

Chapitre IV : Comportement du matériau au voisinage d'une fissure

IV-1 Introduction

Dans le développement des équations de contraintes de base pour la traction, la compression, la flexion et la torsion, il a été supposé qu'aucune irrégularité géométrique ne s'est produite dans l'élément considéré. Mais il est assez difficile de concevoir une machine sans permettre certains changements dans les sections transversales des membres. Toute discontinuité dans une pièce modifie la répartition des contraintes dans le voisinage de la discontinuité, de sorte que les équations de contrainte élémentaires ne décrivent plus l'état de contrainte dans la pièce à ces emplacements. De telles discontinuités sont appelées leviers de contrainte, et les régions dans lesquelles elles se produisent sont appelées zones de concentration des contraintes. Les concentrations de contrainte peuvent également provenir d'une irrégularité non inhérente à l'élément, telle que des trous, des encoches, des rainures ou des plis.

La MLR prédit des contraintes infinies à l'extrémité d'une fissure aigue. Mais dans les matériaux réels, les contraintes à l'extrémité d'une fissure restent finies car le rayon à fond de fissure n'est pas nul. Ces contraintes dépassent la limite d'élasticité du matériau et la déformation plastique qui en résulte, conduit à une relaxation des contraintes à l'extrémité de la fissure. La MLR devient progressivement imprécise à mesure que la taille de la zone plastifiée qui se forme à l'extrémité de la fissure, devient importante. Des corrections simples à la MLR sont proposées lorsque cette taille reste raisonnable. Il est important de connaître la taille de la zone plastique à fond de fissure .cette taille peu être estimée par l'approche d'Irwin. Cette approche conduit à des corrections simples du FIC.

IV-2 Approche d'Irwin

Dans la plan d'une fissure et en aval de l'extrémité de celle-ci , la contrainte normale σ_y lorsque la sollicitation est en mode I, est donnée par :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Irwin considère, en première approximation, que la frontière entre zone élastique et plastique correspond au lieu des points où les contraintes atteignent la limite d'élasticité du

matériau. Pour déterminer le rayon E_r ou cette frontière coupe le plan d'une fissure en contraintes planes, on écrit alors $\sigma_y = \sigma_E$ ou σ_E est la limite d'élasticité en traction simple, ce qui conduit à :

$$r_E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2$$

On tronque tout simplement le champ des contraintes à $\sigma_y = \sigma_E$, en faisant l'hypothèse que le comportement du matériau est élastique plastique parfait. Cette analyse fait cependant abstraction des forces non transmises représentées par l'aire hachurée de la figure 1. Pour tenir compte de ces forces, il convient d'assurer l'équilibre entre les deux répartitions (élastique et élastoplastique) des contraintes. La taille r_p de la zone plastique doit être donc plus grande que. L'équilibre des forces entre les deux configurations conduit à :

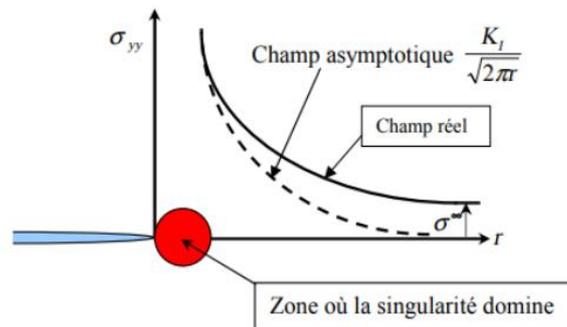


Figure 1. Répartition des contraintes élastiques et élastoplastiques dans le plan de la fissure de son extrémité

$$\int_0^{\infty} \sigma_y dr = \sigma_E r_p + \int_{r_E}^{\infty} \sigma_y dr \Rightarrow \sigma_E r_p = \int_0^{r_E} \sigma_y dr$$

Soit, compte tenu de l'expression de σ_y :

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 = 2r_E$$

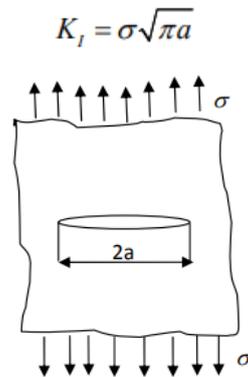
La distribution des contraintes dans la répartition élasto plastique pour $r > r_p$ est obtenue par une translation sur la distance E_r de la répartition élastique. Irwin rend compte de cette translation en définissant un FIC effectif obtenu en augmentant la longueur de fissure de E_r . Ce qui revient à considérer non pas la longueur réelle a de la fissure mais une longueur effective $a_{eff} = a + r_E$

