République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA

FACULTÉ des SCIENCES et de la MATIÈRE et de l'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT de PHYSIQUE

Fonctions à Plusieurs Variables

Mathématiques II : Analyse 2 et Algèbre 2

Cours et Exercices Corrigés

Destiné aux étudiants de

Première Année Licence ST & SM

Présenté par

Dr. Leila Slimane

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions à Plusieurs Variables

1.1 Notions de base

On commence par donner la notion d'une norme.

Définition 1.1.1 *Soit E un espace véctoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,

ii) $\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x \in E : \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(homogénéité),*

iii) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.1 *Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de l'une des normes suivantes :*

1. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.
2. $\|x\|_2 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}$.
3. $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$.

Définition 1.1.2 *Une fonction réelle de plusieurs variables est une application :*

$$\begin{aligned} f: \quad & D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 *Les fonctions f et g définies respectivement par :*

$$\begin{aligned} f \quad &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \quad f(x,y) = 4x - 7y + 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g \quad &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto \quad g(x,y,z) = \tfrac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+(z-1)^2}, \end{aligned}$$

sont des fonctions de plusieurs variables.

Définition 1.1.3 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables. Alors :*

– *D est appelé le domaine de définition de la fonction f (l'ensemble de x pour lesquels cette fonction est définie).*

– *L'ensemble $f(D) = \{f(x),\ x \in D\}$ est appelé l'image de D par f.*

– *Si $F \subset \mathbb{R}$, on appelle l'image réciproque de F par f, l'ensemble noté $f^{-1}(F)$ où*

$$f^{-1}(F) = \{x \in D,\ f(x) \in F\}.$$

Exemple 1.1.3 1. *Le domaine de définition de la fonction f définie par :*

$$f(x,y) = 4x - 7y + 1 \text{ est } D_f = \mathbb{R}^2.$$

2. *Soit g la fonction définie par $g(x,y) = \ln(2x - y)$. Alors le domaine de définition de g est :*

   $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 2x\}.$

   D_g est le demi plan situé au dessous de la droite $y = 2x$.

3. *Considérons la fonction h donnée par $h(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Son domaine de définition est donné par :*

   $D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 9\}.$

   Comme $x^2 + y^2 = 9$ est l'équation du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 3$. Le domaine D_h est l'intérieur de ce cercle (le cercle est inclus aussi dans D_h).

1.2 Limites

Dans ce qui suit on munit $\mathbb{R}^n$ d'une normes quelconque des trois normes équivalentes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a sauf peut être en a, et soit $l \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *On dit que la fonction f admet l pour limite au point a si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta, \ \|f(x) - l\| < \varepsilon,$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

On note que $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Dire que $x \to a$ signifie que toutes les coordonnés de x tendent vers les coordonnés de a à la fois et indépendamment ; il y'a une infinité de chemins à parcourir pour faire tendre x vers a. Par exemple en dimension 2, un point (x, y) peut tendre vers $(0, 0)$, d'une infinité de manières, par exemple :

– le long de l'axe horizontal, c'est-à-dire $y = 0$ et $x \to 0$,

– le long de l'axe vertical, c'est-à-dire $x = 0$ et $y \to 0$,

– le long d'une courbe quelconque, par exemple la prabole $y = x^2$.

Remarque 1.2.1 *Les opérations algébriques sur les limites concernant somme, différence, produit, quotient et composition déjà vues dans le cas d'une variables restent valables pour le cas d'une fonction à plusiaurs variables.*

Théorème 1.2.1 *Si une fonction admet une limite en un point alors cette limite est unique.*

On donne quelques remarques sur la limite dans le cas de deux variables.

1. La limite de $f(x, y)$ existe quand (x, y) tend vers (a, b) si elle est indépendante du chemin choisi.

2. Pour montrer qu'une limite n'existe pas il suffit de trouver deux chemins différents qui donnent deux valeurs différentes de la même limite.

3. Si on utilise le changement $y = mx$, où m est un paramètre réel, on obtient que $(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $x \to 0$. Dans ce cas, si on trouve que la limite dépend du paramètre m la limite n'existe pas. Si elle ne dépend pas de m on peut rien conclure.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \neq \lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x, y))$ en général.

