République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA

FACULTÉ des SCIENCES et de la MATIÈRE et de l'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT de PHYSIQUE

Primitives et Intégrales

Mathématiques II : Analyse 2 et Algèbre 2

Cours et Exercices Corrigés

Destiné aux étudiants de

Première Année Licence SM & ST

Présenté par

Dr. Leila Slimane

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Primitives et Intégrales

1.1 Primitives et intégrales indéfinies

Dans toute la suite I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$. *On appelle primitive de* f *toute fonction dérivable* F *telle que :* $F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$.

Exemple 1.1.1 *La fonction* $F(x) = x^5$ *est une primitive de la fontion* $f(x) = 5x^4$ *car* $F'(x) = f(x)$.

Définition 1.1.2 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue alors* f *admet une primitive* F *sur* I. *De plus toutes les primitives de* f *sont de la forme* $F(x) + C$ *où* C *est une constante dans* $\mathbb{R}$.

Trouver une primitive est l'opération inverse de la dérivation.

Définition 1.1.3 *L'intégrale indéfinie, notée* $\int f(x)dx$, *est la fonction définie par :*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

où F *est une primitive de* f *c'est-à-dire :* $F'(x) = f(x)$.

Exemple 1.1.2 *On a :* $\displaystyle\int 5x^4dx = x^5 + C$ *et* $\int e^x dx = e^x + C.$

Tables des intégrales indéfinies (primitives) des fonctions usuelles

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad \int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int x^r dx = \tfrac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ r \in \mathbb{R},\ r \neq -1. \qquad \int \tfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \tfrac{a^x}{\ln a} + C,\ \ a > 0.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tfrac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \qquad \int \tfrac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \qquad \int \tfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

Exemple 1.1.3 *Calculer :* $\displaystyle\int \left(\sqrt[5]{x} + 7\tfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$

On a :

$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt[5]{x} + 7\tfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx &= \int \sqrt[5]{x}dx + \int 7\tfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{1}{5}}dx + 7\int \tfrac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}}dx \\ &= \tfrac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C_1 + 7\int x^{\frac{5}{3}}dx = \tfrac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C_1 + \tfrac{21}{8}x^{\frac{8}{3}} + C_2 \\ &= \tfrac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + \tfrac{21}{8}x^{\frac{8}{3}} + C.\end{aligned}$$

1.2 Intégrales définies

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction définie et continue sur l'intevalle $[a, b]$, alors l'intégrale définie de f de a à b est le réel $\int_a^b f(x)dx$ défini par :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f c'est-à-dire : $F'(x) = f(x)$.

Remarque 1.2.1 *Il faut distinguer entre intégrale définie et intégrale indéfinie. Une intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre alors qu'une intégrale indéfine $\int f(x)dx$ est une fonction.*

Exemple 1.2.1 *Evaluons :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. *La fonction* $f(x) = \cos x$ *est continue sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et on sait que sa primitive est* $F(x) = \sin x$. *Donc :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \tfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Propriétés de l'intégrale définie

- $\int_a^b c dx = c(b-a)$.
- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
- Si $f(x) \geq 0$, sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f(x) \geq g(x)$, sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- Si $m \leq f(x) \leq M$, sur $[a,b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Proposition 1.2.1 *On suppose que* f *est continue sur* $[-a, a]$.

- *Lorsque* f *est paire* $(f(-x) = f(x))$, *alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- *Lorsque* f *est impaire* $(f(-x) = -f(x))$, *alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- *Si* f *est une fonction périodique de période* T *alors :*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Exemple 1.2.2 *Claculer* $\int_{-10\pi}^{10\pi} x^4 \sin^3 x dx$ *et* $\int_{-3}^{3} |5x|\, dx$.

Pour la première intégrale, on remarque que la fonction $x^4 \sin^3 x$ *est impaire, donc on déduit que :*

$$\int_{-10\pi}^{10\pi} x^4 \sin^3 x dx = 0.$$

Concernant la deuxième intégrale, on constate que la fonction $|5x|$ *est paire, donc :*

$$\int_{-3}^{3} |5x|\, dx = 2\int_{0}^{3} |5x|\, dx = 10\int_{0}^{3} xdx = 5x^2\Big]_0^3 = 45.$$

1.3 Règles d'intégration

1.3.1 Intégration par changement de variables

Proposition 1.3.1 *Si* $u = g(x)$ *est une fonction dérivable où son ensemble image est l'intervalle* I *et si* f *est une fonction continue sur* I*, alors :*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Le but de cette méthode est de remplacer une intégrale peu difficile par une autre plus facile. La difficulté majeure de cette méthode est de trouver le bon changement de variable. Il faut essayer de choisir u égal à une certaine fonction qui apparait sous le symbole d'intégration et dont la dérivée s'y trouve aussi.

