République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA

FACULTÉ des SCIENCES et de la MATIÈRE et de l'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT de PHYSIQUE

Dérivabilité et Développements Limités

Mathématiques II : Analyse 2 et Algèbre 2

Cours et Exercices Corrigés

Destiné aux étudiants de

Première Année Licence SM & ST

Présenté par

Dr. Leila Slimane

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Dérivabilité

1.1 Défintions et Notions Concernant la dérivée

Dans toute la suite I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.1.1 *On dit que f est dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$ si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et finie. Cette limite est notée $f'(a)$ et appelée le nombre dérivé de f en a.

Si on pose $x = a + h$ alors $h = x - a$ et faire tendre x vers a est équivalent à faire tendre h vers 0 et on a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 1.1.1 *Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^2 + 7$ au nombre a.*

On a

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+7-(a^2+7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+7-(a^2+7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ah}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2a \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Définition 1.1.2 *1. On dit que f est dérivable à droite en a si*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

existe. Cette limite est notée $f'_d(a)$ et appelée la dérivé à droite de f en a.

2. On dit que f est dérivable à gauche en a si

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

3. existe. Cette limite est notée $f'_g(a)$ et appelée la dérivé à gauche de f en a.

Proposition 1.1.1 *f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(a) = f'_g(a)$.*

Exemple 1.1.2 *Déterminer si f est dérivable au point* 0 *où*

$$f(x) = \begin{cases} & \\ x^2, & x \geq 0, \\ 5x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Afin d'étudier la dérivabilité de f au point 0 on utilise la définition de la dérivée

$$\begin{aligned} f'_g(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{5h^3-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} 5h^2 = 0. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à gauche au point 0. On a

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} h = 0. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à droite au point 0 et comme $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$, on déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Théorème 1.1.1 *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Remarque 1.1.1 *La réciproque du théorème précédent est fausse. Par example la fonciton $f(x) = |x-2|$ est continue en 2 :*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$$

mais elle n'est pas dérivable en 2

$$f'_g(2) = -1 \neq f'_d(2) = 1.$$

D'autres notations

Soit $y = f(x)$. Cette notaion indique que x est la variable indépendante et y la variable dépendante. On a les notations suivantes

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Les symboles d, D, D_x sont appelés des opérateurs de dérivation. Le symbole $\frac{dy}{dx}$ qui fut introduit par Leibneiz ne doit pas être considéré comme une quotient. Il est seulement équivalent à $f'(x)$.

1.1.1 L'interprétation géométrique de la dérivée

La tangente (T) à la courbe $y = f(x)$ au point $P(a, f(a))$ est la droite qui passe par P dont la pente est égale à $f'(a)$. L'equation de la tangente T est donnée par

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple 1.1.3 *Donner une équation de la tangente de la parabole $y = x^2 + 7$ au point* $(1, 8)$.
D'après un exemple précédent on a trouvé que $f'(a) = 2a$. Donc la pente $f'(3) = 6$.
L'équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
$$y = 6(x - 3) + 8.$$

1.2 Les règles de dérivation

Proposition 1.2.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables en x, alors*

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
2. $[f(x)g(x)]' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$,

3. $[kf(x)]' = kf'(x), \quad k \in \mathbb{R},$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0.$

Tables des dérivées des fonctions usuelles

$(x^r)' = rx^{r-1}$, $r \in \mathbb{R}$,	$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ \ a > 0.$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$(\cosh x)' = \sinh x.$

Exemple 1.2.1 *Calculer* $\left(\sqrt[5]{x} + 7\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right)'$.

On a :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[5]{x} + 7\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right)' &= \left(\sqrt[5]{x}\right)' + 7\left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right)' \\ &= \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' + 7\left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' \\ &= \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}} + 7\left(x^{\frac{5}{3}}\right)' \\ &= \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}} + \frac{35}{3}x^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Exemple 1.2.2 *Calculer* $\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)'$.