5. Le passage en coordonnées polaires : $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ est une technique qui nous aide à déterminer si la limite existe ou n'existe pas quand $(x, y) \to (0, 0)$. En effet $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ et par la suite $(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $r \to 0$. Si la limite existe elle ne doit pas dépendre de θ.

Proposition 1.2.1 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie au voisinage d'un point (a, b), sauf peut être en (a, b), et soit $l \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe et $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$. Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$ existe et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ existe alors :*

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y)) = l = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y)).$$

Exemple 1.2.1 *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}.$$

Passant en coordonnées polaires :

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[.$$

On aura :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^3\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2\cos^3\theta\sin\theta = 0.$$

Donc la limite existe et elle est égale à zéro.

Exemple 1.2.2 *La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas. En effet si on passe en coordonées polaires :*

$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[,$ *on aura :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{5r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} 5\cos\theta\sin\theta = 5\cos\theta\sin\theta.$$

Elle dépend de θ, donc la limite n'existe pas.

Exemple 1.2.3 *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
En utilisant le changement $y = mx$ où m est un paramètre ($(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $x \to 0$) on obtient que :

$$\frac{7x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{7x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{(7-m^2)x^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{(7-m^2)}{(1+m^2)}.$$

Alors on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{(7-m^2)}{(1+m^2)},$$

elle dépend de m donc la limite n'existe pas.

1.3 Continuité

Définition 1.3.1 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a. On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et qu'elle est continue sur D si elle est continue en tout point de D.*

Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple 1.3.1 *Soit $f(x, y) = 3x^2 - 7y + 1$ et $(a, b) = (1, 2)$.*

On a :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} 3x^2 - 7y + 1 = -10 = f(1, 2).$$

Donc f est continue au point $(1, 2)$.

Théorème 1.3.1 *1. La somme et le produit de deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont continues.*

2. *La composée d'une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue.*

Exemple 1.3.2 *Étudier la continuité de la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^2$.

1. *La fonction f est continue si $(x,y) \neq (0,0)$ car la fonction $(x,y) \to x^3 y$ est continue et la fonction $(x,y) \to x^2+y^2$ est continue, donc leur fraction est continue.*

2. *Le cas $(x,y) = (0,0)$. La fonction f est continue en $(x,y) = (0,0)$ si :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

On a $f(0,0) = 0$ et d'après l'exemple 1.2.1 la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} = 0$, donc l'égalité $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ est vérifiée, c'est-à-dire f est continue en $(0,0)$.
Par la suite f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.3.3 *Étudier la continuité de la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est continue quand $(x,y) \neq (0,0)$, car c'est une fonction rationnelle. Quand $(x,y) = (0,0)$ la fonction f est discontinue en $(0,0)$ puisque d'après l'exemple 1.2.1 la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ n'existe pas. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$.

1.4 Dérivées partielles

Définition 1.4.1 *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle première (ou d'ordre 1) par rapport à la variable x_i au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$ si la fonction d'une seule variable $x_i \mapsto f(a_1, a_2, \cdots, x_i, a_{i+1,} \cdots a_n)$ admet une dérivée en a_i. Autrement dit, la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, est défnie par :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_i + h, a_{i+1,} \cdots a_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_i, a_{i+1,} \cdots a_n)}{h}$$

si cette limite existe.

Dans le cas d'une fonction à deux variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a deux dérivées partielles au point (α, β) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta)}{h} \qquad \text{(dérivée partielle suivant } x\text{)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha, \beta + h) - f(\alpha, \beta)}{h} \qquad \text{(dérivée partielle suivant } y\text{)}.$$

On peut les notées aussi par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \partial_x f \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \partial_y f.$$

Remarque 1.4.1 *Afin d'évaluer la dérivée partielle par rapport à x_i, il suffit de dériver en x_i l'éxpréssion de f en traitant les autres variables comme des constantes.*

Exemple 1.4.1 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2xy^3 + y\sin(z) + z\cos(4x)$.*

Alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2y^3 - 4z\sin(4x)$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6xy^2 + \sin(z)$,

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y\cos(z) + \cos(4x)$.