Exemple 1.3.1 *Pour calculer* $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$*, on pose* $u = 1 + x^2$ *et* $du = 2xdx$*. On obtient :*

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Exemple 1.3.2 *Le calcul de* $I = \int \cos^4 x \sin^3 x dx$*. Soit le changement de variable :*
$u = \cos x,\ \ du = \sin x dx$*. On obtient :*

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x dx = \int \cos^4 x \left(1 - \cos^2 x\right) \sin x dx = \int u^4 \left(1 - u^2\right) du \\ &= \int \left(u^4 - u^6\right) du = \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{7}u^7 + C = \tfrac{1}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.2 *Si la fonction* g *et sa derivée* g' *sont continues sur* $[a, b]$ *et si la fonc-*

tion f est continue sur l'esemble $g([a,b])$, alors on a l'égalité :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Exemple 1.3.3 *Evaluons :*

$$J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

Posons :

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx.$$

Par la suite, si $x = 1$ on a : $u = \ln 1 = 0$ et quand $x = e$ on a $u = \ln e = 1$.

Donc : $J = \int_0^1 u du = \left.\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

En utilisant la méthode de changement de variables et la table des primitives des fonctions usuelles on obtient les formules suivantes :

$\int f'(x)f(x)^r dx = \frac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -1$ $\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$ $\quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

$\int f'(x)\sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$ $\quad \int f'(x)\cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$

$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \arctan(f(x)) + C$ $\quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$

$\int f'(x)\sinh(f(x))dx = \cosh(f(x)) + C$ $\quad \int f'(x)\cosh(f(x))dx = \sinh(f(x)) + C$

1.3.2 Intégration par parties

Proposition 1.3.3 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I. Alors :*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Symboliquement, on écrit : $\displaystyle\int u dv = uv - \int v du.$

Remarque 1.3.1 1. *L'intégration par parties n'est efficace que si l'on obtient une intégrale plus simple que l'intégrale initiale.*

2. *Le choix des fonctions doit être judicieux et ce n'est que par la pratique qu'on pourra plus facilement faire ce choix.*

Exemple 1.3.4 *Pour calculer* $\int \arcsin x dx$, *on utilise une itégration par parties où on pose :* $u = \arcsin x$, $dv = dx$ *donc* $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$.

Alors on a :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Des fois on aura besoin de faire appel à l'intégration par parties plusieurs fois.

Exemple 1.3.5 *Evaluons :* $\displaystyle\int x^2 \sin x dx.$

On pose : $u = x^2$, $dv = \sin x dx$ donc $du = 2x dx$, $v = -\cos x$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\int u dv &= uv - \int v du \\ \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx.\end{aligned}$$

Pour calculer la deuxième intégrale on entame une deuxième intégration par parties, avec cette fois $u = 2x$, $dv = \cos x dx$ donc $du = 2dx$, $v = \sin x$. On aura :

$$\int 2x \cos x dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

En remplaçant ce résultat dans l'intégrale initiale on trouve :

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Exemple 1.3.6 *Calculer* $I = \int e^x \sin x dx$. *Posons :* $u = e^x$, $dv = \sin x dx$ *donc* $du = e^x dx$, $v = -\cos x$. *L'intégration par parties nous donne :*

$$I = -\cos x e^x + \int e^x \cos x dx. \tag{1.1}$$

Une deuxième intégration par parties, avec le choix :

$u = e^x$, $dv = \cos x dx$ *donc* $du = e^x dx$, $v = \sin x$, *nous donne :*

$$\int e^x \cos x dx = \sin x e^x - \int e^x \sin x dx. \tag{1.2}$$

Remplaçant (1.2) dans (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} I &= -\cos x e^x + \sin x e^x - I \\ 2I &= -\cos x e^x + \sin x e^x \Rightarrow I = \tfrac{1}{2}\left(-\cos x e^x + \sin x e^x\right). \end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties pour les intégrales définies est donnée par :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left. u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

ou symboliquement, par :

$$\int_a^b u dv = \left. uv\right]_a^b - \int_a^b v du.$$

1.4 Intégration des fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples

Définition 1.4.1 *Une fonction rationnelle f est un rapport de deux polynômes P et Q de degré respectivement m et k :* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

i) Si $\deg(P) = m \geq \deg(Q) = k$ *on dit que f est une fonction rationnelle impropre.*

ii) Si $\deg(P) = m < \deg(Q) = k$ *on dit que f est une fonction rationnelle propre.*

Pour intégrer une fonction rationnnelle on commence par l'exprimer comme une somme de fractions simples appelés éléments simples, dont l'intégration est immédiate.