On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sinh x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sinh x)'\cos x - \sinh x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cosh x \cos x + \sinh x \sin x}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 *Si f et g sont deux fonctions dérivables alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable et*

$$[f \circ g]'(x) = [f(g(x))]' = g'(x)f'(g(x)).$$

Avec les notations de Leibniz, si on pose $y = f(u)$ et $u = g(x)$ alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Exemple 1.2.3 *Dériver $F(x) = \sqrt{x^3+5}$.*

On remarque que F est une fonction composée $F = f \circ g$, avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^3+5$. Alors

$$F'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}.$$

Tables des dérivées des fonctions usuelles combinée avec celle d'une fonction composée

$(f(x)^r)' = rf'(x)f(x)^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R},$	$(\ln\|f(x)\|)' = \frac{f'(x)}{f(x)},$
$\left[e^{f(x)}\right]' = f'(x)e^{f(x)},$	$a^{f(x)} = f'(x)\frac{a^{f(x)}}{\ln a}, \qquad a > 0,$
$[\sin f(x)]' = f'(x)\cos f(x),$	$[\cos f(x)]' = -f'(x)\sin f(x),$
$[\tan f(x)]' = f'(x)\frac{1}{\cos^2 f(x)},$	$\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},$
$[\sinh f(x)]' = f'(x)\cosh f(x),$	$[\cosh f(x)]' = f'(x)\sinh f(x).$

1.2.1 Dérivées des fonctions inverses (réciproques)

Proposition 1.2.3 *(**Dérivée de la fonction inverse**) Soit f une bijection de I vers $f(I)$ et soit f sa fonction inverse. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(D)$ et on a :*

$$\forall y_0 \in f(I), \qquad \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Remarque 1.2.1 *Afin d'évaluer $f^{-1}(y_0)$ on commence par trouver $x_0 \in I$ solution de l'équation $y_0 = f(x_0)$ et on aura $f^{-1}(y_0) = x_0$ et par conséquent*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Table des dérivées des fonctions inverses trigonométriques et inverses hyperboliques

$f(x)$	$f'(x)$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$Argsh(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$Argsh(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arccos(u(x))$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

1.2.2 Les dérivées successives

Etant donnée une fonction dérivable f sa dérivée f' est aussi une fonction et peut être avoir une dérivée notéé f''. La nouvelle fonction f'' est appelée la dérivée seconde de f. En utilisant la notation de Leibniz, la dérivée seconde de $y = f(x)$ s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Définition 1.2.1 1. *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite n fois dérivable si f' est $n-1$ fois dérivable. La dérivée d'ordre n de f est notée $f^{(n)}$ (si elle existe). Notons que*

$$f^0 = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = (f')' = f'', \dots,\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

2. *La fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.*

3. *La fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.*

4. *La fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 1.2.4 1. *Si $f(x) = x^5$, $x \in \mathbb{R}$ alors*

$$f'(x) = 5x^4, \quad f''(x) = 20x^3, \quad f^{(3)}(x) = 60x^2, \quad f^{(4)}(x) = 120x, \quad f^{(5)}(x) = 120, \quad f^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \geq$$

2. *Si $f(x) = e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$ alors*

$$f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}, \quad \forall n \geq 0.$$

1.3 Applications des dérivées

1.3.1 Que dit la dérivée à propos de la fonction ?

La plupart des applications de calcul différentiel s'intéressent à déduire les caractéistiques d'une fonction des propriétés de sa dérivée f'.

Proposition 1.3.1 1. *Si $f'(x) > 0$ sur un interval I, alors f est strictement croissante sur cet intervalle.*

2. *Si $f'(x) < 0$ sur un interval I, alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.*
3. *Si $f'(x) = 0$ sur un interval I, alors f est constante sur cet intervalle.*

La dérivée seconde donne aussi des informations sur f.

Proposition 1.3.2 1. *Quand $f''(x) > 0$ sur un interval I, alors f est convexe sur I.*

2. *Quand $f''(x) < 0$ sur un interval I, alors f est concave sur I.*

Proposition 1.3.3 ***(test de la dérivée seconde)*** *Supposons que f'' est continue au voisinage de c.*

1. *Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$,alors f présente en c un point de minimum local.*

2. *Si* $f'(c) = 0$ *et* $f''(c) < 0$,*alors* f *présente en* c *un point de maximum local.*

Théorème 1.3.1 ***(Théorèm de Rolles)*** *Soit* f *une foction définie et continue sur* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$ *si* $f(a) = f(b)$ *alors*

$$\exists c \in \left]a, b\right[, \text{ tel que } f'(c) = 0.$$

(La tangente au point c *est horizontale).*

Théorème 1.3.2 ***(Théorème des accroissement finis)*** *Soit* f *une foction définie et continue sur* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$
alors

$$\exists c \in \left]a, b\right[, \text{ tel que } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

On note que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *est la pente de la droite* (a, b).

