République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA

FACULTÉ des SCIENCES et de la MATIÈRE et de l'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT de PHYSIQUE

Les Équations Différentielles

Mathématiques II : Analyse 2 et Algèbre 2

Cours et Exercices Corrigés

Destiné aux étudiants de

Première Année Licence SM & ST

Présenté par

Dr. Leila Slimane

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Les Équations Différentielles

L'objet de ce chapitre est de présenter certains types d'équations différentielles ordinaires (E.D.O) du premier et second ordre ainsi que leurs techniques de résolution.

1.1 Équations différentielles ordinaires

On commence par introduire quelques définitions et notions générales concernant les équations différentielles.

Définition 1.1.1 *Une équation différentielle ordinaire (E.D.O) d'ordre n est une relation entre une fonction inconnue $y(x)$ d'une seule variable réelle x, ses dérivées $y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ et la variable indépendante x de la forme :*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (E)$$

(où tout simplement $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$) où F est une fonction continue.

- L'ordre n de l'équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée apparaissant dans l'équation.
- L'équation différentielle est dite ordinaire si elle comporte une seule variable indépendante.
- Si la fonction y est à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) est dite scalaire.

– Si la fonction y est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, l'équation (E) est dite vectorielle.

Exemple 1.1.1 *1.* $x^3y'+y^2-7=0$ *est une équation différentielle ordinaire du premier ordre.*

2. $y''+(5x^6+8)y'-5y=x$ *est une équation différentielle ordinaire du second ordre.*

3. $y^{(4)}+(7\sin x)y'+x^3y^2=0$ *est une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre.*

Définition 1.1.2 *On appelle solution de (E) sur I, ou intégrale de (E) sur I, toute fonction φ définie sur un intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n et telle que :*

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0.$$

Résoudre (E) sur I, c'est trouver l'ensemble de ses solutions sur I. Une équation pouvait posséder une infinité de solutions.

Cas particulier : $y'=f(x)\Rightarrow y=\int f(x)dx.$

Les solutions de cette équation sont les primitives de la fonction f.

Définition 1.1.3 *Toute solution d'une équation différentielle ordinaire, sous forme explicite ou implicite est appelée* ***courbe intégrale*** *de cette équation. Les courbes intégrales d'une équation différentielle représentent ainsi les graphes des solutions de cette équation.*

Exemple 1.1.2 *1. Soit l'équation différentielle :* $y'=2xy+4x$. *La fonction* $y=k\exp(x^2)-2$ *est bien une solution sur* $\mathbb{R}$, *pour tout* $k\in\mathbb{R}$. *En effet on a :* $y'=2kx\exp(x^2)$, *d'autre part :*

$$2xy+4x=2x(k\exp(x^2)-2)+4x=2kx\exp(x^2)=y'.$$

2. L'équation différentielle $x^2y''-2y+2x=0$ *admet la fonction* $y(x)=kx^2+x$ *comme solution pour tout* $k\in\mathbb{R}$. *En effet,* $y'(x)=2kx+1$ *et* $y''(x)=2k$. *Remplaçant dans l'équation :* $x^2y''-2y+2x=0$ *on obtient :*

$$2kx^2-2(kx^2+x)+2x=0\Leftrightarrow 0=0.$$

Définition 1.1.4 *Deux équations différentielles :*

$F_1(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$ *et* $F_2(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$ *sont dites équivalentes sur un intervalle ouvert* $I \subset \mathbb{R}$ *si toute solution de l'une d'elles est solution de l'autre et inversement.*

Il nous arrivera souvent au lieu d'étudier une équation différentielle, on étudie une autre qui lui équivalente.

Définition 1.1.5 *Considérons l'équation différentielle* (E) *où la fonction* F *est continue sur un domaine* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *et soit un point* $(x_0, y_0, y_1 \cdots, y_{n-1})$ *de* $D \cap \mathbb{R}^n$*. On appelle problème de la condition initiale de l'équation différentielle* (E) *la recherche d'une solution* $y = \varphi(x)$ *de cette équation vérifions les conditions :*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

appelées conditions initiales.

On note qu'il faut s'habituer au changement de nom pour les fonctions et les variables. Par exemple $x''(t) + (t+2)x' + (\cos t)x^3 = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2 dont l'inconnue est une fonction x, qui dépend de la variable t.

