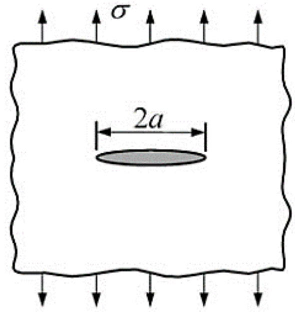
# Problèmes corrigés de Mécanique linéaire de la rupture

## 1. *Problème 1*

Une plaque plane avec une fissure centrale est chargée en traction avec une contrainte de 100MPa. La ténacité du matériau est $K_{IC} = 50 MPa\sqrt{m}$ .




1. Déterminer la taille critique de la fissure pour cette plaque en supposant le matériau élastique linéaire.
2. Calculer le taux de restitution d'énergie critique $G_C$ si le module de Young est E = 207 GPa.

**Solution du problème 1**

La plaque est supposée de dimensions très grandes par rapport à la taille de la fissure. Donc la demi-longueur critique de la fissure est reliée à la ténacité par la relation suivante : $K_{IC} = \sigma\sqrt{\pi a_c}$

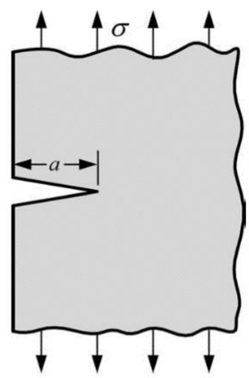
Donc la longueur de fissure critique est $2a_c = 2\dfrac{K_{IC}^2}{\pi\sigma^2} = 2\dfrac{50^2\, MPa^2.m}{\pi.100^2\, MPa^2} = 15,9mm$

Le taux de restitution d'énergie critique, dans le cas des contraintes planes est :

$$G_C = \frac{K_{IC}^2}{E} = \frac{50^2.MPa^2.m}{207.10^3\, MPa} = 0,01208 MPa.m = 12,08 KJ/m^2$$

## 2. *Problème 2*

Une plaque plane en traction comporte une fissure de bord horizontale de taille a=10mm.




Les données du matériau sont :

Module d'élasticité linéaire E=70GPa, Coefficient de Poisson ν=0,32 ;

Limite élastique $\sigma_Y = 250 MPa$ et Ténacité $K_{IC} = 35 MPa\sqrt{m}$ .

La contrainte de traction est $\sigma = 80 MPa$ .

1. Calculer le facteur d'intensité des contraintes en mode I.
2. Calculer le taux de restitution d'énergie critique $G_C$.
3. Calculer la longueur critique de la fissure avant rupture.

**Solution du problème 2**

La plaque est supposée de dimensions très grandes par rapport à la taille de la fissure. Donc la longueur de la fissure est reliée au FIC par la relation suivante : $K_I = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi a}$

1. Le FIC en mode I est donc : $K_I = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi a} = 1{,}12 * 80 * \sqrt{\pi * 0{,}01} = 15{,}88\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$
2. Le calcul de Gc se fait en contrainte plane (puisqu'il s'agit d'une plaque mince)

$$G_C = \frac{K_I^2}{E} = \frac{35^2 MPa^2.m}{70000MPa} = 0{,}0175\,MPa.m = 17{,}5\,kJ\,/\,m^2$$

3. La longueur de fissure critique est $a_c = \dfrac{K_{IC}^2}{1{,}12^2\pi\sigma^2} = \dfrac{35^2\,\mathrm{MPa}^2.\mathrm{m}}{1{,}12^2\,\pi.80^2\,\mathrm{MPa}^2} = 48{,}6\mathrm{mm}$

## 3. *Problème 3*

Pour les deux plaques chargées de la figure, déterminer :

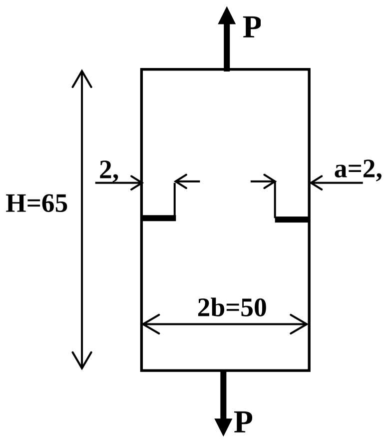
1. Pour chaque cas, quel est le mode de rupture régissant (rupture par ruine plastique ou rupture fragile).
2. Est-ce que la rupture est prévisible pour les deux cas.
3. Quelle est la configuration la plus dangereuse (fissure centrale, double fissure de bord).