Exemple 1.4.2 *Soit :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

– *Si* $(x,y) \neq (0,0)$ *alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5xy}{x^2+y^2}\right) = -5y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5xy}{x^2+y^2}\right) = 5x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

– *Si* $(x,y) = (0,0)$ *il faut passer par la définiton en limite des dérivées partielles afin de déterminer si elles existent ou non. On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Donc les dérivées partielles existent en $(0,0)$ *(malgrè que* f *n'est pas continue en* $(0,0)$ *d'après l'exemple 1.3.3).*

Remarque 1.4.2 *On sait que si une fonction réelle d'une seule variable est dérivable en un point alors elle est continue en ce point, mais ce n'est pas le cas pour une fonction de plusieurs variables : l'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point.*

Définition 1.4.2 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. La fonction* $f : U \to \mathbb{R}$ *est dite de classe* $C^1(U)$ *si toutes les fonctions dérivées partielles existent et elles sont continues sur* U*.*

Proposition 1.4.1 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. Si la fonction* $f : U \to \mathbb{R}$ *est de classe* $C^1(U)$ *alors elle est continue sur* U*.*

1.5 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 1.5.1 *Soit* f *une fonction définie sur un domaine* D *de* $\mathbb{R}^n$*. Supposons que* f *admet une dérivée partielle par rapport à la variable* x_i *au point* $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$*. On dit que* f *admet une dérivée partielle d'ordre* 2*, notée* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$*, au point* a *par rapport à* x_j *et* x_i *si la dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ *admet elle-même une dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ *selon* x_j *:* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$

Dans le cas d'une fonction à deux variables on a :

– $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$ on dérive deux fois par rapport à x,

– $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))$ on dérive une fois par rapport à x, puis une fois par rapport à y.
– $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ on dérive une fois par rapport à y, puis une fois par rapport à x.
– $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ on dérive deux fois par rapport à y.

Les dérivées partielles secondes peuvent être notées par d'autres notations :
– $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_{xx} f = f''_{xx}$,
– $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_{yx} f = f''_{yx}$,
– $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_{xy} f = f''_{xy}$,
– $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_{yy} f = f''_{yy}$.

Exemple 1.5.1 *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction suivante :*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sin(x^2 + xy).$$

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+y)\cos(x^2+xy)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(x^2+xy)$.

Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}((2x+y)\cos(x^2+xy))$$
$$= 2\cos(x^2+xy) - (2x+y)^2\sin(x^2+xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}((2x+y)\cos(x^2+xy))$$
$$= \cos(x^2+xy) - x(2x+y)\sin(x^2+xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(x^2+xy)) \ = \cos(x^2+xy) - x(2x+y)\sin(x^2+y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos(x^2+xy)) = -x^2\sin(x^2+xy).$$

Définition 1.5.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de classe $C^2(U)$ si toutes les fonctions de dérivées partielles d'ordre 2 existent et elles sont continues sur U.*

Théorème 1.5.1 *(de Schwartz) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2(U)$ alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \textit{pour tout } i = 1, \cdots, n \textit{ et } j = 1, \cdots, n \textit{ tels que } i \neq j.$$

1.6 Différentiabilité

Définition 1.6.1 *1. Soit U un ouvert, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in U$. On dit que f est différetiable en a si et seulement si :*

$$\lim_{\|(h_1,h_2,\cdots,h_n)\|\to 0} \frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2, \cdots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n)h_i}{\|(h_1, h_2, \cdots, h_n)\|} = 0.$$

Dans le cas où $n = 2$, l'équation précédente s'écrit :

$$\lim_{\|(h_1,h_2,\cdots,h_n)\|\to 0} \frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2)h_i}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

2. f est dite différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

Définition 1.6.2 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(U)$ et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in U$. On appelle différentielle de f au point a l'application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ notée Df_a telle que :*

$$Df_a : h = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \mapsto Df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n)h_i.$$

Théorème 1.6.1 *Toute application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en un point de U est continue en ce point.*

Remarque 1.6.1 *L'application f peut être continue en a mais pas différentiable en a.*

1.6.1 Différentielle d'ordre supérieur

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^m(U)$, on a :

$$D^{(m)}f = \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(m)} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p h^p k^{m-p} \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}}.$$

