

Chapitre 1: Contraintes dans le sol

1.1 Notions des contraintes

Soit un solide à la surface duquel s'exercent des forces.

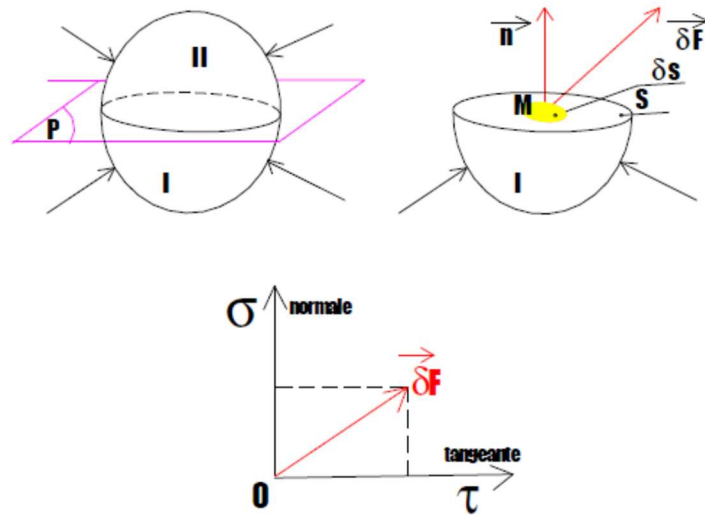


Fig1.1 Notions des contraintes

En coupant ce solide par un plan fictif (P), l'élément de surface « ds », autour du point « M » sur la surface « S », est soumis à une force δF (fig 1.1). La contrainte au point « M » est le vecteur $f = \delta F / \delta S$.

Cette contrainte se décompose en une contrainte normale σ et une contrainte tangentielle τ

En mécanique des sols, pour déterminer l'état de contraintes autour d'un point « M » dans le sol, il suffit de connaître les composantes des forces s'exerçant sur les faces d'un parallélépipède centré autour du point « M » et dont les arêtes sont parallèles aux axes Ox, Oy, Oz.

L'état de contraintes au point M est défini par une matrice symétrique appelée tenseur de contraintes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Parmi les facettes autour du point M, il existe 3 plans privilégiés pour lesquels la contrainte tangentielle est nulle ($\tau = 0$). Ces 3 plans sont appelés **plans principaux**,

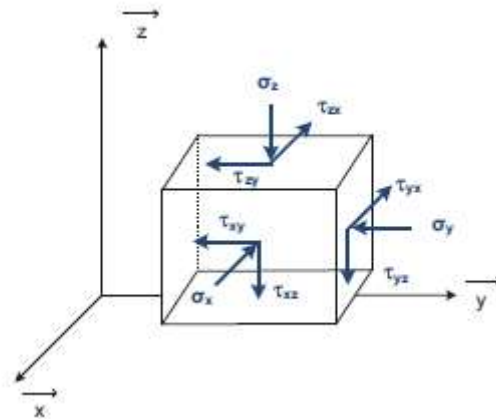


Fig. 1.2 Etat de contrainte en un point- représentation 3d

Leurs directions normales, **directions principales** et les contraintes correspondantes, **contraintes principales**, notées

σ_1 : Contrainte principale majeure.

σ_2 : Contrainte principale intermédiaire.

σ_3 : Contrainte principale mineure.

Avec : **$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$**

1.2 Cercle de Mohr

Pour étudier l'état de contraintes autour d'un point, on utilise une représentation appelée diagramme de Mohr qui consiste à représenter le vecteur contrainte f dans un système d'axes (σ, τ) .

Dans le cas bidimensionnel, cas très fréquent en géotechnique, le cercle de Mohr est le lieu des extrémités des vecteurs contraintes et les contraintes principales se réduisent à deux.

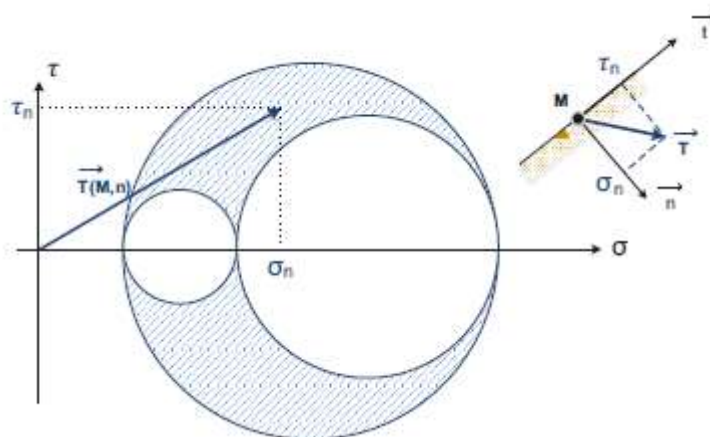


Fig. 1.3 Vecteur contrainte représentation de Mohr.