1.3.2 Règle de l'Hôpital

Théorème 1.3.3 ***(Règle de l'Hôpital)*** *Supposons que* f *et* g *soient dérivables et que* $g'(x) \neq 0$ *au voisinage de* a *(sauf peut être en* a. *Supposons aussi que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = 0, \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si la limite du nombre de droite existe ou est égale à ∞ *ou* $-\infty$.

Remarque 1.3.1 1. *La régle de l'Hospital annonce que la limite d'un quotient de fonctions est égale à la limite du quotient des foncions dérivées pourvu que les conditions données soient remplies. Il faut vérifier les conditions relatives aux limites de* f *et de* g *avant d'appliquer cette règle.*

2. *On note que "$x \to a$" peut être remplacé par un des symboles "$x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty, x \to -\infty$".*

Exemple 1.3.1 *Trouver*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4} x - 1}.$$

.

Si on remplace on trouve forme indéterminée de type $\left(\frac{0}{0}\right)$ *. En appliquant la règle de l'Hôpital on trouve*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4} x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\arctan x - \frac{\pi}{4})'}{(\tan \frac{\pi}{4} x - 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{4\cos^2 \frac{\pi}{4} x}} = \frac{1}{\pi}.$$

1.4 Exercices

Exercise 1.4.1 *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = (\sin 4x)^{100}$.
2. $g(x) = \ln(\arctan 5x)$
3. $h(x) = \frac{e^{\sin 6x}}{\cosh x}$
4. $l(x) = \sqrt[3]{x^4} \arcsin(e^{2x})$
5. $k(x) = x^{\sqrt{x}}$

Solution.

1.
$$f'(x) = \left((\sin 4x)^{100}\right)' = 100(4x)'(\cos 4x)^{99} = 400\,(\cos 4x)^{99}.$$

2.
$$g'(x) = \frac{(\arctan 5x)'}{\arctan 5x} = \frac{5}{1+(5x)^2}\frac{1}{\arctan 5x} = \frac{5}{\arctan 5x\,(1+25x^2)}.$$

3.

$$h'(x) = \left(\frac{e^{\sin 6x}}{\cosh x}\right)' = \frac{\left(e^{\sin 6x}\right)' \cosh x - e^{\sin 6x} (\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \frac{e^{\sin 6x}(6\cos 6x - \sinh x)}{\cosh^2 x}.$$

4.

$$\begin{aligned} l'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^4} \arcsin(e^{2x})\right)' = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' \arcsin(e^{2x}) + \sqrt[3]{x^4} \left(\arcsin(e^{2x})\right)' \\ &= \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' \arcsin(e^{2x}) + \sqrt[3]{x^4} \frac{(e^{2x})'}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}} \\ &= \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \arcsin(e^{2x}) + 2\sqrt[3]{x^4} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e}}. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} k'(x) &= \left(x^{\sqrt{x}}\right)' = \left(e^{\ln x^{\sqrt{x}}}\right)' = \left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right)' \\ &= \left(\sqrt{x}\ln x\right)' e^{\sqrt{x}\ln x} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}\right) x^{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}\right) x^{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Exercise 1.4.2 *Étudier la dérivabilité de la fonction suivante et donner sa dérivée*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1. \end{cases}$$

Solution.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ car c'est un polynôme de degré 2 et elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme étant fonction racine. Afin d'étudier la dérivalité de f au point 1 on utilise la définition de la dérivée. On a

$$\begin{aligned} f'_g(1) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-3(1+h)+3-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h+h^2}{h} = -1. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à gauche au point 1.

$$\begin{aligned} f'_d(1) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à droite au point 1. Mais $-1 = f'_g(1) \neq f'_d(1) = \frac{1}{2}$, par conséquent f n'est pas dérivable en 1 et

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3, & x<1, \\ \frac{1}{2\sqrt{x,}} & x>1. \end{cases}$$

Exercise 1.4.3 *Trouver les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} \frac{\tan x}{\ln(2x-\pi)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x}$.

