racine double). Pour* $\lambda = 1$ *on a*

$$\begin{aligned} AV - \lambda IV &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On trouve le premier vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 2$ *on a :*

$$\begin{aligned} AV - \lambda IV &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc le deuxième vecteur propre est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.5.2 *Lorsque une matrice $A \in M_n(\Bbbk)$ possède n valeurs propres alors la somme des valeurs propres vaut trA.*

1.6 Diagonalisation

Définition 1.6.1 *Soit $A \in M_n(\Bbbk)$. On dit que A est diagonalisable sur $\Bbbk$ s'il existe une matrice inversible P et une matrice diaganal D telles que*

$$A = PDP^{-1}.$$

Théorème 1.6.1 ***(Théorème de diagonalisation)***
Une matrice $A \in M_n(\Bbbk)$ est diagonalisable si et seulement si A n'a pas de vecteurs propres linéairement dépendants.

En fait, $A = PDP^{-1}$, avec D matrice diagonale, si et seulement si les colonnes de P sont n vecteurs propres linéairement indépendants de A. Dans ce cas, les entrées de la diagonale de D sont les valeurs propres de A rangées dans le même ordre que les vecteurs propres dans P.

Théorème 1.6.2

Une matrice $A \in M_n(\Bbbk)$ a n valeurs propres disctinctes est diagonalisable.

Exemple 1.6.1 *Diagonalisons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *si c'est possible.*

***1**^{ère}étape* : *trouvons les valeurs propres*

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2(1-\lambda)=0.$$

Les valeurs propres sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ (double racine).

2ème étape *: recherche des vecteurs propres linéairement indépendants*

En résolvant $(A-\lambda I)V=0$, pour chaque valeur de λ,on trouve

Pour $\lambda = 1$, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour $\lambda = 2$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3ème étape *Construction de P :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4ème étape *Construction de D à partir des valeurs propres correpondantes*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que on a bien $A = PDP^{-1}$, en effet il suffit de comparer entre AP et PD. On a

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.6.2

1.7 Exercices

Exercise 1.7.1 *Trouver x, y, z,et w si :*

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution.

L'équation initiale est équivalente à :

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{pmatrix}.$$

En égalant les éléments correspondants les uns aux autres :

$$\begin{array}{rcl} 3x & = & x+4 \\ 3y & = & 6+x+y \\ 3z & = & -1+z+w \\ 3w & = & 2w+x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2x & = & 4 \\ 2y & = & 6+x \\ 2z & = & -1+w \\ w & = & 3 \end{array}$$

La solution est donc : $x = 2$, $y = 4$, $z = 1, w = 3$.

Exercise 1.7.2 *Soient les matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}.$$

1. *Trouver une matrice C telle que $A - 3B + C = 0_{3\times 2}$.*

2. *Calucler AB, A^tB et B^tA.*

3. *Calculer la matrice D.*

Solution.

1. $A-3B+C=0_{3\times 2} \Leftrightarrow C=3B-A=3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 0 & 1 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$

2. Le nombre de colonnes de A est different du nombre de lignes de B donc on ne peut pas effectuer AB.

   On a :

   $$A^tB = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

   et

   $$B^tA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -13 & 42 \end{pmatrix}.$$

3. $$D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.3 *Trouver pour quelles valeurs de t la matrice suivante est inversible :*

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}.$$

Solution. On a :

$$\det \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} = t^3+4t^2-4t-16 = (t+4)(t-2)(t+2).$$

A est inversible si $\det A \neq 0$, donc si $t \in \mathbb{R} - \{-4, 2, -2\}$.

Exercise 1.7.4 *Trouver pour quelles valeurs de m la matrice suivante est inversible :*

$$D = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Solution. On a :

$$\det D = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{vmatrix}.$$

En remplacant C_4 par $C_4 - C_1$ on obtient :

$$\det D = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & m \\ 1 & m & 0 & -1 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la quatrième ligne on trouve :

$$\det D = -m \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2m+2 & m & 1 \end{vmatrix} = -m(m^3 - 3m - 2) = -m(m+1)^2(m-2),$$

La matrice D est inversible si $\det D \neq 0$, donc $m \in \mathbb{R} - \{0, -1, 2\}$.