Ainsi dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie chargée en mode I, le FIC sans correction $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, devient après correction :

$$K_{eff} = \sigma \sqrt{\pi(a+r_E)} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_E} \right)^2}}$$

➤ **Problème de Griffith**

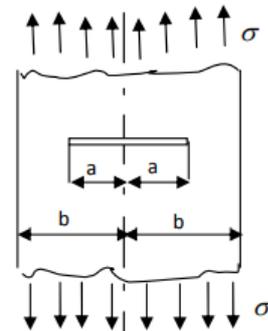
Ce se nom est désigné le problème élémentaire d'une fissure de longueur $2a$, dans une plaque infinie dans les deux directions chargée uniformément selon le mode I. Le facteur d'intensité de contrainte est dans ce cas :



- Problème de Griffith dans le cas d'une plaque de largeur finie

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \times f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1 - 0.5 \frac{a}{b} + 0.370 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 0.044 \left(\frac{a}{b}\right)^3}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}}$$

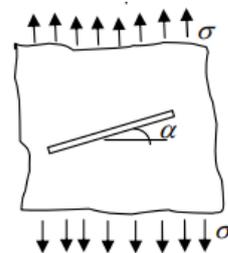


- Milieu infinie fissuré

$$K_I = \sigma \sin^2 \alpha \sqrt{\pi a}$$

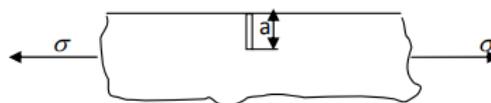
$$K_{II} = \sigma \cos \alpha \sin \alpha \sqrt{\pi a}$$

-critère de rupture en mode mixte : $\left(\frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{2K_{Ic}} \right)^2 = 1$



- Milieu semi fini fissuré

$$K_I = 1.1222 \sigma \sqrt{\pi a}$$



IV-3 Modèle de Dugdale-Barenblatt

La figure 2 illustre le modèle du Dugdale-Barenblatt, qui considère une fissure de longueur $a + r$ avec des contraintes de compression d'intensité la limite d'élasticité σ_E , qui s'exercent sur la longueur r près de chacune des extrémités. La longueur r représente la taille de la zone plastique. Lorsqu'on charge une structure fissurée, une zone plastique se forme à l'extrémité de la fissure. Lors de la décharge, le reste de la structure qui est resté élastique, exerce alors sur la zone plastique des contraintes de compression. $-\sigma_E$ si on suppose que le comportement du matériau est élastique plastique parfait.

La taille r de la zone plastique est ensuite calculée dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie ($K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi(a+r)}$).

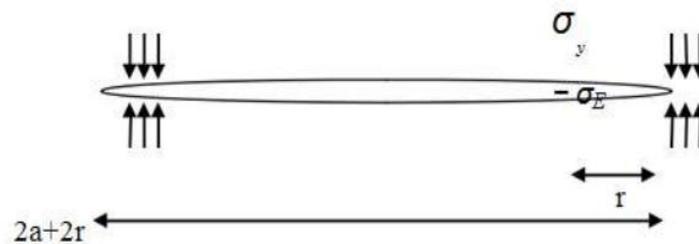


Figure 2. Modèle de Dugdale-Barenblatt

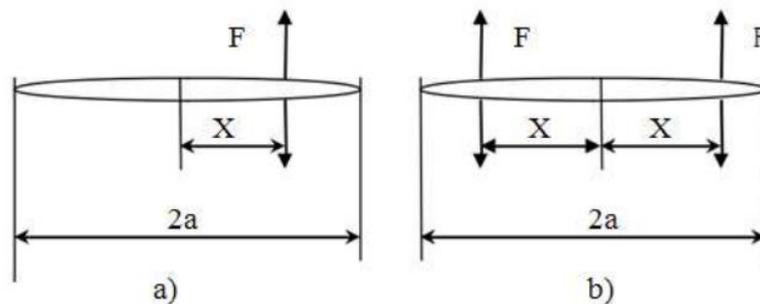


Figure 3. Fissure chargée en mode I par une paire de forces F appliquée

sur les lèvres à la distance x du centre de la fissure

Cette fonction a pour expression dans le cas du chargement de la figure 3 où F est une force par unité d'épaisseur :