Remarque 1.1.1 *La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentalle. Si l'intervalle change, la solution peut changer aussi. Par exemple sur* $I_1 =]0, +\infty[$ *l'équation différentielle* $y' = \frac{1}{x}$ *admet comme solution* $y = \ln x + k$*. Alors que sur l'intervalle* $I_2 =]-\infty, 0[$*, la solution générale est* $y = \ln(-x) + k$*. Si on précise pas l'intervalle I, on considère qu'il sagit de* $\mathbb{R}$*.*

1.2 Équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une équation du type :

$$F(x,y,y') = 0 \Leftrightarrow y' = f(x,y).$$

On a les types suivants :

1. Équations à variables séparables : $f(y)y' = g(x)$.
2. Équations homogènes $y' = f(\frac{y}{x})$.
3. Équations linéaires : $y' + f(x)y = g(x)$.
4. Équations différentielles de Bernoulli : $y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

1.2.1 Équations à variables séparables

Une équation différentielle est dite à variables séparables si on peut l'écrire sous la forme :

$$f(y)y' = g(x).$$

On a :

$$y' = \tfrac{dy}{dx} \Rightarrow f(y)y' = g(x) \Leftrightarrow f(y)dy = g(x)dx.$$

On intègre alors chacun des cotés :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Exemple 1.2.1 *Considérons l'équation différentielle :* $\sqrt{1-x^2}y'y^2 = 1$.

Elle est équivalente à :

$$y'y^2 = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

qui est une équation à variables séparables. En intégarant on trouve :

$$\int y^2 dy = \int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \arcsin x + C$$

$$y = \sqrt[3]{3\arcsin x + 3C}.$$

Exemple 1.2.2 *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y' = \frac{6x^2}{2y + \cos y} \tag{1.1}$$

et trouver la solution qui vérifie la condition initiale $y(1) = \pi$.

L'équation (1.1) *est équivalente à :*

$$\begin{aligned} &(2y + cosy)dy = 6x^2dx \\ &\int (2y + cosy)dy = \int 6x^2dx \\ &y^2 + \sin y = 2x^3 + C. \end{aligned}$$

La solution est donnée d'une manière implicite.

La condition initiale est $y(1) = \pi$, *on remplace* $x = 1$ *et* $y = \pi$ *dans l'équation ci-dessus on trouve :*

$$\pi^2 + \sin \pi = 2 + C \Rightarrow C = \pi^2 - 2.$$

Par la suite la solution est donnée implicitement par :

$$y^2 + \sin y = 2x^3 + \pi^2 - 2.$$

1.2.2 Équations homogènes

Définition 1.2.1 *Une équation différentielle est dite homogène si on peut l'écrire sous la forme suivante :*

$$y' = f(\tfrac{y}{x}).$$

Afin de résoudre ce type d'équations, on pose : $z = \frac{y}{x}$, soit $y = zx$ et $y' = z'x + z$.

Donc :

$$y' = f(\tfrac{y}{x}) \Leftrightarrow xz' = f(z) - z.$$

Cette équation différentielle est une équations différentielle à variables séparables.

On chercher à résoudre l'équation suivante :

$$\int \tfrac{dz}{f(z)-z} = \int \tfrac{1}{x}dx.$$

Exemple 1.2.3 *Considérons l'équation homogène suivante :*

$$y' = \exp(\tfrac{y}{x}) + \tfrac{y}{x} \qquad (E)$$

Passons aux changement de variables :

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = z + xz'.$$

Remplaçant en (E) *on obtient :*

$$z + xz' = \exp(z) + z \Rightarrow xz' = \exp(z) \Rightarrow z' \exp(-z) = \frac{1}{x}.$$

En intégrant on trouve : $\int \exp(-z)dz = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow -\exp(-z) = \ln|x| + C$,

ce qui est équivalent à : $\exp(-z) = \ln \frac{K}{|x|}$. *Par la suite :*

$$y = -x\ln(\ln \frac{K}{|x|}), \qquad K > 0.$$

1.2.3 Équations différentielles linéaires

Nous nous intéréssons ici aux équations différentielles ordinaires linéaires.

Définition 1.2.2 *Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle s'écrit de la forme :*

$$y' + f(x)y = g(x),$$

(i.e. elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y *et par rapport à sa dérivée* y'*) où* f *et* g *sont des fonctions réelles définies et continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

Équations différentielles linéaires homogènes

Définition 1.2.3 *Soit* f *une fonction réelle continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*. Une équation différentielle du premier ordre homogène est une équation différentielle de la forme :*

$$y' + f(x)y = 0. \qquad (E_H)$$

Remarque 1.2.1 *La fonction nulle est solution de l'équation différentielle du premier ordre homogène* (E_H).