Exercise 1.7.5 *Soit :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer $A^3 - A$.*
2. *En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.*

Solution. 1. On trouve :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3.$$

2. On a :

$$A^3 - A = 4I_3.$$

En factorisant par A on obtient :

$$A[A^2 - I_3] = 4I_3$$

Donc :

$$A \times \tfrac{1}{4}[A^2 - I_3] = I_3.$$

Ce qui donne que A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}[A^2 - I_3] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.6 *Claculer les inverses des matrices suivantes (si elles existent) :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. On a $\det A = -3 \neq 0$ donc A est inversible. Son inverse est : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 3 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$.
2. On a $\det B = 19 \neq 0$ donc A est inversible. On a :

$$B^{-1} = \tfrac{1}{\det A}(com(B))^t.$$

$$com(B) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & -13 \\ 9 & 1 & 12 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \tfrac{1}{-19} \begin{pmatrix} -5 & 9 & -1 \\ -9 & 1 & 2 \\ -13 & 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{19} & -\frac{9}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{9}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \\ \frac{13}{19} & -\frac{12}{19} & -\frac{5}{19} \end{pmatrix}.$$

3. Comme $\det C = 0$ (la troisième colonne de C est égale à la différence entre la deuxième colonne et la première colonne). Donc C n'est pas inversible.
4. On a $\det D = -2$ donc D est inversible. On sait que :

$$D^{-1} = \frac{1}{\det A}(Com(D))^t.$$

Le calcul de la comatrice de D donne que :

$$Com(D) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$D^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. *Déterminer l'application linéaire associée à la matrice* A *dans les bases canonique de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$.

Solution. On pose $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2, x_3)$. On peut l'écrire sous la forme matricielle :

$$(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique :

$$y_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3.$$
$$y_2 = -x_1 + 7x_3.$$

D'où l'application linéaire associée à la matrice A est :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3).$$

Exercise 1.7.8 *On considère l'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = (2x + y, x + 2y).$$

1. Déterminer la matrice $M(f, B, B)$ associée à f dans la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère la base $B' = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ où $v_1 = (1,1)$, $v_1 = (-1,1)$. Déterminer $P_{B,B'}$ la matrice de passage de B à B'.

3. Donner la matrice associée à f dans la base B'.

Solution.

1. La matrice associée à l'application f dans la base B est :
$$M(f,B,B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de passage de B à B' :
$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice de l'application f dans la base B' est donnée par :
$$\begin{aligned} M(f,B',B') &= P^{-1}_{B,B'} M(f,B',B') P_{B,B'} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercise 1.7.9 *Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondants.

Solution. On a

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda.$$

Donc A possède trois valeurs propres $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$.

Trouvons maintenant les sous espaces propres. On a

$$V = (x, y, z)^t \text{ et } V \in E_{\lambda_i} \Leftrightarrow AV = \lambda_i V, 1 \leq i \leq 3.$$

Pour $\lambda_1 = -2$, on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}.$$

Ceci est équivalent à $x = 0$, $y = -z$.

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3,\ AV = \lambda_1 V \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3,\ x = 0,\ y = z \right\} \\ &= \left\{ (0, -z, z)^t,\ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle (0, -1, 1)^t \right\rangle. \end{aligned}$$

Par la même méthode on trouve

$$E_{\lambda_2} = \left\langle (-2, 3, 1)^t \right\rangle, \quad \text{et} \quad E_{\lambda_3} = \left\langle (-5, 3, 2)^t \right\rangle.$$

Chapitre 2

Systèmes d'Équations Linéaires

2.1 Définitions et notations

Définition 2.1.1 *Soit $n, p \geq 1$ deux entiers. On appelle système d'équations linéaires à n équations et p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ le système :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} . \qquad (S)$$

Les coefficients a_{ij} et les seconds membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{k}$. Les inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{k}$.

Définition 2.1.2

1. *On appelle solution du système (S) tout vecteur $X = (x_j)_{1 \leq j \leq p}$, $x_j \in \mathbb{k}$ vérifiant les équations du système simultanément.*
2. *Résoudre (S) signifie déterminer toutes les solutions possibles.*
3. *Deux systèmes sont dit équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Exemple 2.1.1 *Le vecteur* $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *est solution du système*

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases},$$

car le vecteur X vérifie les deux équations du système simultanément :

$$\begin{cases} 2 \times 2 - 3 = 1 \\ 5 \times 2 - 2 \times 3 = 4 \end{cases}.$$

Proposition 2.1.1 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit incompatible ou impossible.

2.1.1 Forme matricielle (écriture matricielle)

Le système (S) peut être écrit sous la forme matricielle suivante : $AX = B$ où :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

$X = (x_j)_{1 \leq j \leq p}$: le vecteur des inconnues,

$B = (b_j)_{1 \leq j \leq p}$: le vecteur du second membre,

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$: la matrice des coefficients de (S).

Exemple 2.1.2 *La forme matricielle du système d'équations linéaires suivant :*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ 5x - y + 2z = -7 \\ x + 2y + 6x = 11 \end{cases}$$

est : $AX = B$ *où :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

2.2 Méthodes de résolution

On s'intéresse à la résolution du système (S) dans le cas $n = p$. Dans ce cas le système (S) peut prendre la forme matricielle : $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On distingue deux cas :

I) si $\det(A) = 0$ le système (S) n'a pas de solution ou le système possède une infinité de solutions,

II) si $\det(A) \neq 0$ le système (S) admet une solution unique. On va présenter dans la suite deux méthodes différentes pour calculer cette solution.