Première étape : Dans le cas où f est impropre (i.e. $\deg(P) \geq \deg(Q)$) on effectue la division euclidienne de P par Q jusqu'a obtenir un reste $R(x)$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$:

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{1.3}$$

où S et R sont aussi des polynômes. Dans le cas où f est propre ($i.e.$ $\deg(P) < \deg(Q)$) on passe directement à la deuxième étape avec $P(x) = R(x)$.

Deuxième étape :

On factorise le dénominateur $Q(x)$ en un produit de facteurs de la forme $ax + b$ et des facteurs de la forme $x^2 + bx + c$ avec $b^2 - 4c < 0$.

Troisième étape : Exprimer la fonction rationnelle propre $\frac{R(x)}{Q(x)}$ de l'équation (1.3) comme une somme d'éléments simples de la forme :

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^j}.$$

Exemple 1.4.1 *Considérons la fonction rationnelle :*

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

I) En effectuant la division euclidienne on trouve :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

II) On factorise le donimінateur :

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1).$$

III) Comme le facteur $(x-1)$ est présent deux fois, la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Multiplions par le plus petit dominateur commun $(x-1)^2(x+1)$, on trouve :

$$4x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2. \tag{1.4}$$

Posons $x = 1$ dans (1.4) on on obtient : $B = 2$. Posons $x = -1$ on trouve $C = -1$ et finalement si on pose $x = 0$ on déduit que $A = 1$. Alors :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x+1}. \tag{1.5}$$

À l'aide de la décomposition en éléments simples, l'intégrale d'une fonction rationnelle se ramène à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$ ou $\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} dx$, $n \geq 2$, $b^2 - 4c < 0$. On distingue quatre types de ces intégrales :

Type I :

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C.$$

Type II :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1.$$

Type III :

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx,\ b^2-4c<0.$$

On remarque que $x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+(c-\frac{b^2}{4})$. Si on pose :

$y=x+\frac{b}{2}$ et $p^2=c-\frac{b^2}{4}>0$ on trouve :

$$\begin{aligned}\int \tfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx &= \int \tfrac{A(y-\frac{b}{2})+B}{y^2+p^2}dy = A\int \tfrac{y}{y^2+p^2}dy + (B-A\tfrac{b}{2})\int \tfrac{1}{y^2+p^2}dy \\ &= \tfrac{A}{2}\ln(y^2+p^2)+\tfrac{2B-Ab}{2p}\arctan(\tfrac{y}{p})+C \\ &= \tfrac{A}{2}\ln(x^2+bx+p^2)+\tfrac{2B-Ab}{2p}\arctan(\tfrac{2x+b}{2p})+C.\end{aligned}$$

Type IV :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx,\quad b^2-4c<0,\quad n\neq 1.$$

On pose : $y=x+\frac{b}{2}$, on obtient :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx = A\int \frac{y}{(y^2+p^2)^n}dy+\frac{2B-Ab}{2}\int \frac{1}{(y^2+p^2)^n}dy.$$

La première intégrale est facile à calculer :

$$\int \frac{y}{(y^2+p^2)^n}dy=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(y^2+p^2\right)}{(y^2+p^2)^n}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(n-1)(y^2+p^2)^n-1}\right)+C_1.$$

Le calcul de la seconde intégrale nécessite plus de travail. Soit :

$$I_n=\int \frac{dy}{(y^2+p^2)^n}.$$

Intégrons par parties, en posant

$$u=\frac{1}{(y^2+p^2)^n},\ dv=dy \Longrightarrow du=\frac{-2ny}{(y^2+p^2)^{n+1}},\ v=y$$

On trouve :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2n\int \frac{y^2dy}{(y^2+p^2)^{n+1}} = \frac{y}{(y^2+p^2)^n}2n\int \frac{(y^2+p^2-p^2)dy}{(y^2+p^2)^{n+1}} \\
&= \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2n\int \frac{dy}{(y^2+p^2)^n} - 2np^2\int \frac{dy}{(y^2+p^2)^{n+1}} \\
&= \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2nI_n - p^2 I_{n+1}
\end{aligned}$$