L'ensemble S_H des solutions de l'équation différentielle (E_H) sur I est donné par :

$$S_H = \{y, \text{ tel que } y(x) = C\exp(-F(x)),\ C \in \mathbb{R}\}$$

où F désigne une primitive de f sur I *i.e.* :

$$F(x) = \int f(x)dx, \qquad y(x) = C\exp(-\int f(x)dx).$$

Exemple 1.2.4 *Soit l'équation différentielle homogène du premier ordre :*

$$y' + \tfrac{5}{1+x^2}y = 0. \qquad (E_H)$$

On a : $(E_H) \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{1+x^2}y \Leftrightarrow y = C\exp(-\int \frac{5}{1+x^2}dx)$

$$\Leftrightarrow y = C\exp(-5\arctan x).$$

Donc :

$$S_H = \{y, \textit{ tel que } y(x) = C\exp(-5\arctan x), \;\; C \in \mathbb{R}\}.$$

Équations différentielles linéaires non-homogènes

Considérons l'équation différentielle linéaire non-homogène :

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (E).$$

On appelle équation différentielle homogène (E_H) associée à (E) l'équation :

$$y' + f(x)y = 0. \qquad (E_H).$$

Proposition 1.2.1 *Soient y_P une solution particulière sur I de l'équation différentielle linéaire (E) et (y_H) les solutions de l'équation différentielle (E_H) sur I. L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle (E) sur I est donné par :*

$$S = \{y, \;\; y = y_H + y_P\}.$$

Exemple 1.2.5 *Considérons l'équation :* $y' - xy = -x^3 \quad (E')$.

Vérifions que $y_p = x^2 + 2$ est une solution particulière de (E') et déduisons les solutions de (E').

On a $y'_P = 2x$, remplaçant dans (E') on trouve :

$$2x - x(x^2 + 2) = -x^3.$$

Donc y_P est bien une solution particulière de (E').

L'équation homogène associé à (E') est :

$$y' - xy = 0$$

Ses solutions sont de la formes : $y_H = C\exp(\frac{1}{2}x^2)$.

Par la suite les solutions de (E') *sont :*

$$y = y_P + y_H = x^2 + 2 + C\exp(\tfrac{1}{2}x^2).$$

Méthode de la variation de la constante

Nous cherchons une solution particulière de (E) :

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (E)$$

sous la forme $y_P(x) = \lambda(x)\exp(-F(x))$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$. Ainsi $\lambda(x)$ doit vérifier :

$$\lambda'(x)\exp(-F(x)) + \lambda(x)(-F'(x))\exp(-F(x)) + f(x)\lambda(x)\exp(-F(x)) = g(x)$$

Comme $F'(x) = f(x)$, l'équation précédente est équivalente à :

$$\lambda'(x)\exp(-F(x)) = g(x) \Rightarrow \lambda'(x) = g(x)\exp(F(x)) \Rightarrow \lambda(x) = \int g(x)\exp(F(x))dx.$$

Une solution particulière de l'équation (E) est alors :

$$y_P(x) = \exp(-F(x))\int g(x)\exp(F(x))dx.$$

Les solutions générales de l'équation différentielle sont :

$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \lambda\exp(-F(x)) + \exp(-F(x))\int g(x)\exp(F(x))dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$,

ou :

$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \lambda\exp(-\int f(x)dx) + \exp(-\int f(x)dx)\int g(x)\exp(\int f(x)dx)dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.2.6 *Considérons l'équation :* $y' = 2y + x \quad (1)$.

L'équation homogène associée est $y' = 2y$ *dont la solution générale est :* $y(x) = \lambda\exp(2x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Cherchons une solution particulière sous la forme :* $y_P(x) = \lambda(x)\exp(2x)$. *Alors*

$y_p(x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\lambda'(x)\exp(2x) = x$. On doit trouver une primitive $\lambda(x)$ de $x\exp(-2x)$

En intégrant par parties on trouve :

$$\lambda(x) = \int x\exp(-2x)dx = -\tfrac{1}{4}e^{-2x}\left(2x+1\right).$$

Par la suite : $y_P(x) = -\frac{1}{4}\left(2x+1\right)$.

Donc, la solution générale de (E) est :

$$y(x) = -\tfrac{1}{4}\left(2x+1\right) + \lambda\exp(2x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2.2 *Dans le cas d'une équation de la forme :*

$$y' + ay = b \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0.$$

Les solutions sont : $y = C\exp(-ax) + \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}$.

1.2.4 Équations différentielles de Bernoulli

Définition 1.2.4 *On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle de la forme :*

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\},$$

où f et g sont des fonctions continues.

On remarque que si $\alpha = 0$, l'équation de Bernouli n'est qu'une équation linéaire avec second membre :

$$y' + f(x)y = g(x),$$

et si $\alpha = 1$ l'équation est équivalente à l'équation linéaire sans second membre :

$$y' + (f(x) - g(x))y = 0.$$

Afin de résoudre l'équation de Bernoulli si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ on l'a ramène avec un changement de variable adéquat à une équation différentielle linéaire avec un second membre.

On a :

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha \Rightarrow y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x). \tag{1.2}$$

Posons : $z = y^{1-\alpha}$. Par la suite : $z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$.