1.2.1 Méthode analytique

Dans le système de repère (Ox, Oy) le tenseur de contraintes s'écrit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

La condition de nulleté du moment résultant : $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ c.à.d $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ Connaissant les contraintes sur les facettes de normales ox et oz, on peut déterminer les contraintes sur n'importe qu'elle autre facette inclinée d'un angle « θ »

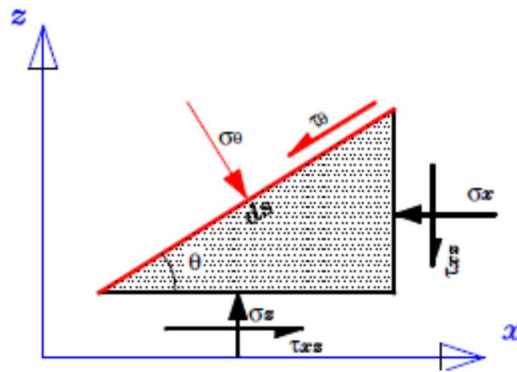


Fig 1.2 Etat de contrainte en un point.

Si l'on écrit la première condition d'équilibre (somme des forces est nulle), on aura l'état de contrainte sur le plan incliné de « θ »

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xz} \sin(2\theta) \right) \\ \left(\tau_\theta &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xz} \cos(2\theta) \right) \end{aligned}$$

Le lieu de contraintes dans le plan (σ, τ) est défini par la relation :

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos(2\theta) \right) \\ \left(\tau_\theta &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin(2\theta) \right) \end{aligned}$$

C'est l'équation d'un cercle (cercle de Mohr):

- centre de coordonnées $d = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

- Rayon du cercle $r = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Il existe donc deux plans principaux dont l'orientation est donnée par θ_1 et θ_2 . Les contraintes principales majeure et mineure sont déterminées à partir de l'équation du cercle

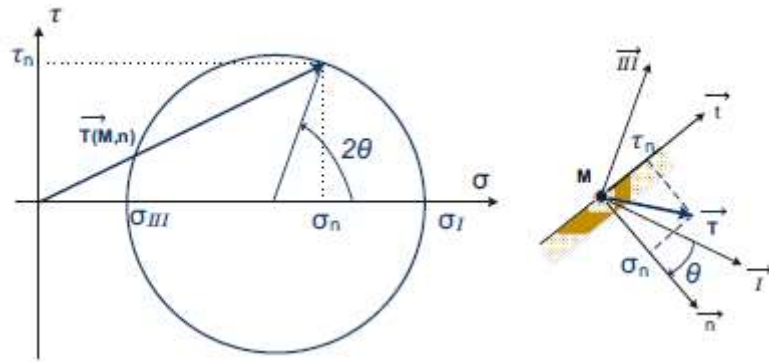


Fig. 1.3 Cas bidimensionnel. Représentation de Mohr. Si la facette considérée est inclinée d'un angle θ par rapport à la première direction principale, le point correspondant dans le cercle sera situé à un angle 2θ de la contrainte σ_I

A noter que, si les directions x et z sont principales ($\sigma_x = \sigma_3$; $\sigma_z = \sigma_1$ et $\tau_{xz} = 0$) on trouve :

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos(2\theta) \dots \dots \dots (1)$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(2\theta) \dots \dots \dots (2)$$

1.2.2 Méthode graphique

Il s'agit de déterminer l'état de contraintes sur le plan incliné d'un angle θ et dont les valeurs des contraintes principales σ_1 et σ_3 sont connues (fig 1.4)

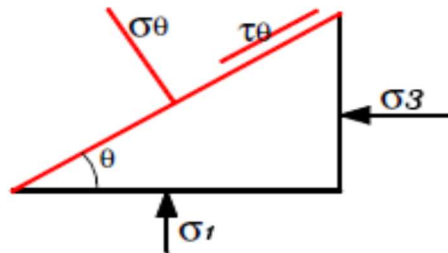


Fig. 1.4 Etat de contrainte sur le plan incliné d'un angle θ .