Donc :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2np^2}\left(\frac{y}{(y^2+p^2)^n} + (2n-1)I_n\right).$$

Ce qui est équivalent à :

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)p^2}\left(\frac{y}{(y^2+p^2)^{n-1}} + (2n-3)I_n - 1\right).$$

Ceci, nous permet de le calculer d'une manière récurrente, sachant que :

$$I_1 = \frac{1}{p}\arctan\frac{y}{p} + C.$$

Exemple 1.4.2 *Calculer :*

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx.$$

D'après l'exemple 1.4.1, la décomposition en élements simples de $\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}$ *est :*

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-1}{x+1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx &= \int (x+1)dx + \int \tfrac{dx}{x-1} + \int \tfrac{2dx}{(x-1)^2} + \int \tfrac{-dx}{x+1} \\
&= \tfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| - 2\tfrac{1}{x-1} - \ln|x+1| + C.
\end{aligned}$$

Exemple 1.4.3 *Calculer :*

$$J = \int \frac{x+5}{x^2-4x+13}dx.$$

La fonction rationnelle ici est propre, on n'aura pas besoin d'effectuer la division euclidienne. De plus, on remarque que le polynôme $x^2 - 4x + 13$ *est irréductible car* $\triangle = -36 < 0$. *Donc on a une intégrale de type III. On a :*

$$J = \int \frac{x+5}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+7}{x^2-4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx + 7\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + 7\int \frac{dx}{(x-2)^2+9}.$$

Pour évaluer la deuxième intégrale on pose : $x - 2 = 3y,\ \ dx = 3dy$ *on obtient :*

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{3}\arctan y + C = \frac{1}{3}\arctan(\frac{x-2}{3}) + C.$$

Donc :

$$J = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + \frac{7}{3}\arctan(\frac{x-2}{3}) + C.$$

1.5 Intégration des fonctions trigonométriques

1.5.1 Intégrale de type $\int \cos^p x \sin^q x dx, \quad p, q \in \mathbb{N}$

On distingue trois cas :

Premier cas : p est impair

Supposons que $p = 2n + 1$, alors :

$$\int \cos^P x \sin^q x dx = \int (1-\sin^2 x)^n \sin^q x \cos x dx.$$

Le changement de variable $t = \sin x$ ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul $\int (1-t^2)^n t^q dt$, c'est à dire à la déterminiation de la primitive d'un polynôme.

Exemple 1.5.1 *Considérons l'intégrale* $I = \int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

Alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x \cos x dx \\
&= \int (1-t^2)^2 t^2 dt \qquad (t = \sin x,\ dt = \cos x dx) \\
&= \int (1-2t^2+t^4) t^2 dt \\
&= \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt \\
&= \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + C \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.
\end{aligned}$$

deuxième cas : q est impair

En utilisant le changement de variable $t = \cos x$.

On ramène le calcul à la recherche de la primitive d'un polynôme.

Troizième cas : p et q sont paires

On utilise les identitées :

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

Exemple 1.5.2 *Calculer :*

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

La relation $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ *donne que :*

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

et on peut intégrer :

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \tfrac{1}{4}\int (\sin^2 2x)dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 4x)dx \\ &= \tfrac{1}{8}\int dx - \tfrac{1}{8}\int \cos 4x dx \\ &= \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\sin 4x + C.\end{aligned}$$

On peut calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x, \sin x)dx$ ou de la forme $\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}dx$ avec deux polynômes, en se ramenant à intégrer une fonction rationnelle. En effet, il existe deux méthodes :

1. Les règles de Bioche sont efficaces mais ne fonctionnent pas toujours.
2. Le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ fonctionne la plupart du temps mais aboutit à davantage de calculs.

1.5.2 Les régles de Bioche

On pose $h(x) = f(x)dx$. On a : $h(-x) = f(-x)d(-x) = -f(-x)dx$

et $h(\pi - x) = f(\pi - x)d(\pi - x) = -f(\pi - x)dx.$

– Si $h(-x) = h(x)$ alors on applique le changement de variable $u = \cos x$.

– Si $h(\pi - x) = h(x)$ alors on applique le changement de variable $u = \sin x$.

– Si $h(\pi + x) = h(x)$ alors on effectue le changement $t = \tan\frac{x}{2}$. Sachant que :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Exemple 1.5.3 *Calculer l'intégrale indéfinie suivante :*

$$\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}dx.$$

On note : $h(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x} dx$.