$$Z(z) = \frac{F}{\pi(z-X)} \sqrt{\frac{a^2-X^2}{z^2-a^2}}$$

On en déduit aisément la fonction de Westergaard pour le chargement de la figure 3b, en remplaçant X par $-X$ et en additionnant les deux contributions, ce qui donne :

$$Z(z) = \frac{2Fz}{\pi(z^2-X^2)} \sqrt{\frac{a^2-X^2}{z^2-a^2}}$$

On calcule ensuite le FIC à l'extrémité +a, identique au FIC à l'extrémité -a, soit :

$$K_I(+a) = \lim_{z \rightarrow a} 2\pi \sqrt{(z-a)Z(z)} = 2F \sqrt{\frac{a}{\pi(a^2-x^2)}}$$

Dans le modèle de Dugdale-Barenblatt, on est en présence d'un chargement réparti sur la longueur ρ figure 2. Le calcul pour ce modèle du FIC (K_I), à partir des résultats obtenus précédemment se fait en remplaçant F par $-\sigma_E dx$ et a par $a+\rho$, et en sommant ensuite sur x variant de a à $a+\rho$, ce qui donne :

$$K_I = -2\sigma_E \sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}} \int_a^{a+\rho} \frac{dx}{\sqrt{(a+\rho)^2-x^2}}$$

Soit après intégration :

$$K_I = -2\sigma_E \sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}} \arccos \frac{a}{a+\rho}$$

Le calcul de la taille ρ de la zone plastique se fait ensuite par une application classique du principe de superposition, ce qui conduit à :

$$K_I + \sigma^\infty \sqrt{\pi(a+\rho)} = 0$$

Soit :

$$\frac{a}{a+\rho} \frac{\pi \sigma^\infty}{2\sigma_E}$$

La taille ρ de la zone plastique devient très grande lorsque la contrainte appliquée σ^∞ tend vers la limite d'élasticité σ_E du matériau. A l'inverse quand cette contrainte est faible par rapport à σ_E , un développement limité simple de la relation précédente conduit à :

$$\rho = \frac{\pi K_I}{8 \sigma_E}$$

Matériau	K_{Ic} (MPa \sqrt{m})	ΔK_s (MPa \sqrt{m})
acier haute résistance (ex : 35NCD16)	60	1 à 4
acier moyenne résistance (ex : 15MND6) ...		
... (basse température)	40	3
... (palier ductile)	200	8
alliages d'aluminium (ex : 7075)	30	1,5 à 4
alliages de titane (ex : TA6V)	80	2 à 8
composite verre-résine	7	
polyéthylène	6,5	
polystyrène	0,4	
résine époxyde	0,1	
verre	0,01	

Tableau 1. Valeur critique et seuil de K

IV-4 Formes de la zone plastique en fond de fissure

➤ Aspect théorique :

Dans le mode I, l'état de contrainte au voisinage immédiat du prolongement de la fissure est donnée par les équations de **Westergaard** obtenues dans le cadre de l'élasticité :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_z = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$$

Où k_I : facteur d'intensité de contrainte.

r, θ : coordonnées polaires d'un point en avant de la fissure.

En contrainte plane, σ_z est nul et puisque σ_x n'intervient pas.

Pour $\theta = 0$ on a :
$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}}$$

Au cours de la traction, la contrainte σ_y atteindra localement la limite d'élasticité et il y aura la plastification à fond de fissure dans une zone, telle que :

$$\sigma_y = \sigma_e = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}}$$

- **Irwin** définit ainsi le rayon (r_p) d'une zone plastifiée à fond de fissure, dans le mode I, et en contrainte plane :

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_e^2}$$

Ce modèle simple prévoit que la section de la zone plastifiée est un cercle.

- **Irwin** définit ainsi le rayon (r_p), en déformation plane :

$$r_p = \frac{K_I^2}{6\pi\sigma_e^2}$$

Qui montre que la zone plastifiée est plus petite en déformation plane qu'en contrainte plane.

- **Rice** trouve que :

En déformation plane :
$$r_{py} = 0,15 \frac{K_I^2}{\sigma_e^2}$$

$$r_{px} = 0,036 \frac{K_I^2}{\sigma_e^2}$$

Les dimensions de la zone plastifiée calculées par **Rice** sont assez voisines de celles mesurées expérimentalement.