La démarche utilisée pour résoudre ce problème est la suivante :

- De σ_1 , on trace une parallèle au plan de σ_3
- De σ_3 , on trace une parallèle au plan de σ_1
- L'intersection des deux plans donne le pôle « P »
- Du pôle « P », on trace la parallèle à la facette sur laquelle on veut trouver l'état de contraintes (σ_θ et τ_θ)
- L'intersection de cette droite avec le cercle donne σ_θ et τ_θ

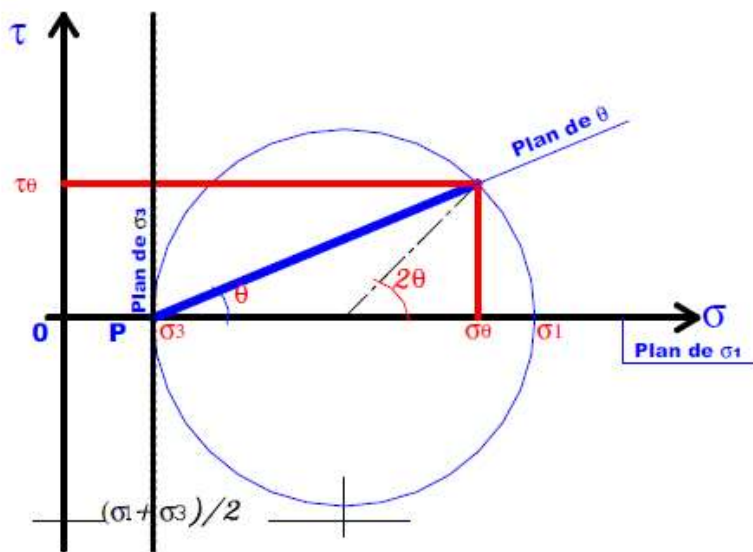


Fig. 1.5 Représentation de Mohr sur une facette inclinée.

On doit souligner enfin que, en mécanique des sols, on adopte la convention de signes suivante:

- $\sigma > 0$ en compression
- $\sigma < 0$ en traction

1.3 Contraintes dues au poids propre du sol

Le poids du sol augmente avec la profondeur ; réparti sur une unité de surface horizontale à une profondeur donnée, il correspond à la pression ou contrainte due au poids propre.

Pour un sol de poids volumique γ (en kN/m³), et à une profondeur z (en m), la contrainte verticale est :

$$\sigma_v = \gamma \cdot z \dots\dots\dots(3)$$

1.3.1 Cas d'un sol sec

Le poids volumique intervenant dans le calcul de la contrainte est γ_d .

Dans le cas d'un sol stratifié en plusieurs couches de différents poids volumiques et différentes hauteurs :

$$\sigma_v = \sum \gamma_{di} \times h_i \dots\dots\dots(4)$$

1.3.2 Cas d'un sol saturé

Noyé dans l'eau interstitielle, l'élément de sol est allégé d'un poids équivalent au poids volumique de l'eau multiplié par son propre volume. Ainsi la contrainte totale sera (σ_v) supportée par le squelette solide et l'eau.

D'après la loi de Terzaghi :

$$\sigma_v = \sigma'_v + u \dots\dots\dots(5)$$

u : pression interstitielle, $u = \gamma_w \times h_w \dots\dots\dots(6)$

σ'_v : contrainte effective transmise au squelette solide.

NB : Le poids volumique intervenant dans le calcul de la contrainte totale est γ_{sat} .

$$\sigma'_v = \sigma_v - u = \gamma' \times z \dots\dots\dots(7)$$

γ' : poids volumique déjaugé = $\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w$

Exemple : Traçons les diagrammes de variation de σ_v , σ'_v et u en fonction de la profondeur