Substituons dans l'équation (1.2) on obtient :

$$z' + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x).$$

On constate que l'équation précédente est linéaire, simple à résoudre par la méthode de variations des constantes.

Exemple 1.2.7 *Résoudre l'équation de Bernoulli suivante :*

$$y' - xy = xy^3. \tag{1.3}$$

On remarque que : $f(x) = -x$, $g(x) = x$ *et* $\alpha = 3$.

Si on divise par y^3 *on aura :*

$$\frac{y'}{y^3} - x\frac{1}{y^2} = x$$

On pose $z = \frac{1}{y^2}$ *ce qui donne* $z' = -\frac{2y'}{y^3}$. *Alors l'équation* (1.3) *devient :*

$$z' + 2xz = 2x. \tag{1.4}$$

La résolution de (1.4) *donne :*

$$z = 1 + Ce^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (1.3) *est donnée par :*

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{z}} = \sqrt{\frac{1}{1+Ce^{-x^2}}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

1.3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 1.3.1 *Une équation diférentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants est une équation de la forme :*

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *et* g *est une fonction continue sur un intervalle* I*.*
L'équation :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

est appelée l'équation homogène associée à (E)*.*

Théorème 1.3.1 *L'ensemble des solutions de l'équation homogène* (E_0) *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 2*.*

1.3.1 Résolution de l'équation homogène

On cherche une solution de (E_0) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On a : $ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0.$

Définition 1.3.2 *L'équation* $ar^2+br+c = 0$ *est appelée l'équation caractéristique associée à* (E_0) *et* $\triangle = b^2 - 4ac$ *est appelé le discriminant caractéristique associé à* (E_0)*.*

Théorème 1.3.2 *1. Si* $\triangle > 0$*, l'équation caractéristique possède deux racines réelles* *distincts* $r_1 \neq r_2$ *et les solutions de* (E_0) *sont :*

$$y(x) = \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x), \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. *Si* $\triangle = 0$, *l'équation caractéristique admet une racine double* r_0 *et les solutions sont :*

$$y(x) = (\lambda + \mu x) \exp(r_0 x) \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. *Si* $\triangle < 0$, *l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjugués* $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ *et les solutions de* (E_0) *sont :*

$$y(x) = \exp(\alpha x)(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)), \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.3.1 1. *Considérons l'équation différentielle :*

$$y'' - 5y + 6y = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$, *elle possède deux racines réelles distincts* $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. *Donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la solution est :*

$$y(x) = \lambda \exp(2x) + \mu \exp(3x), \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. *L'équation caractéristique de l'équation :*

$$y'' - 6y + 9y = 0$$

est $r^2 - 6r + 9 = 0$. *Le discriminant est nul* $\triangle = 0$, *donc on a une racine réelle double* $r_0 = 3$ *et par la suite les solutions sont :*

$$y(x) = (\lambda + \mu x) \exp(3x) \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. L'équation caractéristique de l'équation :

$$y'' - 2y + 5y = 0$$

est $r^2 - 2r + 5 = 0$. *On a* $\triangle < 0$ *, elle possède deux racines complexes conjugués* $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$ *et par la suite les solutions sont :*

$$y(x) = \exp(x)(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)), \qquad \textit{où} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1.3.2 Équations avec second membre (non-homogène)

Nous traitons maintenant le cas de la présence du second membre g qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E).$$

Proposition 1.3.1 *Les solutions générales de l'équation* (E_0) *s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène à une solution particulière de* (E).

Il reste donc à trouver une solution particulière.

On traite deux cas particuliers importants en donnant une méthode générale :

Second membre de type $\exp(\alpha x)P(x)$ **:**

Si $g(x) = \exp(\alpha x)P(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme, alors on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = x^m \exp(\alpha x)Q(x),$$

où Q est un polynôme de même degré que P avec :

- $y_p(x) = \exp(\alpha x)Q(x)$, $(m = 0)$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique.
- $y_p(x) = x \exp(\alpha x)Q(x)$, $(m = 1)$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique.

– $y_p(x) = x^2 \exp(\alpha x)Q(x), \ \ (m = 2)$ si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Second membre de type $\exp(\alpha x)(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$ **:**

Si

$$g(x) = \exp(\alpha x)(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

et P_1, P_2 des polynômes, alors on cherche une solution particulière sous la forme :

– si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique alors :

$$y_p(x) = \exp(\alpha x)(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)),$$

– si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique. :

$$y_p(x) = x\exp(\alpha x)(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)), si \alpha + i\beta$$

est une racine de l'équation caractéristique.