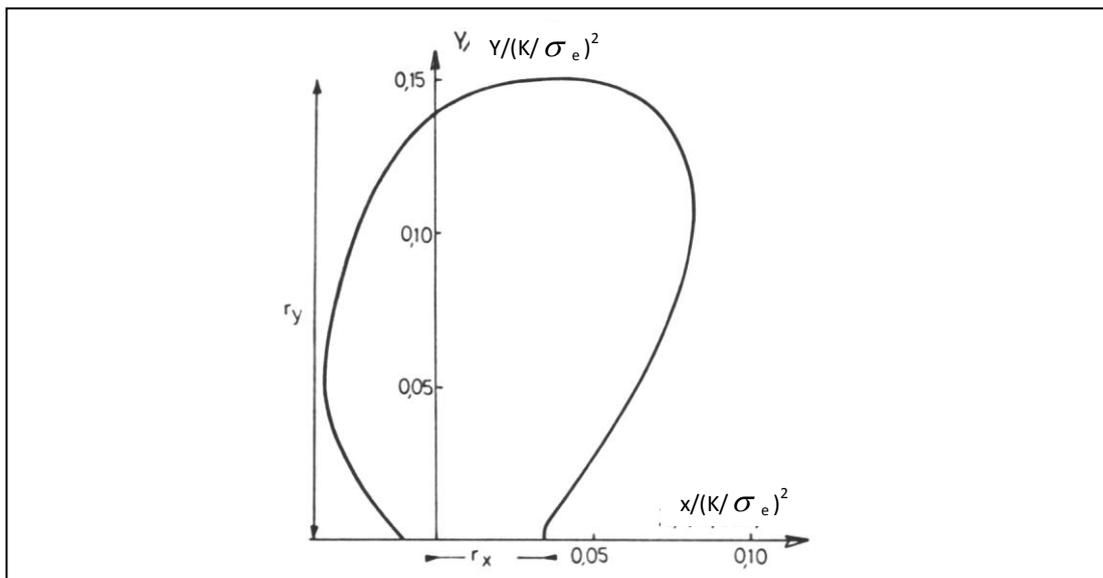


Figure 4. Zone plastifiée par Rice

- **Banks** et ont effectué une étude sur la forme et la taille de la zone plastifiée est exprimée par la relation suivante :

$$r_p = \alpha \left(\frac{K_I^2}{\sigma_e^2} \right)$$

α est un paramètre fonction de l'angle θ et de l'état de contraintes :

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} (1 + \cos\theta + \frac{3}{2} \sin^2\theta)$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \left[(1 - 2\theta)^2 (1 + \cos\theta) + \frac{3}{2} \sin^2\theta \right]$$

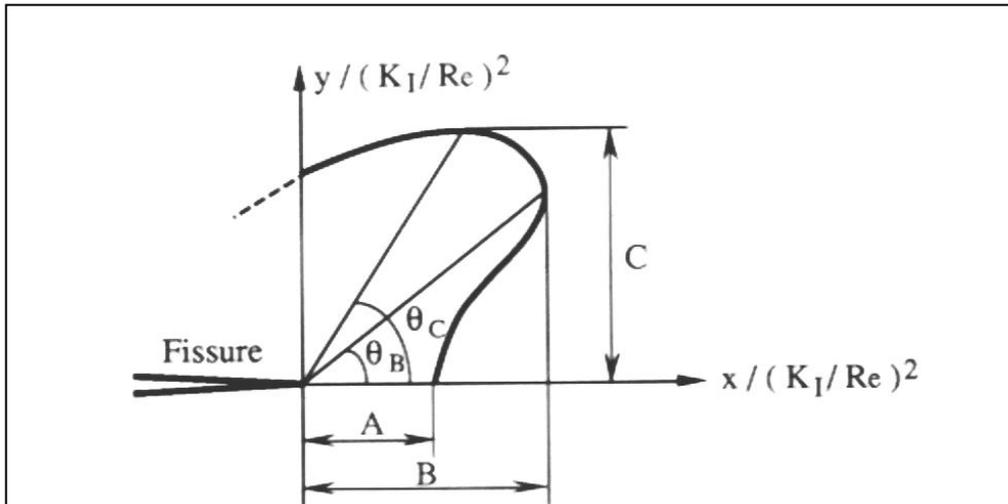


Figure 5. Définitions des valeurs particulières de α selon Banks

Les Valeurs particulières de α sont reportées dans le tableau 2.