Solution.

1. On a $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+}\frac{\tan x}{\ln(2x-\pi)}$ F.I de type $\frac{\infty}{\infty}$. On peut alors appliquer la règle de l'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{\tan x}{\ln(2x-\pi)} &= \lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{(\tan x)'}{(\ln(2x-\pi))'}\\
&= \lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{2x-\pi}{2\cos^2 x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{(2x-\pi)'}{(2\cos^2 x)'}\\
&= \lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{2}{-4\cos x\sin x}\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

2. On trouve $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ F.I de type $(\infty-\infty)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}\right) && \left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(xe^x-e^x+1)'}{(x(e^x-1))'} && \text{la règle de l'Hôpital}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{xe^x+e^x-1} && \left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{xe^x+e^x-1} && \text{la règle de l'Hôpital}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(xe^x)'}{(xe^x+e^x-1)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x+e^x}{xe^x+2e^x}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. On a $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\ln(\tan x)}{\sin x-\cos x}$ F.I $\left(\frac{0}{0}\right)$. On utilise la règle de l'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/4}\frac{\ln(\tan x)}{\sin x-\cos x} &= \lim_{x\to\pi/4}\frac{(\ln(\tan x))'}{(\sin x-\cos x)'}\\ &= \lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x\tan x(\cos x+\sin x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Les développement limités sont un outil principal d'pproxiamtion locale des fonctions.

L'objectif de ce chapitre est de présenter des techniques afin de les calculer.

Considérons $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On rappelle qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^0$ si f est continue sur I. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$, la dérivée $n^{ième}$ de f, est continue sur I. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de calsse $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 2

Développements Limités

2.1 Les formules de Taylor

Définition 2.1.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on appelle le polynôme de Taylor d'ordre n en a de f, le polynôme :*

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Le reste de Taylor d'ordre n en a de f est défini par :

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Théorème 2.1.1 ***(Formule de Taylor avec reste intégral)***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt. \tag{2.1}$$

C'est la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Remarque 2.1.1 *En posant $x = a + h$ c.-à-d. $h = x - a$ la formule de Taylor avec reste intégral devient (pour tout a et $a + h$ de I)*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(a+t)}{n!}(h-t)^n dt.$$

Théorème 2.1.2 ***(Formule de Taylor avec reste de Lagrange)***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}.$$

C'est la formule de Taylor avec reste de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}.$$

Dans la plupart des cas le c est inconnu, mais cette formule nous donne une estimation du reste. En effet, si $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$, pour tout $x \in I$. Alors :

$$|f(x) - T_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{n!}.$$

Théorème 2.1.3 ***(Formule de Taylor-Young)***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a, x \in I$. On a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\xi(x), \quad (2.2)$$

où ξ est une foncion définie sur I telle que $\xi(x) \to 0$ quand $x \to a$.

La partie $R_n(x) = (x-a)^n \xi(x)$ est appelée le reste de Young d'ordre n.

La formule de Taylor-Yong est la plus utilisée en pratique. Elle s'écrit dans le cas où $a = 0$ comme suit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + x^n\xi(x), \tag{2.3}$$

avec $\xi(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

Des fois on pose

$$o(x) = x^n \xi(x).$$

Exemple 2.1.1 *Soit $f(x) = \ln(1+x)$ avec $x > -1$. On sait que f est infinimement dérivable. On cherche à donner le formule de Taylor-Young au voisinage de 0 pour les premiers ordres.*

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \qquad &&\textit{donc} \quad f(0) = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{(1+x)} &&\textit{donc} \quad f'(0) = 1 \\ f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} &&\textit{donc} \quad f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} &&\textit{donc} \quad f^{(3)}(0) = 2 \end{aligned}$$

Par récurrence on montre que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n} \qquad \textit{donc} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Par conséquent

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

et pour $n > 0$

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Exemple 2.1.2 *Les formules de Taylors nous indiquent que les restes sont de plus en plus petits au voisinage de a lorsque n croît.*

2.2 Developpement limité au voisinage d'un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction où I est un intervalle ouvert.