Par exemple :

$$Df = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}.$$
$$D^2 f = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$
$$D^3 f = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(U)$, on a :

$$Df = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$D^2 f = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2hl\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2kl\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}.$$

1.7 Intégrales doubles

Les intégrales multiples constituent la généralisation des intégrales dites simples : c'est-à-dire les intégrales d'une fonction d'une seule variable réelle. Dans cette section, nous introduisons

l'intégrale d'une fonction de deux variables, dite intégrale double, et la manière de la calculer. Nous nous limiterons à des domaines ouverts particuliers en dimension 2, ceux dont on peut délimiter la frontière verticalement par deux fonctions continues dans le plan :

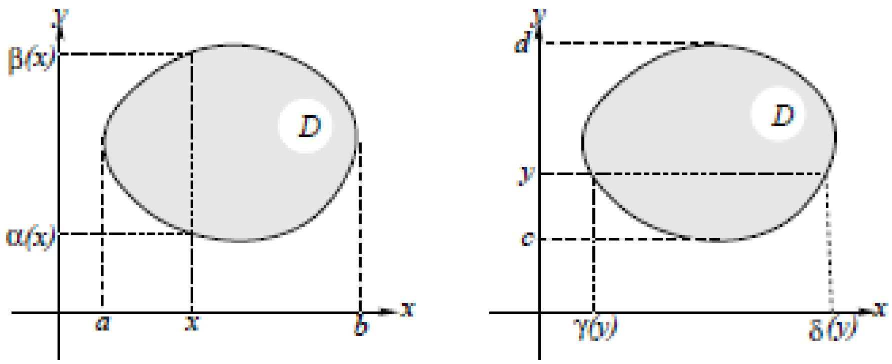
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq x \leq b, \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\right\},$$

où α, β sont deux fonctions continues de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. En général, ce même domaine pourra délémité horizontalement par deux autres fonctions continues :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad c \leq y \leq d, \quad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\right\}.$$

Soit f une fonction continue sur le domaine D. Afin d'évaluer, l'expression
$\displaystyle\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy\right) dx$,en calculant deux intégrales simples :

- En intégrant d'abord par rapport à y entre $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ (x constante). Le résultat est une fonction de x.
- En intégrant cette expression de x entre a et b.



Théorème 1.7.1 (***Théorème de Fubini***)*Sous les hypothèses précédentes, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Définition 1.7.1 *On appelle intégrale double de f sur D la valeur commune des deux expressions :*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Voila un premier exemple dans le cas particulier où D est un rectangle.

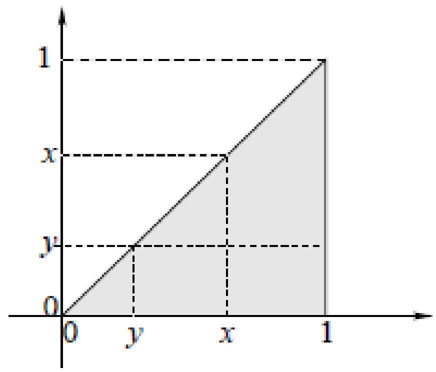
Exemple 1.7.1 *Soit $D =]a,b[\times]c,d[$ et $f(x,y) = xy^2$, alors :*

$$\begin{aligned} \int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d xy^2 dy \right) dx = \int_a^b x \left[\tfrac{y^3}{3} \right]_c^d dx \\ &= \left(\tfrac{d^3}{3} - \tfrac{c^3}{3} \right) \int_a^b x dx = \left(\tfrac{d^3}{3} - \tfrac{c^3}{3} \right) \left[\tfrac{x^2}{2} \right]_a^b \\ &= \left(\tfrac{d^3}{3} - \tfrac{c^3}{3} \right) \left(\tfrac{b^2}{2} - \tfrac{a^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Exemple 1.7.2 *Soit :*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x \right\}.$$

On remarque que la région D est un triangle. Considérons : $f(x,y) = xy^2$.