Puisque : $h(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)d((\pi-x)}{2-\cos^2(\pi-x)} = \frac{(-\cos x)(-dx)}{2-\cos^2 x} = h(x)$.

Alors le changement de variable convenable est $u = \sin x$ *pour lequelle* $du = \cos x dx$.

Par conséquent :

$$\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{2-(1-\sin^2 x)} dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan(\sin x) + C.$$

Exemple 1.5.4 *Evaluer l'intégrale suivante :*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}.$$

On utilise le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. *On a* $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ *et* $t = -1$ *quand* $x = -\frac{\pi}{2}$ *et* $t = 0$ *quand* $x = 0$.

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{-1}^{0} \frac{2dt}{1+t^2-2t} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = \left.\frac{2}{(1-t)}\right]_{-1}^{0} = 1.$$

Remarque 1.5.1 *D'une manière générale pour evaluer des intégrales du type* $\int f(\sin x, \cos x) dx$, *il suffit de passer par le changement de variable* $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exemple 1.5.5 *Evaluer l'intégrale suivante :*

$$\int \frac{1}{\cos x + \sin x} dx.$$

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$ on a $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Par suite, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x + \sin x} dx = 2\int \frac{dt}{-t^2+2t+1} &= \frac{-\sqrt{2}}{4} \int \frac{dt}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{dt}{t-1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} \right| + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + C.
\end{aligned}$$

1.5.3 Intégrales comportant $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$

Les intégrales comportant peuvent être calculées en faisant appel à un changement de variable comme suit :

– Pour $\sqrt{a^2-x^2}$ on pose $x = a\sin u$.

– Pour $\sqrt{a^2+x^2}$ on pose $x = a\tan u$.

– Pour $\sqrt{x^2-a^2}$ on pose $x = \frac{a}{\cos u}$.

Exemple 1.5.6 *Calculer :*

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^3 dx.$$

Cette intégrale comporte le terme $\sqrt{a^2-x^2}$. *Pour* $x \in \left]-a, a\right[$, *on pose* $x = a\sin u$, $dx = a\cos u du$.

Prenant $u \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *on a* $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u$, *car* $\cos u > 0$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^3 dx &= \int \frac{a\cos u}{(a\cos u)^3} du = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cos^2 u} du \\ &= \frac{1}{a^2}\tan u + C = \frac{1}{a^2}\frac{\sin u}{\cos u} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.\end{aligned}$$

1.5.4 L'intégrale de type $\int P_n(x)e^{ax}dx$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P_n(x)$ un polynôme de degré n, alors

$$\int P_n(x)e^{ax}dx = Q_n(x)e^{ax} + C$$

où Q_n est un de même degré que P_n.

Exemple 1.5.7 $\int e^x\left(x^2+x\right)dx = (ax^2+bx+c)e^x + K.$

Pour trouver les constantes, on dérive :

$$\begin{aligned}\left[(ax^2+bx+c)e^x\right]' &= (2ax+b)\,e^x + (ax^2+bx+c)e^x \\ &= \left[ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right]e^x \\ &= \left(x^2+x\right)e^x\end{aligned}$$

Par identification on trouve : $a = 1$, $2a+b = 1, b+c = 0$

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2.$$

Donc : $\displaystyle\int e^x\,(x^2+x)\,dx = (x^2-2x+2)e^x + K.$

1.6 Exercices

Exercise 1.6.1 *Calculer les intégrales suivantes :*

$a)\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx,\quad b)\int \frac{1}{1+e^x}dx,\quad c)\int (5x-10)(x^2-4x+7)^6dx,\quad d)\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^3\pi x\sin\pi x dx,$

$e)\int \frac{g(x)g'x)}{\sqrt{1+g^2(x)}}dx,\quad f)\int \frac{\sin(e^{-2x})}{e^{2x}}dx,\quad g)\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

Solution.