Définition 2.2.1 *Pour* $a \in I$, *on dit que* f *admet un dévelopement limité (DL) au point* a *et à l'ordre* n *s'il existe des réels* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *et une fonction* $\xi : I \to \mathbb{R}$ *tel que* $\lim\limits_{x \to a} \xi(x) = 0$ *et*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \xi(x).$$

i) L'expression précédente s'appelle un développement limité de f au voisinage de a à l'ordre n. La formule de Taylor-Young donne des développement limités en posant $c_k = \frac{f^k(a)}{k!}$.

ii) La partie polynomiale du DL est donnée par $c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n$.

iii) Le terme $(x-a)^n \xi(x)$ désigne le reste de DL.

Proposition 2.2.1 *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *au voisinage d'un point alors* f *possède un DL au point* a *à l'ordre* n, *qui provient de la formule de Taylor-Young*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \xi(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \xi(x) = 0$.

Remarque 2.2.1 *Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point alors f possède un DL au point 0 à l'ordre n donné par*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + x^n\xi(x), \qquad \text{avec } \xi(x) \to 0 \text{ quand } x \to a.$$

Corollaire 2.2.1

1. *Si f possède un DL au voisinage d'un point a alors ce DL est unique.*
2. *Si f est paire (rep. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes pairs (resp. impaires).*

Exemple 2.2.1

1. *On sait que la fonction $\sinh x$ est impaire. Son DL au voisinage de 0 est donné par*

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\xi(x).$$

2. *La fonction $\cosh x$ est paire. Son DL au voisinage de 0 est donné par*

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\xi(x).$$

2.2.1 Développement limité des fonctions usuelles en 0

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\xi(x). \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\xi(x). \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\xi(x). \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\xi(x). \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\xi(x). \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + x^n\xi(x).
\end{aligned}
$$

On a aussi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\zeta(x). \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\zeta(x). \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n n!}x^n + x^n\zeta(x). \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\zeta(x). \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\zeta(x).
\end{aligned}
$$

Remarque 2.2.2 *Afin d'obtenir le DL d'une fonction en un point en un point a ($a \neq 0$), On pose le changement de variable $h = x - x_0$ qe qui ramène le problème en 0.*

2.2.2 Opérations sur les développements limités

Soit f, g deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n

$$f(x) = P_n(x) + x^n \xi_f(x), \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \xi_f(x) = 0$$
$$g(x) = P'_n(x) + x^n \xi_g(x), \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \xi_g(x) = 0.$$

Somme et produit

Proposition 2.2.2 *1. La fonction $f+g$ possède un DL en 0 à l'ordre n donné par*

$$[f+g](x) = P_n(x) + P'_n(x) + x^n \xi(x), \qquad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0} \xi(x) = 0.$$

2. La fonction fg possède un DL en 0 à l'ordre n donné par

$$[fg](x) = T_n(x) + x^n \xi(x), \qquad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0} \xi(x) = 0,$$

où $T_n(x)$ est le polynôme $P_n(x)P'_n(x)$ tronqué à l'ordre n.

Remarque 2.2.3 *Tronquer un polynôme à l'ordre n veut dire que l'on conserve uniquement les monômes de degré $\leq n$.*

Exemple 2.2.2 *1. Cherchons le DL de $e^x + \cos x$ à l'ordre 3 en 0.*

On a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\xi_1(x) \qquad \textit{and} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\xi_2(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} e^x + \cos x &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + x^3\xi(x) \\ &= 2 + x + \frac{x^3}{6} + x^3\xi(x). \end{aligned}$$

2. *Cherchons maintenant DL de* $e^x \cos x$ *à l'ordre* 3 *en* 0. *On a*

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + x^3\xi(x) \\ &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + x^3\xi(x) \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\xi(x). \end{aligned}$$

Quotient et composition

Proposition 2.2.3 1. *Si* $g(0) = 0$ *alors* $f \circ g$ *admet un DL en* 0 *dont la partie polynomiale et le polynôme tronqué à l'ordre* n *de la composition.*

2. *Si* $g(0) \neq 0$ *le quotient* $\frac{f}{g}$ *admet un DL en* 0 *à l'ordre* n *donné par*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = R(x) + x^n\xi(x),$$

où R *est obtenu de la division suivant les puissances croissantes de* P *par* P' *à l'ordre* n.