Alors :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy^2 dy\right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \int_0^1 x\left(\frac{x^3}{3}\right) dx = \left[\frac{x^5}{15}\right]_0^1 = \frac{1}{15}.$$

Exemple 1.7.3 *La région D peut être représentée d'une deuxième manière :*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < 1,\ y < x < 1\}$$

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_y^1 xy^2 dx\right) dy = \int_0^1 y^2 \left(\int_y^1 xdx\right) dy \\ &= \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1 dy = \int_0^1 y^2\left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right)dy = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{15}.\end{aligned}$$

Proposition 1.7.1 *Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)dy\right) dx = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy.$$

Exemple 1.7.4 *Calculer :*

$$\int_0^3\int_0^1 2xe^{x^2+y}dxdy = \int_0^1 2xe^x dx \int_0^3 e^y dy = \left[e^{x^2}\right]_0^1 [e^y]_0^3 = (e-1)(e^3-1).$$

Remarque 1.7.1 *Parmi les applications de l'intégrale double on trouve le calcul des aires et des volumes.*

Proposition 1.7.2 *Soit D, D' deux régions de $\mathbb{R}^2$ et f, g deux fonctions continues.*

1. $\displaystyle\iint_D (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x,y)dxdy = \lambda_1 \iint_D f(x,y)dxdy + \lambda_2 \iint_D g(x,y)dxdy, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$
2. $\displaystyle\iint_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D'} f(x,y)dxdy.$

3. *On a :*
$\left|\int\int_{D\cup D'} f(x,y)dxdy\right| \leq \int\int_{D\cup D'} |f(x,y)|\, dxdy.$
4. *Si $f(x,y) \geq 0$ en tout point de D, alors :*

$$\int\int_{D} f(x,y)dxdy \geq 0.$$

5. Si $\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \leq g(x,y),$ *alors :*

$$\int\int_{D} f(x,y)dxdy \leq \int\int_{D} g(x,y)dxdy.$$

6. *L'intégrale double* $\int\int_{D} 1dxdy = A(D)$ *l'aire de* D.
7. *Si* $m \leq f(x,y) \leq M$ *pour tout* $(x,y) \in D$, *alors :*
8.

$$mA(D) \leq \int\int_{D} f(x,y)dxdy \leq MA(D).$$

Comme la parité facilite le calcul des intégrales simples, elle le facilite aussi dans le cas des intégrale doubles.

Supposons que la région D est symétrique par rapport à l'axe des y.
– Si f est impaire par rapport à x $(f(-x,y) = -f(x,y))$ alors $\int\int_{D} f(x,y)dxdy = 0.$
– Si f est paire par rapport à x $(f(-x,y) = f(x,y))$ alors :

$$\int\int_{D} f(x,y)dxdy = 2\int\int_{\substack{\text{la moitiée}\\ \text{droite de } D}} f(x,y)dxdy.$$

Supposons maintenant que la région D est symétrique par rapport l'axe des x.
– Si f est impaire par rapport à y $(f(x,-y) = -f(x,y))$ alors $\int\int_{D} f(x,y)dxdy = 0.$
– Si f est paire par rapport à y $(f(x,-y) = f(x,y))$ alors :

$$\int\int_{D} f(x,y)dxdy = 2\int\int_{\substack{\text{la moitiée}\\ \text{supérieure de } D}} f(x,y)dxdy.$$

1.7.1 Changement de variable

Considérons une fonction continue sur le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ fermé, borné et en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe C^1 :

$$(u,v) \to \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(x(u,v),y(u,v))Jdudv,$$

où J, appelé jacobien, est le déterminant :

$$J = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{vmatrix}$$

Exemple 1.7.5 *Trouver l'intégrale double :* $\int\int_D \frac{y}{x} dxdy$ *où la région* D *est donnée par :*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \leq 2x, \quad x \leq y^2 \leq 2x\right\}.$$

On utilise le changement de variable suivant : $u = x/y$ *et* $v = y^2/x$.