Etat de contrainte	Valeurs de α		
	A	B	C
C.P	$1/2\pi$ ($\theta_A=0$)	$1/2\pi$ ($\theta_B=0$)	$\pm 0,205$ ($\theta_C= \pm 80^\circ$)
D.P	$\pm 0,0175$ ($\theta_A=0$)	$\pm 0,054$ ($\theta_B= \pm 51^\circ$)	$\pm 0,129$ ($\theta_C= \pm 89^\circ$)

Tableau 2. Valeurs particulières de α

- Tresca définit le rayon d'une zone plastifiée:

- Etat de contraintes planes :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

pour $\theta = 0$:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2$$

- Etat de déformation planes :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_E} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[[1 - 2\nu] + \sin \frac{\theta}{2} \right]^2$$

- Von Mises définit ainsi le rayon r_p :

- Etat de contraintes planes :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\delta_{CP} = \frac{k_I^2}{2\pi\sigma_e^2}$$

pour $\theta = 0$:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2$$

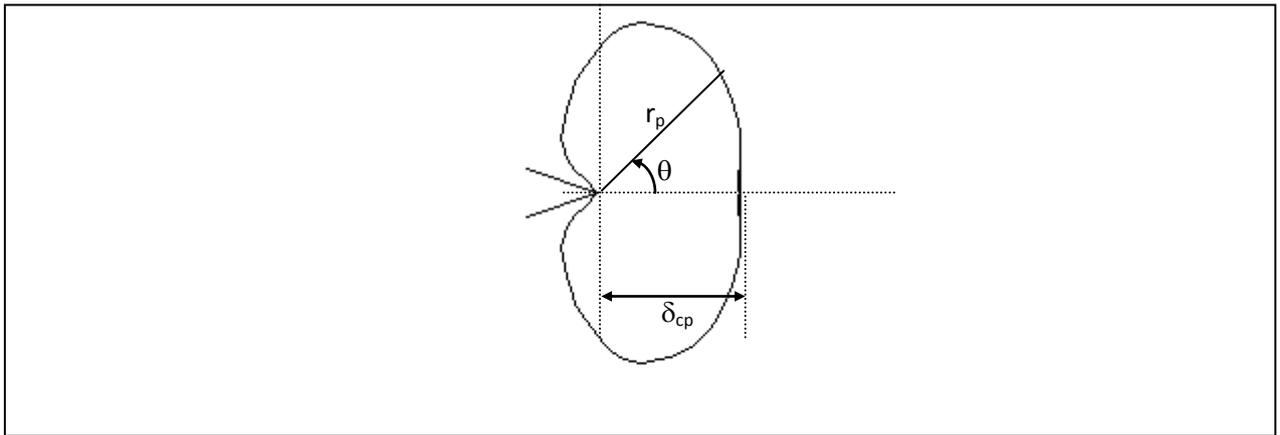


Figure 6. Zone plastifiée de Von Mises - Contraintes planes-

- *Etat de déformations planes :*

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_e^2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[[1 - 2\nu]^2 + 3 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\delta_{DP} = \frac{k_I^2 [1 - 2\nu]^2}{2\pi\sigma_e^2}$$