Dans les deux cas Q_1, Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

Méthode de variation des constantes

Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogène (E_0), on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$ où λ et μ sont deux fonctions vérifiants :

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \frac{g(x)}{a}. \end{cases} \qquad (S)$$

En effet, si $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$ est une fonction qui vérifie (S), on a :

$$y_p' = \lambda' y_1 + \mu' y_2 + \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda y_1' + \mu y_2'.$$

Alors :

$$y_p'' = \lambda' y_1' + \mu' y_2' + \lambda y_1'' + \mu y_2'' = \frac{g(x)}{a} + \lambda y_1'' + \mu y_2''.$$

Remplaçant dans l'équation (E) et en utilisant le fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène (E_0), on trouve :

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = a(\frac{g(x)}{a} + \lambda y_1'' + \mu y_2'') + b(\lambda y_1' + \mu y_2') + c(\lambda y_1 + \mu y_2)$$
$$= g(x) + \lambda(ay_1'' + by_1' + cy_1) + \mu(ay_2'' + by_2' + cy_2) = g(x).$$

Donc y_p est bien une solution particulière de (E). Le système (S) se résout facilement, on trouve λ', μ' puis λ et μ par intégration.

Exemple 1.3.2 *Résoudre l'équation suivante sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ *sont :*

$$y = \lambda \cos x + \mu \sin x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation initiale sous la forme :

$$y_P = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x,$$

où sont deux fonctions à déterminer et qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \frac{g(x)}{a}. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Multiplions la première ligne par $\sin x$ *et la seconde par* $\cos x$*, on obtient :*

$$\begin{cases} \lambda' \sin x \cos x + \mu' \sin^2 x = 0 \\ -\lambda' \sin x \cos x + \mu' \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

En additionant, on obtient que :

$$\mu'(x) = 1.$$

Donc : $\mu(x) = x$. *De la première ligne du système on obtient alors que :*

$$\lambda'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Par conséquent : $\lambda(x) = \ln(\cos x).$

La solution particulière est donc :

$$y_p(x) = \ln(\cos x)\cos x + x\sin x.$$

Ainsi la solution générale est de la forme :

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1.4 Équations différentielles d'ordre deux incomplète

1.4.1 Équations où la fonction n'apparait que par ses dérivées

Dans ce cas l'équation est de la forme $F(x, y', y'') = 0$ (l'absence de y). L'astuce constitué ici à poser $z = y'$, ce qui est équivalent à $F(x, z, z') = 0$, qui est une équation différentielle du premier ordre. On commence d'abord par résoudre $F(x, z, z') = 0$, ce qui donne : $z = f(x, c_1)$ puis on résout $y' = z$, ce qui permet de trouver $y = F(x, C_1) + C_2$.

Exemple 1.4.1 *Considérons l'équation :*

$$(x^2+1)y'' + 2xy' = 0.$$

On constate l'absence de la fonction y. On pose alors $z = y'$.

Alors :

$$\begin{aligned}
(x^2+1)y'' + 2xy' = 0 &\Leftrightarrow (x^2+1)z' + 2xz = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{2x}{x^2+1}\\
&\Leftrightarrow \ln(z) = -\ln(x^2+1) + C\\
&\Leftrightarrow z = \frac{C_1}{x^2+1}\\
&\Leftrightarrow y' = \frac{C_1}{x^2+1}\\
&\Leftrightarrow y = C_1\arctan(x) + C_2.
\end{aligned}$$

1.4.2 Équations où la fonction n'intervient que par sa dérivée seconde

Dans ce cas les équations sont de la forme $F(x, y'') = 0$ (absence de y et y').

Afin de les résoudre, on trouve y'', puis en intégrant deux fois pour obtenir y.

Exemple 1.4.2 *Si on a l'équation différentielle :*

$(1 + x^2)y'' - 5 = 0.$

Alors : $y'' = \frac{5}{1+x^2} \Rightarrow y' = 5 \arctan x + C$

Par intégration par partie on obtient : $y = 5(x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)) + Cx + C_1.$

Exemple 1.4.3 *Considérons l'équation :*

$$xy'' - 1 = 0, \qquad x > 0.$$

Ce qui est équivalent :

$y'' = \frac{1}{x},$

Donc :

$y' = \ln x.$

En intégrant par parties on trouve :

$$y = x \ln x - x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

1.5 Exercices

Exercise 1.5.1 *Vérifier que chaque fonction donnée est une solution de l'équation différentielle correspondante :*

1. $xy' - y = x^2,$ $\qquad y(x) = 3x + x^2.$
2. $2x^2y'' + 3xy' - y = 0,$ $\qquad y(x) = \sqrt{x},\ \ x > 0.$

3. $y' - 2ty = 1,$ $\qquad y(t) = e^{t^2} + e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds.$

Solution.

1. On a $y(x) = 3x + x^2 \Rightarrow y'(x) = 3 + 2x$. En remplaçant dans l'équation :

   $xy' - y = x^2$ on obtient : $x(3 + 2x) - (3x + x^2) = x^2 \Rightarrow x^2 = x^2$.