2.2.1 Méthode de l'inverse

Cette méthode fait appel à l'inverse de la matrice des coefficients. Comme $\det(A) \neq 0$ implique que la matrice A est inversible (A^{-1} existe) alors on peut calculer la solution comme suit :

$$\begin{aligned} AX = B \quad &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow I_nX = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.1 *Considérons le système :* $\begin{cases} x+3y+4z=50 \\ 3x+5y-4z=2 \\ 4x+7y-2z=31. \end{cases}$.

La forme matricielle du système est :

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = -8 \neq 0$ *donc le système possède une solution unique* $X = A^{-1}B$. *Calculons la matrice inverse* A^{-1} :

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 1 \\ 34 & -18 & 5 \\ -32 & 16 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 18 & 34 & 1 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors $X = A^{-1}B = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 18 & 34 & 1 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$

2.2.2 Méthode de Cramer

Si $\det(A) \neq 0$ le système (S) qui est équivalent à : $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{k})$ possède une solution unique donnée par :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

La matrice A_i est obtenue en remplacant la $i^{ème}$ colonne de A par la colonne du second membre B.

Exemple 2.2.2 *Considérons le système :*
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16. \end{cases} \qquad (S_1)$$
La forme matricielle de (S_1) *est :*

$$AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 26 \neq 0$ *donc* (S_1) *admet une solution unique que l'on peut obtenir par la méthode de Cramer :*

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{26} = 1,$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix}}{26} = -3,$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{vmatrix}}{26} = -2.$$

La solution est donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exemple 2.2.3 *Résoudre* $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$.

La matrice des coefficients est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = 0$ *donc ce système soit possède une infinité de solutions ou n'admet aucune solution. De la première ligne du système on a :*

$$y = 2x - 3.$$

Remplaçant la valeur de y *dans la deuxième ligne nous obtenons :*

$$4x - 2(2x - 3) = 5 \Leftrightarrow 6 = 5,$$

ce qui est impossile. Donc le système n'a pas de solution.

Exemple 2.2.4 *Soit :* $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$.

La matrice des coefficients est $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = 0$. *De la première ligne du système on a :*

$$x = 3y + 1.$$

Remplaçant la valeur de x *dans la deuxième ligne nous obtenons :*

$$3(3y + 1) - 9y = 3 \Leftrightarrow 3 = 3,$$

ce qui est toujours vrai $\forall y \in \mathbb{R}$. *Par la suite ce système possède une infinité de solutions* *données par :*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3y+1 \\ y \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.3 Exercices

Exercise 2.3.1 *Soit le système* (S)*, où* α *est un paramètre réel :*

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 0 \\ \alpha x + (\alpha+1)y + \alpha z = -1 \\ \alpha x + y + z = -2. \end{cases} \qquad (S)$$

1. *Donner la forme matricielle dy système* (S).
2. *Dites pour quelle(s) valeur(s) de* α *le système* (S) *possède une solution unique.*
3. *Résoudre le système* (S) *pour* $\alpha = -1$.

Solution.

1. La forme matricielle $AX = B$ avec :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
2. Le système possède une solution unique si $\det A \neq 0$.

   On a : $\det A = -\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 1 = (1-\alpha)(\alpha^2+1)$ donc $\det A \neq 0$ si $\alpha \neq 1$.
3. Pour $\alpha = -1$, le système devient :
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - z = -1 \\ -x + y + z = -2. \end{cases} \qquad (S)$$

La solution est : $x = 1, y = -1, z = 0$.

Exercise 2.3.2 *Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Cramer :*

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3. \end{cases}$$

Solution. L'écriture matricielle du système est :

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = -7 \neq 0$, donc le système admet une solution unique, donnée par la méthode de Cramer comme suit :

$$x = \frac{\det Ax}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}.$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -\frac{5}{7}.$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = -\frac{1}{7}.$$

Exercise 2.3.3 *Résoudre àl'aide de la méthode de l'inverse le système suivant :*

Exercise 2.3.4
$$\begin{cases} x - z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ y + z = 2m. \end{cases} \qquad (S)$$

Solution. La forme matricielle du système est **:**

$AX = B$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix}.$$

On a : $\det A = 1 \neq 0$, donc notre système possède une solution unique donnée par :

$$X = A^{-1}B.$$

Le calcul de l'inverse A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comA)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m-1 \\ 1-2m \\ 4m-1 \end{pmatrix}.$$