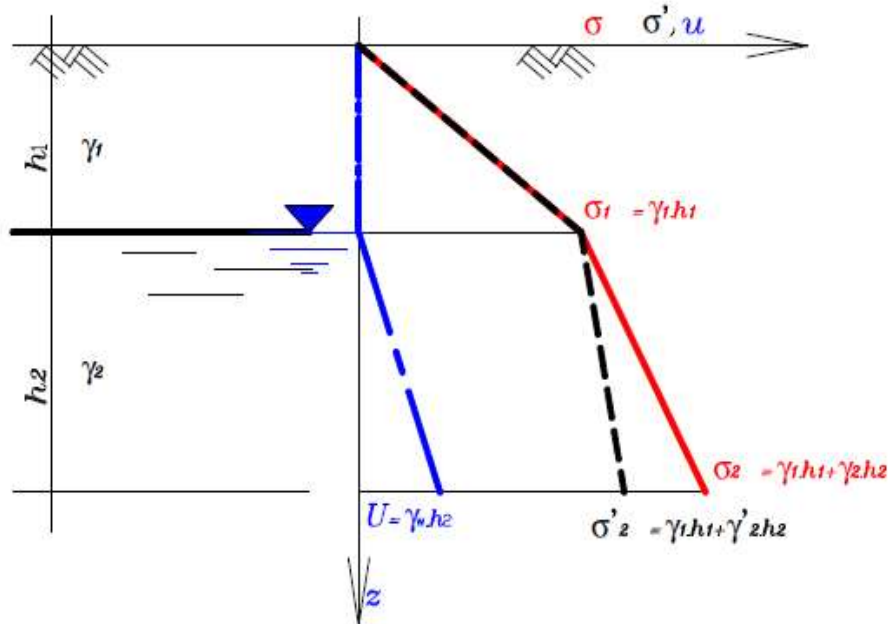


Fig 1.6 Diagrammes de Variation des contraintes totales, effectives et interstitielles en fonction de la profondeur.

1.4 Contraintes dues aux surcharges

Les dépôts de sol sont normalement stables, à moins que des circonstances naturelles ou un chargement artificiel ne contribuent à y accroître les contraintes effectives et qu'un tassement s'en résulte. On sait qu'un abaissement de la nappe augmente la contrainte effective, mais divers types de surcharges induisent également des contraintes ($\Delta\sigma$) dans le sol. Il s'agit :

- Des charges ponctuelles.
- Des charges uniformément réparties sur les surfaces rectangulaires et circulaires.
- Des charges en forme de remblai de longueur supposée infinie

1.4.1 Cas d'une surcharge ponctuelle Q

En considérant le sol comme milieu semi-infini élastique non pesant, la contrainte verticale due à la force ponctuelle Q est calculée d'après la formule de Boussinesq :

$$\Delta\sigma = \frac{3Q}{2\pi} \times \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

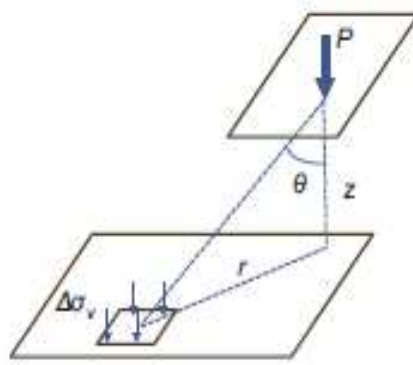


Fig.1.7 Charge concentré dans un massif

Cette équation peut s'écrire sous une forme plus simple : $\Delta\sigma = I_z (Q/z^2)$, où I_z est un facteur d'influence de contrainte verticale déterminé en fonction de r/z par des abaques.

Tableau 1.1 Valeurs d' I_z sous une charge ponctuelle.

r/z	I_z	r/z	I_z	r/z	I_z
0.00	0.476	0.80	0.139	1.60	0.020
0.10	0.466	0.90	0.108	1.70	0.016
0.20	0.433	1.00	0.084	1.80	0.013
0.30	0.385	1.10	0.066	1.90	0.011
0.40	0.329	1.20	0.051	2.00	0.009
0.50	0.273	1.30	0.040	2.20	0.006
0.60	0.221	1.40	0.032	2.40	0.004
0.70	0.176	1.50	0.025	2.50	0.003

1.4.2 Cas d'une surcharge uniformément répartie sur toute la surface q

Dans ce cas et quelle que soit la profondeur z, on a : $\Delta\sigma = q \times I$ (8)

1.4.2.1 Cas d'une surcharge circulaire uniforme q

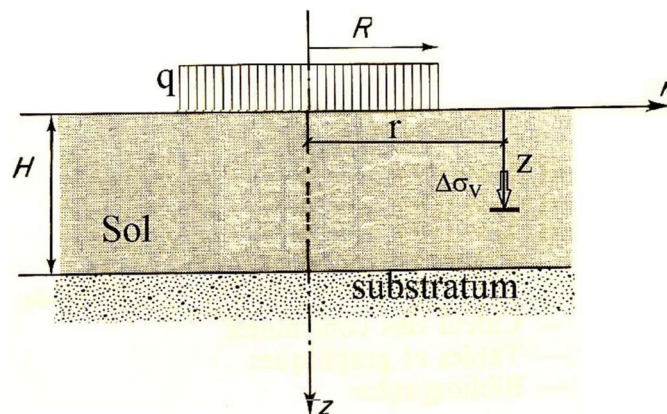


Fig. 1.8 Schéma de surcharge circulaire en surface du sol

$$\Delta\sigma = q \times \left(1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)}\right)$$

Ou bien : $\Delta\sigma = I_z q$ (I_z : facteur d'influence fonction r/R et z/R).