2. $y(x) = \sqrt{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow y''(x) = \frac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}}$.

   En remplaçant dans l'équation : $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, on trouve :

   $$2x^2(\tfrac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}}) + 3x(\tfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}) - \sqrt{x} = \tfrac{-1}{2}\sqrt{x} + \tfrac{3}{2}\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

3. $y(t) = e^{t^2} + e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds$ alors :

   $$y'(t) = 2te^{t^2} + 2te^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + e^{t^2}e^{-t^2} = 2te^{t^2} + 2te^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + 1.$$

   On remplace dans l'équation : $y' - 2ty = 1$, on obtient :

   $(2te^{t^2} + 2te^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + 1) - 2t(e^{t^2} + e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds) = 1 \Rightarrow 1 = 1$, donc la fonction donnée est bien une solution de l'équation différentielle : $y' - 2ty = 1$.

Exercise 1.5.2 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' - y = (x + 1)e^x,$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

2. $y' - (\tan x)y = \sin x,$ *pour* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3. $(1 + e^x)y' = ye^x$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

4. $2x^2y' = x^2 + y^2$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Solution.

1. Les solutions de l'équation homogène associée :

$$y' - y = 0$$

sont :

$$y(x) = \lambda e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est la fonction :

$$g(x) = (x + 1)e^x.$$

Comme e^x apparait dans les solutions de l'équation homogène on cherche donc une solution particulière de la forme :

$$y_P(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

On a :

$$y'_P(x) - y_P(x) = (x+1)e^x \Rightarrow (2ax+b)e^x = (x+1)e^x.$$

Par identification des coefficients, on trouve que :

$$y_P(x) = (\tfrac{1}{2}x^2 + x)e^x.$$

Les solutions de notre équation initiale sont :

$$y = y_H + y_P = (\tfrac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation homogène associée est :

$$y' - \tan x \; y = 0.$$

Une primitive de :

$$f(x) = -\tan x = -\tfrac{\sin x}{\cos x}.$$

est : $F(x) = \ln|\cos x| = \ln(\cos x)$ car $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Donc la solution générale de l'équation homogène est :

$$y(x) = C\exp(-F(x)) = C\exp(-\ln(\cos x)) = \frac{C}{\cos x}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière y_P qui vérifie :

$$y'_P(x) - \tan x \; y_P(x) = \sin x.$$

Cette solution s'écrit sous la forme :

$$y_P(x) = G(x)\exp(-F(x)) \text{ avec } G(x) \text{ primitive de } \sin x \exp(F(x)) = \cos x \sin x.$$

Par la suite on trouve que :

$$G(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x \qquad \text{et} \qquad y_P(x) = G(x)\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{2\cos x}.$$

La solution générale de notre équation est :

$$y(x) = \frac{C}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{2\cos x} = \frac{\sin^2 x + C'}{2\cos x}.$$

3. La fonction nulle ($y = 0$) est une solution de $(1+e^x)y' = ye^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $y \neq 0$, alors l'équation précédente est équivalente à une équation à variables séparables :

$$\frac{y'}{y} = \frac{e^x}{1+e^x},$$

d'où :

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx.$$

Donc : $\ln|y| = \ln(1+e^x) + K \Rightarrow y = C(1+e^x), \;\; C \in \mathbb{R}^*.$

La solution générale est donc :

$$y = C(1+e^x), \;\; C \in \mathbb{R}.$$

4. Pour $x \neq 0$, l'équation

$$2x^2y' = x^2 + y^2 \qquad (E)$$

est équivalente à :

$$2y' = 1 + \left(\tfrac{y}{x}\right)^2.$$

Une équation de type homogène. Posons $z = \frac{y}{x}$ alors :

$$y = zx \Rightarrow y' = 2(z + xz').$$

Remplaçant dans (E), on trouve :

$$1 + z^2 = 2(z + xz')$$

$$1 + z^2 - 2z = 2xz' \Rightarrow (1-z)^2 = 2xz'.$$

Donc on obtient :

$$\frac{2z'}{(1-z)^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{2}{(1-z)^2} dz = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{2}{(1-z)} = \ln Cx.$$

Par la suite on trouve que :

$$z = 1 - \frac{2}{\ln Cx} \Rightarrow y = x - \frac{2x}{\ln Cx}, \quad \text{avec} \quad Cx \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}.$$

Exercise 1.5.3 *Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de la variation de la constante :*

1. $x(1 + \ln^2 x)y' + 2y \ln x = 1, \quad$ *sur* $]0, +\infty[$.
2. $(x + 1)y' - xy + 1 = 0, \quad y(0) = 2, \quad$ *sur* $] - 1, +\infty[$.

Solution.