On obtient que $x = u^2 v$ *et* $y = uv$. *Afin de trouver la nouvelle région, on note que :*

$$x \leq y \leq 2x \Rightarrow u \leq 1 \leq 2u \Rightarrow 1/2 \leq u \leq 1.$$

$$x \leq y^2 \leq 2x \Rightarrow 1 \leq v \leq 2.$$

Ainsi le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est en bijection avec le domaine

$$\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad 1/2 \leq u \leq 1, \quad 1 \leq v \leq 2\right\}$$

au moyen des fonctions de classe C^1 :

$$(u,v) \to \begin{pmatrix} u^2 v \\ uv \end{pmatrix}.$$

Le jacobien est $J = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 v.$

Donc :

$$\int\int_D \frac{y}{x} dxdy = \int\int_\Delta \frac{1}{u} u^2 v dudv = \int_{1/2}^{1}\int_{1}^{2} uvdvdu = \frac{9}{16}.$$

Cas des coordonnées polaires

Le changement de variables en coordonnées polaires est présenté par :

$$x = a + r\cos\theta, \qquad y = b + r\sin\theta, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$J = \begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Exemple 1.7.6 *Evaluons* $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ *où la région* D *est donnée par :*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$$

.

On remarque que la région D *(qui est l'intérieur du cercle de rayon* a *et de centre* $(0,0)$*) et la fonction* $\sqrt{x^2+y^2}$ *sont mieux représentées par les coordonnées polaires, sachant que* $r = \sqrt{x^2+y^2}$. *Donc* $x^2 + y^2 \leq a^2$ *donne que* $0 \leq r \leq a$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Alors :

$$\Delta = \{(r,\theta), \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^a rrdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2dr = 2\pi\frac{a^3}{3}.$$

1.8 Intégrales triples

Théorème 1.8.1 *(**Théorème de Fubini**) Soient D un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et h, k deux applications continues de D dans $\mathbb{R}$ et :*

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in D,\ h(x, y) \leq z \leq k(x, y)\right\}$$

un fermé borné de $\mathbb{R}^3$, et soit :

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

Alors on a :

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \int\int_{D} (\int_{h(x,y)}^{k(x,y)} f(x, y, z)dz)dxdy.$$

Remarque 1.8.1 *(**Cas particulier**) Si Ω est défini par :*

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ n \leq z \leq m\}$,

Alors :

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \int_{n}^{m} \left(\int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x, y, z)dx\right) dy\right) dz.$$

On note que l'intégrale triple $\int\int\int_{\Omega} 1dxdydz = vol(\Omega)$ est le volume de Ω.

1.8.1 Changement de variables

Soient :

$$f : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z),$$

une fonction continue sur le borné fermé Ω inclus dans un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ et soient D un borné fermé inclus dans un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et $\Psi : U \to V$ est une application bijective et de calsse C^1 telle que $\Psi(D) = \Omega$.

Théorème 1.8.2 *Considérons le changement variables suivant :*

$$(u,v,w) \to \Psi(u,v,u) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

Soit $J(u,v,u)$ le jacobien de Ψ en un point quelconque de U défini par :

$$J(u,v,u) = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{vmatrix}.$$

Alors on a :

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_D f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J(u,v,u)|\,dudvdw.$$

Passage en coordonnées cylindriques

$$x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta \ \textbf{et}\ z = z.$$

La formule de changement s'écrie dans ce cas :

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz.$$

Exemple 1.8.1 *On cherche à évaluer l'intégrale triple suivante :*

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx.$$

On remarque qu'on intègre sur la région :

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ -2 \le x \le 2,\ \text{-}\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ \ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}.$$

En exprimant cette région en coordonnées cylindriques on trouve :

$$D = \{(\rho, \theta, z);\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 2,\ \rho \le z \le 2\}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx &= \int\int\int_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_\rho^2 \rho^2\rho dzd\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3(2-\rho)d\rho = 2\pi\left[\tfrac{1}{4}\rho^4 - \tfrac{1}{5}\rho^5\right]_0^2 = \tfrac{16\pi}{5}.\end{aligned}$$

Passage en coordonnées sphériques :

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \ \textbf{et}\ \ z = \rho\cos\varphi.$$

La formule de changement s'écrit dans ce cas :

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{D} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)d\rho d\theta d\varphi.$$

1.9 Exercices

Exercise 1.9.1 *Déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes :*

a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}$, *b)* $g(x,y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$.