Exemple 2.2.3 1. *Trouver le DL de* $\frac{2+x+2x^3}{1+x^2}$ *à l'ordre 2.*

On pose

$$C(x) = 2 + x + 2x^3, \qquad D(x) = 1 + x^2.$$

Alors en utilisant la division suivant les puissances croissantes

$$C(x) = D(x)\left(2 + x - 2x^2\right) + x^3(1 + 2x).$$

Donc

$$\frac{C(x)}{D(x)} = \left(2 + x - 2x^2\right) + x^2\xi(x).$$

2. *Trouver le DL de* $\frac{1+x}{2+x}$ *l'ordre* 4 *en* 0. *On va utliser une autre méthode*

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{2+x} &= \frac{1}{2}(1+x)\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(1+x)\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+x^4\xi(x)\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{32}+x^4\xi(x).\end{aligned}$$

Exemple 2.2.4 *Calculer le DL de* $h(x) = \sin(\ln(1+x))$ *en* 0 *à l'ordre* 3.

On remarque que h est la composition de deux fonctions et que $h(0) = 0$.

Posons $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$. On a

$$\begin{aligned}f(u) &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\xi_1(u).\\ u = g(x) &= \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\xi_2(x).\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}u^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\xi_2(x)\right)^2\\ &= x^2 - x^3 + x^3\xi_3(x)\\ u^3 &= u\cdot u^2 = x^3 + x^3\xi_3(x).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}h(x) = f\circ g(x) = f(u) &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\xi_1(u)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^3 + x^3\xi_3(x)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + x^3\xi_3(x).\end{aligned}$$

Intégration

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet un DL en a à l'ordre n donné par

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\xi(x).$$

Théorème 2.2.1 *Supposons que f admet la fonction F comme primitive. Alors F admet un DL en a à l'ordre $n+1$ donné par*

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + (x-a)^{n+1}\eta(x) \qquad \textit{avec } \lim_{x\to 0}\eta(x) = 0.$$

Exemple 2.2.5 *Afin de donner le DL de* $\arctan x$ *en* 0*, on utlise le fait que*

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\zeta(x) \qquad \textit{avec } \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0\end{aligned}$$

et comme $\arctan 0 = 0$ *on obtient en intégrant*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n}\eta(x) \qquad \textit{avec } \lim_{x\to 0}\eta(x) = 0.$$

Dérivation

Proposition 2.2.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui admet un DL en a à l'ordre n donné par*

$$f(x) = P_n(x) + x^n\zeta(x) \qquad \textit{avec } \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0.$$

Alors f' admet un DL en a à l'ordre n donné par

$$f'(x) = P_{n-1}(x) + x^n\eta(x) \qquad \textit{avec } P_{n-1}(x) = P_n'(x) \qquad \textit{et } \lim_{x\to 0}\eta(x) = 0.$$

Exemple 2.2.6 $\sin x$ *est dérivable au voisinage de* 0.

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\xi(x). \\
\cos x &= (\sin x)' \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)' + x^5\eta(x) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\eta(x).
\end{aligned}$$

2.3 Applications des développements limités

2.3.1 Calculs des limites

Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées car

Exemple 2.3.1 *Si* $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\xi(x)$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c_0$.

Exemple 2.3.2 *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+x}}{x}$.
On sait que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + x\xi_1(x).$$

Par composition on a

$$\sqrt{1-2x} = 1 + \frac{(-2x)}{2} + x\xi_2(x) = 1 - x + x\xi_2(x).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{x}{2}+x\xi_1(x)\right) - (1 - x + x\xi_2(x))}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-3}{2}x + x\xi(x)}{x} = \frac{-3}{2}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.3 *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.