Données : $P = 35KN$, $\sigma_Y = 440MPa$, $K_{Ic} = 31MPa\sqrt{m}$, Epaisseur de pièce : e=2mm

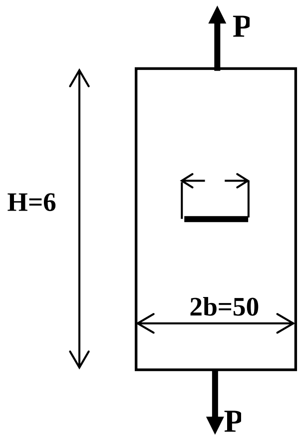
On donne les formules pour le calcul des FIC.

$$K_I^{(A)} = \sigma^{\infty}\sqrt{\pi a}\left[1{,}12 - 0{,}20\left(\frac{a}{b}\right) - 1{,}2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1{,}93\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]$$

$$K_I^{(B)} = \sigma^{\infty}\sqrt{\pi a}\left[1{,}0 + 0{,}128\left(\frac{a}{b}\right) - 0{,}228\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1{,}523\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]$$




(Cas A)




(Cas B)

**Solution du problème 3**

A priori, les deux modes de rupture sont possibles, il faut vérifier les calculs pour les deux modes. Pour vérifier si la rupture se produit par ruine plastique, il faut comparer la contrainte vraie avec la contrainte d'écoulement plastique $\sigma_Y$.

La contrainte vraie est obtenue en divisant la charge appliquée par la section réelle, en tenant compte des discontinuités de matière (trous, fissures, …)

La contrainte vraie est : $\sigma_t = \dfrac{P}{A_t} = \dfrac{35.10^3 N}{(50-5)2mm^2} = 389 MPa$

$\sigma_t < \sigma_Y$ Donc, il n'y a pas de rupture par ruine plastique pour les deux cas.

Pour vérifier si la rupture fragile est possible, il faut calculer les facteurs d'intensité de contraintes (FIC) pour les deux cas et les comparer avec les valeurs critiques.

$$\sigma^{\infty} = \frac{35.10^3 N}{(50*2)mm^2} = 350 MPa$$

**Cas A**

$$K_I^{(A)} = 350.\sqrt{\pi.2,5.10^{-3}}\left[1,12-0,20\left(\frac{2,5}{25}\right)-1,2\left(\frac{2,5}{25}\right)^2+1,93\left(\frac{2,5}{25}\right)^3\right] = 33,8 MPa\sqrt{m}$$

$$K_I^{(A)} > K_{Ic}$$

Donc, pour le cas A, la rupture fragile est prévisible.

**Cas B**

$$K_I^{(B)} = 350.\sqrt{\pi.2,5.10^{-3}}\left[1,0+0,128\left(\frac{2,5}{25}\right)-0,228\left(\frac{2,5}{25}\right)^2+1,523\left(\frac{2,5}{25}\right)^3\right] = 31,4 MPa\sqrt{m}$$

$$K_I^{(B)} > K_{Ic}$$

Donc, pour le cas B, la rupture fragile est aussi prévisible avec une faible marge.

Comme le FIC pour le cas A $(K_I^{(A)} = 33,8 MPa\sqrt{m})$ est plus grand que celui du cas $(K_I^{(B)} = 31,4 MPa\sqrt{m})$, la pièce avec les fissures de bord est le cas le plus dangereux.

## 4. *Problème 4*

La théorie d'Irwin permet d'évaluer la nocivité des fissures et donc de dimensionner les pièces en conséquence. L'expérimentateur fournit la valeur de la ténacité $K_{IC}$, et le mécanicien compare la valeur calculée $K_I$ avec $K_{IC}$ ; il faut que $K_I$ soit inférieur à $K_{IC}$ pour que la fissure soit stable (ne se propage pas).

A titre d'exemple, considérons un réservoir cylindrique fermé de rayon R =2m devant supporter une pression interne maximale de 50 MPa.

Il est question de déterminer l'épaisseur e du réservoir pour qu'il supporte cette pression (voir figure).

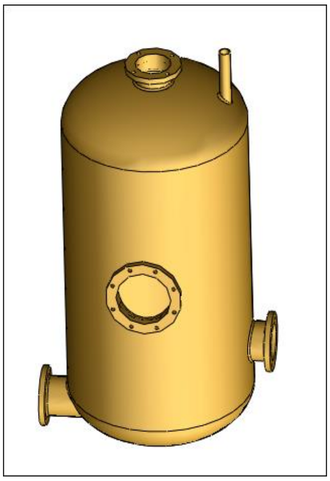
Le réservoir peut se rompre suivant deux mécanismes :

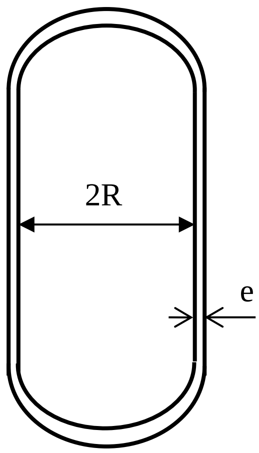
1. En l'absence de fissures, lorsque la contrainte équivalente de *Von Mises* atteint la contrainte ultime $\sigma_u$ du matériau ; la ruine se produit alors par plasticité.
2. Par propagation d'une fissure lorsque $K_I$ atteint $K_{IC}$.