Solution.

a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -y + x^2 \ge 0 \text{ et } y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \le x^2 \text{ et } y > 0\}.$

b) $Dg = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y \text{ et } y > 0\}.$

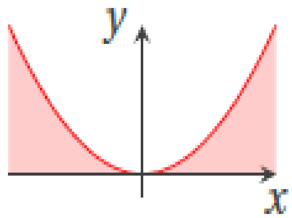


FIG. 1.1 – Domaine de f

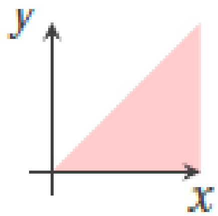


FIG. 1.2 – Domaine de g

Exercise 1.9.2 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x \ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}.$$

Calculer, si elle existe, la limite de f si (x,y) tend vers $(0,0)$.

Solution. Pour $m \neq 0$, On a $f(x,mx) = \frac{x\ln(1+x^3)}{mx^3(1+m^2)} = \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \frac{x}{m(1+m^2)}$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Mais $f(x,x^2) = \frac{x\ln(1+x^3)}{x^2(x^2+x^4)} = \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \frac{1}{(1+x^2)}$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Donc la limite n'existe pas.

Exercise 1.9.3 *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction suivante :*

$$f(x,y) = \cos(2x) - x^2 e^{5y} + 3y^2.$$

Solution. *On commence par calculer les premières dérivées partielles :*

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\sin(2x) - 2xe^{5y}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -5x^2 e^{5y} + 6y$.

Calculons maintenant les dérivées partielles d'ordre 2 :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4\cos(2x) - 2e^{5y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -25x^2 e^{5y} + 6$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -10xe^{5y}$.

Exercise 1.9.4 *Soit f la fonction donnée par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) *Montrer que f possède des dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.*

2) *Que pouvez-vous déduire des calculs de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?*

Solution. Si $(x,y) \neq (0,0)$ la fonction f est la composée des fonctions dérivables autant du fois que l'on veut, donc f possède des dérivées partielles secondes en (x,y).

Si $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h} = -1.$$

On remarque que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Donc, le théorème de Shwarz permet de conclure que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

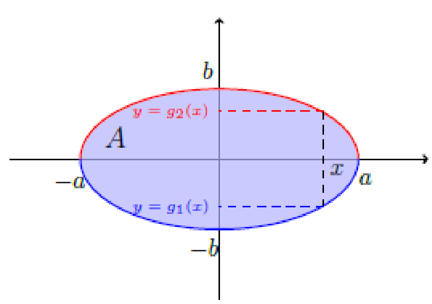


FIG. 1.3 – La région A

Exercise 1.9.5 *Calculer l'aire du domaine A délimité par l'ellipse centrée en $O = (0,0)$ d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$.*

Solution. On peux représenter le domaine :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

comme suit :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ -a \leq x \leq a, \qquad -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}.$$

Donc :

$$Aire(A) = \int\int_A 1dxdy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\right)dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

En prenant le changement de variable $x = a\sin t$ on trouve que
$Aire(A) = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) = \pi ab.$

Exercise 1.9.6 *Calculer :* $\displaystyle\int\int_D \sin(x^2+y^2)dxdy$ *où* D *est la région du plan :* $x^2+y^2 \leq a^2$.

Solution. On utilise les coordonnées polaires (r,θ). Comme D est la région intérieure du cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, elle devient :

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \ 0 \leq r \leq a, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$

Donc :

$$\int\int_D \sin(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\sin(r^2)drd\theta = \pi - \pi\cos a^2.$$

Exercise 1.9.7 *Calculons le volume de l'ensmble :*

$$V = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3, \ x+y+z \leq 1\right\}.$$

Solution. Le volume $vol(V)$ de V est l'intégrale de la fonction constante $f(x) = 1$ sur l'ensemble V. On a :

$$vol(V) = \int\int\int_V 1dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dy\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

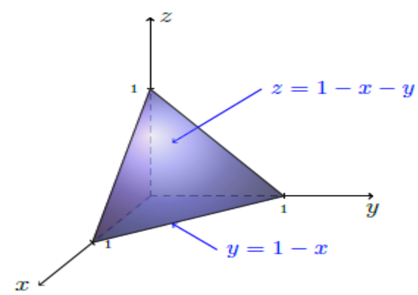


FIG. 1.4 – La région V