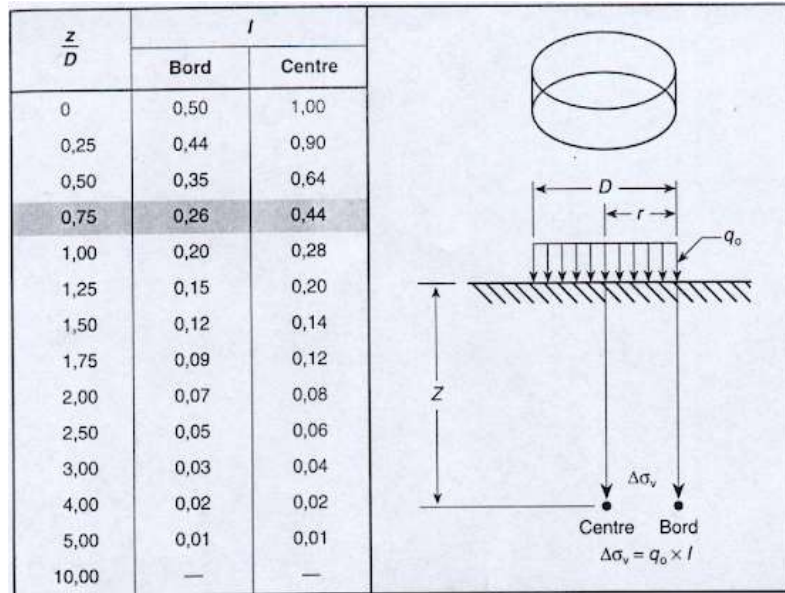
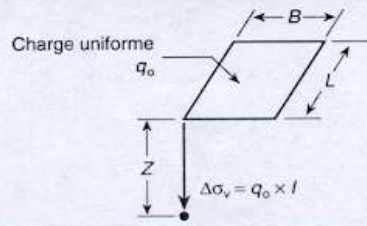


Fig. 1.9 Coefficient d'influence d'une charge sous le centre et sous le bord d'une semelle circulaire chargée uniformément.

1.4.2.2 Cas d'une surcharge rectangulaire uniforme q

Sous l'effet d'une charge rectangulaire de largeur « b » et de longueur « l », la contrainte induite $\Delta\sigma$ sous l'un des coins de cette charge, est donnée par : $\Delta\sigma = q \times I_z$