1) Comme le coéfficient de y' ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme :

$$y' + \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} y = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

La solution générale de l'équation homogène associée :

$$y' + \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} y = 0.$$

est : $y = C \exp(-F(x))$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{2 \ln x}{x(1+\ln^2 x)}$ et $C \in \mathbb{R}$. On peut prendre $F(x) = \ln(1 + \ln^2 x)$. Donc :

$$y_H = C \exp(- \ln(1 + \ln^2 x)) = \frac{C}{1 + \ln^2 x}.$$

Utilisons la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière pour l'équation non homogène. Posons $y_p = \frac{C(x)}{1+\ln^2 x}$ avec C une fonction dérivable. Posons $z(x) = \frac{1}{1+\ln^2 x}$, donc : $y_p = C(x)z(x)$.

En dérivant et en remplaçant dans l'équation initiale et en prenant en compte que $z(x)$ est solution de l'équation homogène on trouve que :

$$C'(x)z(x) = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \Rightarrow \frac{C'(x)}{1 + \ln^2 x} = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc on peut prendre $C(x) = \ln x$ *i.e.* $y_p = \frac{\ln x}{1+\ln^2 x}$.

La solution générale de notre problème est :

$$y = y_H + y_p = \frac{C}{1+\ln^2 x} + \frac{\ln x}{1+\ln^2 x}, \qquad C \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[.$$

2) L'équation différentielle est équivalente à :

$$y' - \frac{x}{x+1}y = -\frac{1}{x+1}$$

c'est une équation différentielle linéaire d'orde 1 non homogène avec :

$f(x) = -\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1 \quad$ et $\quad g(x) = -\frac{1}{x+1}$.

Une primitive de f est :

$\ln|x+1| - x = \ln(x+1) - x.$

La solution de l'équation homogène est :

$$y_H(x) = \lambda \exp(-\int f(x)dx) = \lambda \exp(-\ln(x+1)+x) = \lambda \frac{\exp(x)}{x+1}.$$

Cette fois on va utiliser directement la formule de la solution particulière donnée dans le cours :

$$y_P(x) = \exp(-\int f(x)dx)(\int g(x)\exp(\int f(x)dx)dx).$$

Comme :

$$\int g(x)\exp(\int f(x)dx)dx = \int -\frac{1}{x+1}\frac{x+1}{\exp(x)}dx = \int -\exp(-x)dx = \exp(-x).$$

Donc :

$y_P(x) = \frac{\exp(x)}{x+1}\exp(-x) = \frac{1}{x+1}$.

La solution générale est donc :

$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \lambda\frac{\exp(x)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$.

Comme :

$$y(0) = 2 \Rightarrow \lambda + 1 = 2 \Rightarrow \lambda = 1.$$

La solution donc est :

$$y(x) = \frac{\exp(x) + 1}{x + 1}.$$

Exercise 1.5.4 *Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :*

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad y(0) = -1.$$

Solution.

L'équation est équivalente à :

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)\, dx$$

qui est une équation à variable séparées. En intégrant :

$$\int 2(y-1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)\, dx,$$

on trouve :

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C \qquad (S).$$

Pour déterminer la solution qui vérifie la condition initiale : $y(0) = -1$.

On remplace $x = 0$ et $y = -1$ dans (S) on obtient $C = 3$.

Donc la solution du problème est donnée implicitement par :

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3.$$

Afin de trouver la solution d'une manière explicite on procède comme suit :

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \Rightarrow\ y^2 - 2y + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4.$$

Alors on obtient que :

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Mais comme $y(0) = -1$ la solution est :

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

qui est bien défini si $x > -2$ (car -2 est la seule racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$).

Exercise 1.5.5 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

1. $y''(x) - y(x) = 0.$
2. $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0.$
3. $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0.$

Solution.

1. L'équation caractéristique de $y''(x) - y(x) = 0$ est :

   $$r^2 - 1 = 0, \;\; \Delta = 4 > 0, \;\; r_1 = -1 \;\text{ et }\; r_2 = +1.$$

   Donc on a deux racines réelles distinctes. Par conséquent la solution générale est donnée par :

   $$y(x) = \lambda \exp(-x) + \mu \exp(x), \;\; x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique de $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$ est :

   $$r^2 + 6r + 9 = 0, \;\; \Delta = 0, \;\; r_0 = -3.$$

   Comme on a une racine réelle double, la solution générale est sous la forme :

   $$y(x) = (\lambda + x\mu) \exp(-3x), \;\; x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. L'équation caractéristique de $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0$ est donnée par :

   $$r^2 + 4r + 13 = 0, \;\; \Delta = -36 < 0, \;\; r_1 = -2 + 3i \;\text{ et }\; r_2 = -2 - 3i.$$

   On a deux racines complèxes conjuguées. La solution générale dans ce cas est :

   $$y(x) = (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x) \exp(-2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercise 1.5.6 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y''(x) + y(x) = \cos x. \qquad (E)$$

Solution.