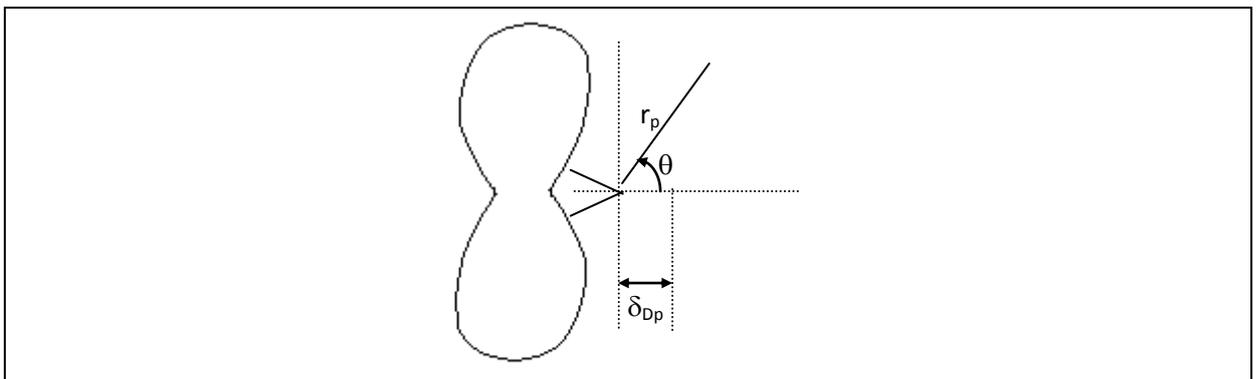


Figure 7. Zone plastifiée de Von Mises - Déformation planes-

- Dugdale – Barenblatt :

La zone plastique existant à fond de fissure a une longueur r_p :

$$r_p = \frac{\pi}{8} \left(\frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2$$

La zone plastifiée à fond de fissure de fatigue sera principalement modifiée par la fermeture de la fissure à chaque cycle.

Lors de l'ouverture de la fissure il y a plastification lorsque la limite d'élasticité est atteinte localement et que, lors de la fermeture, c'est une amplitude de la contrainte égale au double de la limite d'élasticité qui induira une nouvelle déformation plastique à l'intérieur de la zone plastifiée pendant l'ouverture de la fissure. On trouve donc en fatigue, une double zone plastifiée. Le rayon de la zone plastifiée périphérique est de la forme $(k_{\max}/\sigma_e)^2$ alors que celui de la zone centrale est en $(\Delta k/2\sigma_e)^2$.

Par conséquent, la zone plastifiée centrale OR est quatre fois plus petite que la zone plastifiée périphérique OM, figure 8.

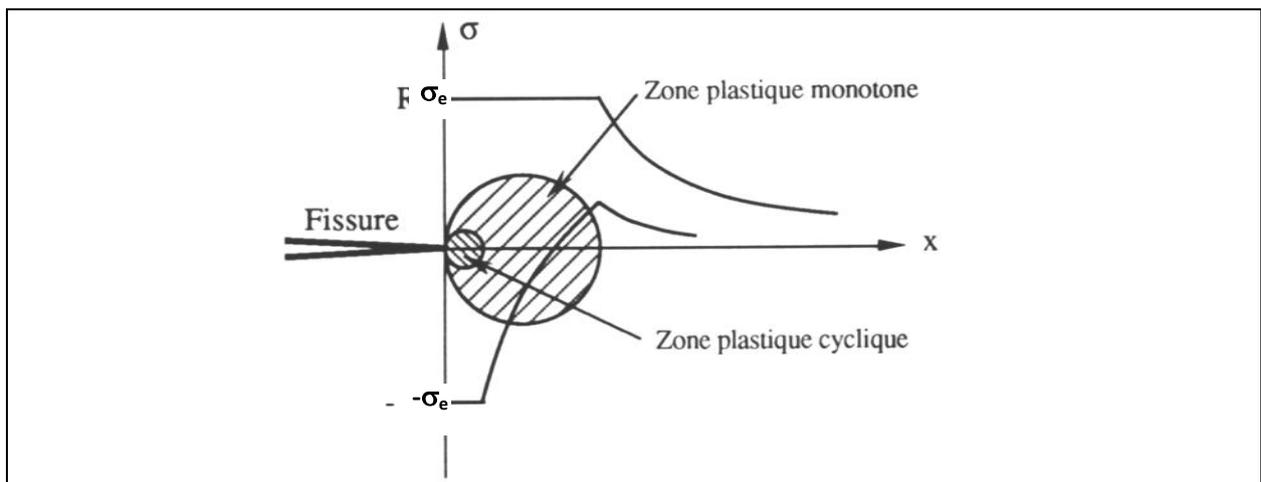


Figure 8. Mécanisme de la plastification

En résumé, en avant d'une fissure par fatigue on trouve trois zones :

- Une première zone, la plus éloignée du fond de fissure, dans laquelle les déformations sont essentiellement élastiques.
- Une deuxième zone, plastifiée lors de l'ouverture de la fissure, dans laquelle les déformations sont faibles et uniformes.
- Une troisième zone où l'amplitude de la contrainte est de l'ordre de $2\sigma_e$.