$a)$ Utilisons la méthode de changement de variables. Posons : $u = e^x$ donc $du = e^x dx$. Ce qui donne :

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C.$$

$b)$ On a :

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\int \frac{(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}dx = \ln(e^{-x}+1) + C.$$

$c)$ Posons : $u = (x^2-4x+7)$ on trouve $du = (2x-4)dx$. Alors on obtient :

$$\int (5x-10)(x^2-4x+7)^6dx = \int \frac{5}{2}u^6du = \frac{5}{14}u^7 + C = \frac{5}{14}(x^2-4x+7)^7 + C.$$

$d)$ Prenons : $u = \cos\pi x$ donc $du = -\pi\sin\pi x dx$ et si $x = 0, x = \frac{1}{2}$ alors $u = 1, u = 0$. Donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^3\pi x\sin\pi x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 u^3du = \frac{1}{4\pi}.$$

$e)$ On a :

$$\int \frac{g(x)g'x)}{\sqrt{1+g^2(x)}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(g^2(x))'}{\sqrt{1+g^2(x)}}dx = \int (\sqrt{1+g^2(x)})'dx = \sqrt{1+g^2(x)} + C.$$

$g)$ On a :

$$\int \frac{\sin(e^{-2x})}{e^{2x}}dx = \int e^{-2x}\sin(e^{-2x})dx = \frac{-1}{2}\int (e^{-2x})'\sin(e^{-2x})dx = \frac{1}{2}\cos\left(e^{-2x}\right) + C.$$

$h)\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{2}\int (\arcsin 2x)'\arcsin(2x)dx = \frac{1}{4}(\arcsin 2x)^2 + C.$

Exercise 1.6.2 *Utiliser l'intégration par parties pour calculer les intégrales suivantes :*
$a)\int \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx,$ $b)\int x^5\cos x^3 dx,$ $c)\int e^x\ln(e^x+1)dx.$

Solution.

$a)$ On intègre par parties :

$u = \ln x \quad dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ \ v = -\frac{1}{2(x^2+1)}.$

Remplaçant dans :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

on trouve :

$$\int \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\ln x}{2(x^2+1)} + \int \frac{1}{2x(x^2+1)}dx.$$

D'autre part :

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Alors :

$$\int \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\ln x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C'.$$

Exercise 1.6.3 *Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :*

$$f(x) = \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x-1}.$$

1. *Trouver les réels a et b pour que :*

$$f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x-1}, \quad \textit{pour tout } x \in \left]0,+\infty\right[.$$

2. *Déduire une primitive pour f sur $]0,+\infty[$.*

Solution.

1. On a :

$$e^x + a + \frac{be^x}{e^x-1} = \frac{e^{2x}+(a+b-1)e^x-a}{e^x-1}.$$

On trouve par identification que $a = 1$ et $b = 1$.

2. $\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x-1}dx = \int (e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x-1})dx = e^x + x + \ln(e^x-1) + C.$

Exercise 1.6.4 *Claculer les intégrales suivantes :*

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$
2. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$
3. $\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}dx$
4. $\int \frac{x^5+2}{x^2-1}dx$

Solution.

1. Le polynôme x^2+2x+5 est irréductible car $\triangle = -16 < 0$.

Nous allons l'écrire sous la forme : $\frac{1}{y^2+p^2}$ on obtient :

$$\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+2^2}$$

Donc :

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) + C.$$

2. La fonction rationnelle $\frac{x+1}{2x^2+x+1}$ est propre, on n'aura pas besoin de faire la division euclidienne. De plus, on remarque que le polynôme $2x^2+x+1$ est irréductible car $\triangle = -7 < 0$. Donc on a une intégrale de type III. On commence par faire apparaitre une fraction de type $\frac{u'}{u}$. On a :

$$\frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4}\frac{(4x+1)}{(2x^2+x+1)} + \frac{3}{4}\frac{1}{(2x^2+x+1)}.$$

L'intégrale du premier terme est égale à :

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}dx = \int \frac{(2x^2+x+1)'}{2x^2+x+1}dx = \ln(2x^2+x+1) + C_1.$$

Traitons maintenant le deuxième terme. Nous allons l'écrire sous la forme : $\frac{1}{y^2+p^2}$. On a :

$$\frac{1}{(2x^2+x+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}$$

$$\text{Donc} \ : \int \frac{1}{(2x^2+x+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}dx = \frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{7}} \arctan(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})) + C_2.$$

Finalement :

$$\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx = \frac{1}{4}\ln(2x^2+x+1) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})) + C.$$

3. La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = \frac{5}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x}$$

Donc :

$$\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}dx = -\frac{5}{x-1} - \ln|x-1| + 3\ln|x| + C.$$

4. Après la division euclidienne et la décomposition en éléments simples on trouve que :

$$\frac{x^5+2}{x^2-1} = x^3 + x + \frac{3}{2\,(x-1)} - \frac{1}{2\,(x+1)}.$$

Alors :

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\ln\left(x-1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x+1\right) + \frac{1}{2}x^2 + C.$$