L'équation donnée est une équation de deuxième ordre non-homogène. Son équation associée est :

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique de cette dernière est :

$$r^2 - 1 = 0, \ \ \Delta = -4 < 0, \ \ r_1 = i \ \text{ et } \ r_2 = -i.$$

Donc on a deux racines complèxes conjugués. La solution générale dans ce cas est :

$$y_H(x) = (\lambda \cos x + \mu \sin x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est : $g(x) = \cos x$. Utilisons la méthode de la variations des constantes et cherchons une solution particulière de la forme :

$$y_p(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \qquad \text{avec } y_1 = \cos x \quad \text{et} \quad y_2 = \sin x$$

qui vérifie :

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \quad \text{ et } \quad C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = g(x). \qquad (S)$$

Remplaçant par :

$$y_p(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

dans (S) et résolvant le système on trouve :

$$C_1(x) = \tfrac{\cos 2x}{4} \qquad \text{et} \quad C_2(x) = \tfrac{\sin 2x}{4} + \tfrac{x}{2}.$$

Une solution particulière est donc :

$$y_p(x) = \frac{\cos 2x}{4} \cos x + (\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}) \sin x = \frac{\cos x}{4} + \frac{x}{2} \sin x.$$

Alors, la solution générale est donnée par :

$$y(x) = \ y_H(x) + y_P(x) = \lambda \cos x + (\mu + \frac{x}{2}) \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercise 1.5.7 *En utilisant le changement de variable* $x = e^t$ *résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$ *sur* $]0, +\infty[$.
2. $x^2y'' + y = 0$ *sur* $]0, +\infty[$.

Solution.

Comme on cherche une fonction de $x \in]0, +\infty[$, et que l'application est bijective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on peut prendre comme changement de variable : $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$. Donc on a :

$$t = \ln x, \quad y(x) = z(lnx), \quad y'(x) = \tfrac{1}{x}z'(\ln x) = e^{-t}z'(t)$$

et
$$y''(x) = -\tfrac{1}{x^2}z'(\ln x) + \tfrac{1}{x^2}z''(\ln x) = -e^{-2t}z'(t) + e^{-2t}z''(t).$$

1. Dans le cas de la première équation, on trouve :

$$x^2y'' + xy' + y = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\Leftrightarrow z''(t) + z(t) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Son équation caractéristique est :

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i.$$

Alors cette dernière équation différentielle possède la solution générale suivante :

$$z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On conclut que la solution de notre problème est :

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x), \quad x \in]0, +\infty[, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation $x^2y'' + y = 0$ devient :

$$x^2y'' + y = 0 \qquad \text{sur }]0, +\infty[\Leftrightarrow z''(t) - z'(t) + z(t) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique de cette dernière est :

$$r^2 - r + 1 = 0 \Rightarrow r = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Les solution de $z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$ sont alors :

$$z(t) = \exp(\frac{t}{2})(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Par la suite la solution de notre problème initiale :

$$y(x) = z(\ln x) = (\sqrt{x}\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)), \quad x \in]0, +\infty[, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercise 1.5.8 *Déterminer la valeur de la constant réelle r pour laquelle l'équation différentielle donnée possède une solution de la forme : $y = t^r$ pour $t > 0$:*

1. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$.
2. $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$.

Solution.

1. On a : $y = t^r \Rightarrow y' = rt^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)t^{r-2}$.

   On remplace dans $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$ on obtient :

   $$r(r-1)t^{r-2}t^2 + 4rt^{r-1}t + 2t^r = 0 \Rightarrow r(r-1)t^r + 4rt^r + 2t^r = 0$$

   ce qui est équivalent à : $(r^2 + 3r + 2)t^r = 0$.

   Par la suite $r^2 + 3r + 2 = 0$ i.e. $r = -1$ ou $r = -2$.

   Alors $y_1(t) = \frac{1}{t}$ et $y_2(t) = \frac{1}{t^2}$ sont solutions de l'équation donnée.

2. Par la même manière que la question précédente on a : $y = t^r \Rightarrow y' = rt^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)t^{r-2}$.

   On remplace dans $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$ on obtient :

   $$r(r-1)t^{r-2}t^2 - 4rt^{r-1}t + 4t^r = 0 \Rightarrow r(r-1)t^r - 4rt^r + 4t^r = 0$$

   ce qui est équivalent à : $(r^2 - 5r + 4)t^r = 0$.

   Par la suite : $r^2 - 5r + 4 = 0$ *i.e.* $r = 1$ ou $r = 4$.

   Alors $y_1(t) = t$ et $y_2(t) = t^4$.

Chapitre 2