➤ **Tentatives expérimentales :**

- **Rice** définit la zone plastique :

- En déformation plane : $r_p = 0,15 \frac{K_I^2}{\sigma_e^2}$
- En contrainte plane : $r_p = 0,40 \frac{K_I^2}{\sigma_e^2}$
- Mode de détermination : par calcul.

- **Hutchinson- lal Grag** trouve aussi :

- En contrainte plane : $r_p = 0,32 \left(\frac{K_I^2}{\sigma_e^2} \right)^{\frac{1+n}{1+3n}}$
- *Matériaux* : solide de coefficient d'écroutissage n.
- *Mode de détermination* : par calcul.

- **Hahn- Rosefeild** trouve que :

- En déformation plane : $r_p = 0,13 \left(\frac{K_I^2}{\sigma_e^2} \right)$
- *Matériaux* : acier au silicium.
- *Mode de détermination* : par métallographie.

- **Bathias** définit ainsi r_p :

- En déformation plane : $r_p = 0,5 \text{ à } 0,1 \left(\frac{K_I^2}{\sigma_e^2} \right)$
- *Mode de détermination* : micro dureté.

- **Pineau** trouve que :

- En déformation plane : $r_p = 0,06 \left(\frac{K_I^2}{\sigma_e^2} \right)$
- *Mode de détermination* : métallographie.

- **Lank ford – Davidson** :

- En contrainte plane : $r_p = 0,145 \left(\frac{K_I^2}{\sigma_e^2} \right)$

- Matériaux : 6061 T6
- Mode de détermination : contraste cristallin.

➤ **Effet de confinement plastique :**

Considérons une éprouvette en milieu bidimensionnel d'épaisseur (**e**) soumise à un effort axial. La zone plastique se trouve insérée dans une matrice élastique qui restreint les possibilités d'écoulement plastique, c'est l'effet de confinement plastique.

Cet effet intervient aussi latéralement et a pour conséquence de limiter l'extension de la zone plastique sur les bords, cet effet de confinement est diminué du fait de la surface libre, cela conduit à une grande zone plastique et à un état de contraintes planes.

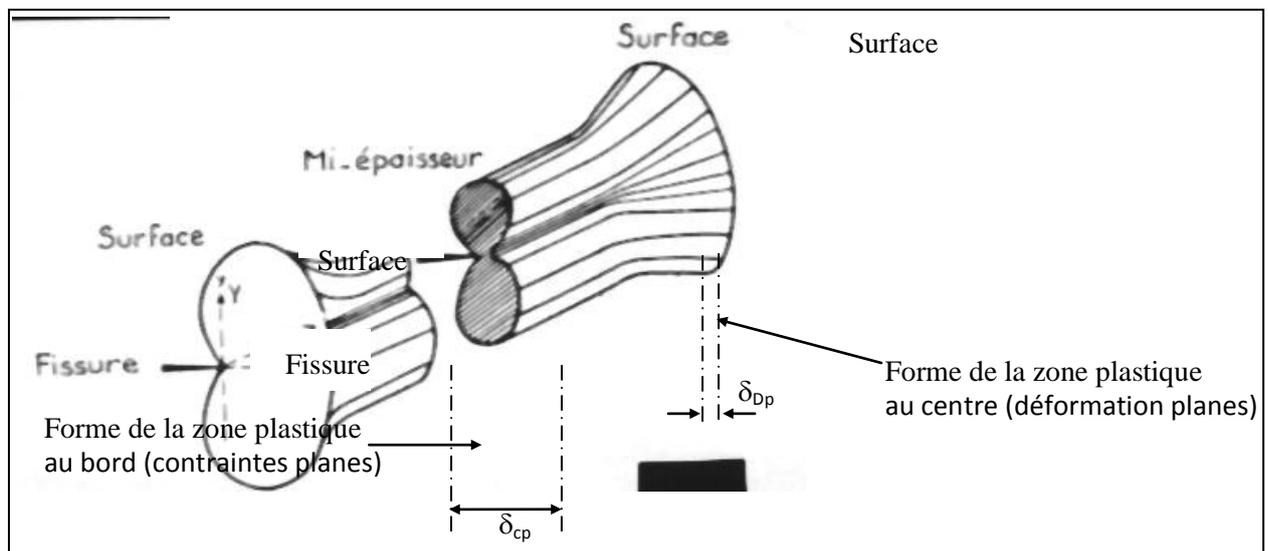


Figure 9. *Forme de la zone plastique en milieu bidimensionnel*