Les techniques de détection des fissures ne permettent de localiser que des fissures de longueur $\geq 5mm$. En supposant qu'aucune fissure ne soit détectée, le matériau est supposé ne contenir que des fissures de longueur $\leq 5mm$. Il faut garantir la stabilité de ses fissures.

Le constructeur a le choix entre trois aciers A, B, C dont les caractéristiques sont les suivantes :

| Acier | Contrainte ultime (MPa) | Ténacité (MPa$\sqrt{m}$) |
|---|---|---|
| A | 1250 | 90 |
| B | 900 | 120 |
| C | 650 | 190 |

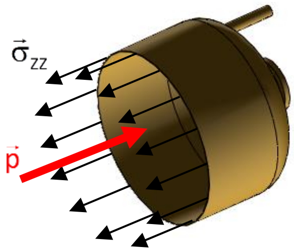




**Solution du problème 4**

1. En utilisant l'approche RDM (classique), nous pouvons calculer les contraintes axiale, radiale et circonférentielle.

   - La contrainte axiale $\sigma_{zz}$ :




Etudions l'équilibre de la moitié du réservoir en coupe transversale :

La force agissant sur la paroi est équilibrée par la pression interne sur la section droite du réservoir en coupe transversale.

$$p.\pi R^2 = \sigma_{zz}.2\pi R.e \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{pR}{2e}$$

- La contrainte axiale $\sigma_{\theta\theta}$ :

Equilibre de la moitié du réservoir en coupe longitudinale :

La force agissant sur la paroi est équilibrée par la pression interne sur la section droite du réservoir en coupe longitudinale passant par l'axe de révolution.

$$p.2R = \sigma_{\theta\theta}.2e \Rightarrow \sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{e}$$

- La contrainte $\sigma_{rr}$ est négligeable devant les deux autres (présence du terme $\frac{R}{e} >> 1$ )

- Le tenseur des contraintes principales est donc :

$$[\sigma] = \frac{pR}{e}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ Dans la base principale } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

La contrainte équivalente de Von Mises, définie par la relation ci-dessous, doit être inférieure à la limite élastique du matériau pour assurer la résistance du réservoir à la pression maximale appliquée :

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_Y \quad (\sigma_Y \text{ Limite élastique du matériau})$$

Remplaçons les différentes contraintes par leurs valeurs, nous obtenons :

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{pR}{e} \leq \sigma_Y \Rightarrow e_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{pR}{\sigma_Y} \text{ et pour les trois aciers :}$$

$$e_{min}(\text{Acier A}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{50\text{MPa}.2000\text{mm}}{1250\text{MPa}} = 69\text{mm}$$

$$e_{min}(\text{Acier B}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{50\text{MPa}.2000\text{mm}}{900\text{MPa}} = 96\text{mm}$$

$$e_{min}(\text{Acier C}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{50\text{MPa}.2000\text{mm}}{650\text{MPa}} = 133\text{mm}$$

Envisageons maintenant le mécanisme de ruine par rupture fragile.

2. La plus grande contrainte étant $\sigma_{\theta\theta}$, les fissures les plus dangereuses sont celles dont le plan est perpendiculaire à $\vec{e}_\theta$ . La configuration donnant le $K_I$ le plus dangereux et celle d'une fissure débouchante vers l'intérieur du réservoir (sinon, elle serait détectable). Le facteur d'intensité de contrainte en mode 1 vaut, dans ce cas : $K_I = 1{,}12\sigma_{\theta\theta}\sqrt{\pi a}$ . La taille de la fissure étant celle de la plus grande fissure détectable.

   La condition à satisfaire est : $K_I < K_{IC} = 1{,}12\frac{pR}{e_{min}}\sqrt{\pi a} \Rightarrow e_{min} = 1{,}12\frac{pR}{K_{IC}}\sqrt{\pi a}$ et pour les trois aciers nous avons :

$$e_{min}(\text{Acier A}) = 1{,}12\frac{50\text{MPa}.2000\text{mm}}{90}\sqrt{\pi.0{,}005} = 156\text{mm}$$

$$e_{min}(\text{Acier B}) = 1{,}12\frac{50\text{MPa}.2000\text{mm}}{120}\sqrt{\pi.0{,}005} = 117\text{mm}$$

$$e_{min}(\text{Acier C}) = 1{,}12\frac{50\text{MPa}.2000\text{mm}}{190}\sqrt{\pi.0{,}005} = 133\text{mm}$$

Conclusion : Entre les deux approches, il convient de choisir l'acier B qui présente le meilleur compromis.

| Epaisseur de la paroi | ACIER A | ACIER B | ACIER C |
|---|---|---|---|
| e(mm) RDM | 69 | 96 | 133 |
| e(mm)MDR | 156 | 117 | 133 |