On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\xi_1(x) \quad et \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\xi_2(x).$$

En remplaçant, on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3} + x^3\xi(x)}{x^3}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dont son DL au point a est donné par

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + x^k\xi(x).$$

où k est le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que $c_k \neq 0$. L'équation de la tangente (T) à la courbe de f en a , noté

C_f,est $y = c_0 + c_1(x-a)$. Le signe de $f(x) - y$, i.e le signe de $c_k(x-a)^k$, nous donne la position de la courbe par rapport à sa tangente en a, en effet

1. si $f(x) - y \geq 0$ alors la courbe est au dessus de la tangente,
2. si $f(x) - y \leq 0$ alors la courbe est au dessous de la tangente,
3. si le signe de $f(x) - y$ change lorsqu'on passe de $x < a$ à $x > a$ (i.e. $f''(a) = 0$) alors la coube traverse sa tangente au point $(a, f(a))$ qui est nomé point d'inflexion.

2.4 Exercices

Exercise 2.4.1 *Donner les dévelopements limites des fonctions suivantes*

1. $\frac{1}{1+x} - e^x$ *à l'ordre* 3 *en* 0.

2. $\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$ *à l'ordre* 4 *en* 0.

3. $\cos x \ln(1+x)$ *à l'ordre* 4 *en* 0.

4. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ *à l'ordre* 3 *en* 0.

Solution.

1. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^3\zeta_1(x) \\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\zeta_2(x)
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{1-x}-e^x=\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+x^3\zeta(x).$$

2.On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{128}x^4+x^4\zeta_1(x). \\
\sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{128}x^4+x^4\zeta_2(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{64}x^4+x^4\zeta(x).$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\zeta_1(x). \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3+x^4\zeta_2(x).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\cos x \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + x^4\zeta(x).$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{\sin x} &= \ln(1+x)\cdot\frac{1}{\sin x}\\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + x^3\zeta_1(x)\right)\cdot\frac{1}{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\zeta_2(x)\right)}\\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}x^2 + x^3\zeta_1(x)\right)\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + x^2\zeta_2(x)\right)}\\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}x^2 + x^3\zeta_1(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + x^3\zeta_3(x)\right)\\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\zeta(x)\right).
\end{aligned}$$

Exercise 2.4.2 *Donner les dévelopement limites des fonctions suivantes*

1. $\int_0^x e^{t^2}dt$ *à l'ordre* 5 *en* 0.
2. $\frac{1}{4+3x}$ *à l'ordre* 2 *en* 0.
3. $\sin(\ln(1+x))$ *à l'ordre* 2 *en* 0.

Solution.

1. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

En intégrant on trouve

$$\int_0^x e^{t^2}dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^4).$$

2. On a
$$\frac{1}{4+3x}=\frac{1}{4(1+\frac{3}{4}x)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+u}\text{pour } u=\frac{3x}{4}\text{ , } u=0 \text{ si } x=0.$$

Comme
$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+u^2\xi(u).$$

Par substitution de u par sa valeur, on obtient

$$\frac{1}{1+u}=1-\frac{3x}{4}+\frac{9x^2}{16}+\frac{9}{16}x^2\xi(\frac{3x}{4})$$

Donc

$$\frac{1}{4+3x}=\frac{1}{4}-\frac{3x}{16}+\frac{9x^2}{64}+x^2\xi_1(x).$$

3.3.Le DL de $ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 3 est

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

En posant $u=\ln(1+x)$, on obtient $u=0$ si $x=0$, alors

$$\sin u=u-\frac{1}{6}u^3+o\left(u^3\right)$$

Par substitution, on obient

$$\sin(\ln(1+x))=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3+x^3o(x^3)$$

En négligeant touts les termes de degré plus grand que 3 et en les regroupant dans le terme du reste, on btient

$$\sin(\ln(1+x))=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Exercise 2.4.3 *Trouver les limites suivantes*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

Solution. 1. Un DL à l'ordre 2 suffit car les DL sont différents à partir de degré 2

$$\ln(1+x)-\sin x = \left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+o(x^2)\right)$$

Donc

$$\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} = -\frac{x}{2}+o(x^2).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{2}+o(x^2).\\ &= 0.\end{aligned}$$

1. **2.** Comme

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),\\ \sqrt{1-x^2} &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$