I_z : facteur d'influence fonction de b/z et l/z . donné par la figure 1.10



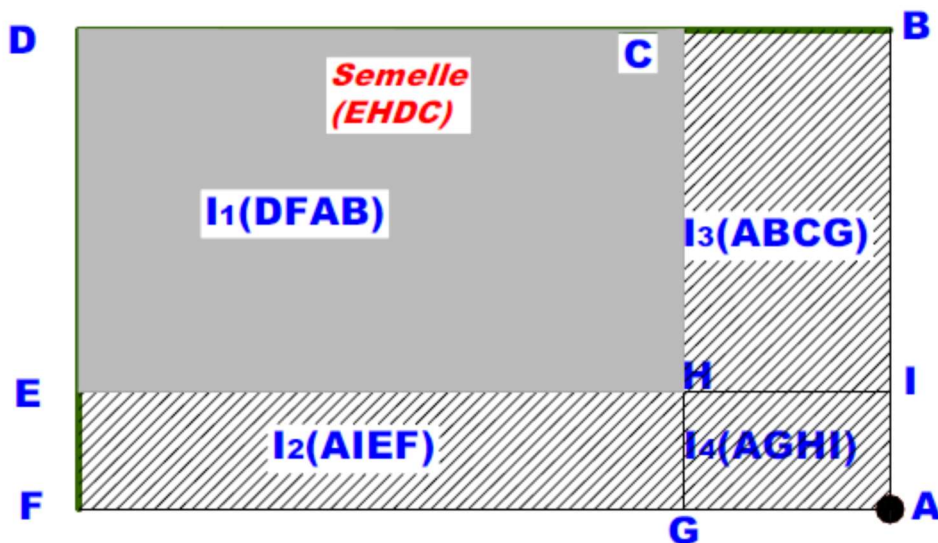
$\frac{l}{z}$	$\frac{B}{z}$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3	∞
0,1	0,005	0,009	0,013	0,017	0,020	0,022	0,024	0,026	0,027	0,028	0,031	0,032	0,032
0,2	0,009	0,018	0,025	0,033	0,039	0,043	0,048	0,050	0,053	0,055	0,060	0,061	0,062
0,3	0,013	0,025	0,037	0,048	0,056	0,065	0,068	0,073	0,077	0,081	0,088	0,089	0,090
0,4	0,017	0,033	0,048	0,060	0,071	0,080	0,087	0,093	0,098	0,101	0,113	0,114	0,115
0,5	0,020	0,039	0,056	0,071	0,085	0,097	0,106	0,111	0,118	0,120	0,136	0,138	0,139
0,6	0,022	0,043	0,065	0,080	0,097	0,107	0,120	0,125	0,136	0,139	0,153	0,156	0,157
0,7	0,024	0,048	0,068	0,087	0,106	0,120	0,132	0,140	0,148	0,154	0,169	0,172	0,173
0,8	0,026	0,050	0,073	0,093	0,111	0,125	0,140	0,146	0,156	0,164	0,181	0,183	0,185
0,9	0,027	0,053	0,077	0,099	0,118	0,136	0,148	0,156	0,166	0,172	0,191	0,195	0,196
1	0,028	0,055	0,081	0,101	0,120	0,139	0,154	0,164	0,172	0,179	0,200	0,203	0,205
2	0,031	0,060	0,088	0,113	0,136	0,153	0,169	0,181	0,191	0,200	0,232	0,237	0,240
3	0,032	0,061	0,089	0,114	0,138	0,156	0,172	0,183	0,195	0,203	0,237	0,244	0,247
∞	0,032	0,062	0,090	0,115	0,139	0,157	0,173	0,185	0,196	0,205	0,240	0,247	0,250

Fig. 1.10 valeurs de I_z pour une semelle rectangulaire b.l

La contrainte à la verticale d'un point quelconque s'obtient en construisant à partir du rectangle et du point, des rectangles ayant chacun un sommet au point considéré. La contrainte cherchée est la somme algébrique des contraintes produites par les rectangles.

Exemple :

Pour calculer $\Delta\sigma$ à la verticale du point A sous l'effet de la pression « q » de la semelle EHDC, on utilise la méthode de découpage $\Delta\sigma = [Iz1 - (Iz2 + Iz3) + Iz4]q$

Fig. 1.11 Méthode de découpage pour le calcul de $\Delta\sigma$

1.4.2.3 Cas d'un remblai semi-infini

Pour un remblai de hauteur H_r et de poids volumique γ_r , la contrainte verticale est : $\Delta\sigma = I_z q$

Avec : $q = \gamma_r \cdot H_r$

I_z : facteur d'influence donné par le tableau 1.2 en fonction de a/z et b/z .

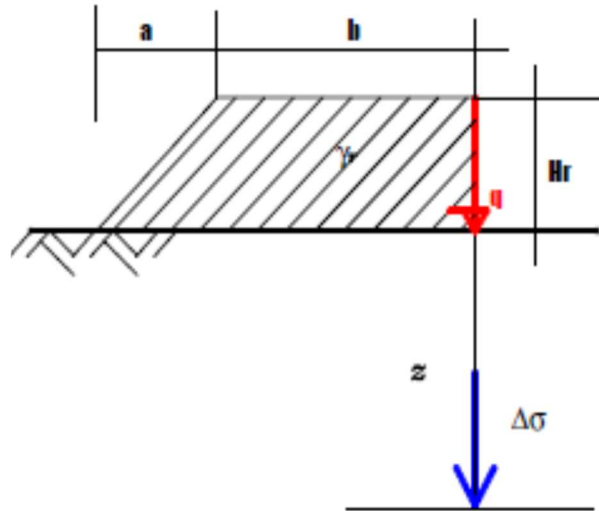


Fig 1.12 Schéma d'une surface trapézoïdale symétrique.

Tableau 1.2 Valeurs de I_z pour un remblai semi-fini.

a/z	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5	1
b/z						
0.0	0.00	0.01	0.03	0.10	0.15	0.26
0.2	0.13	0.14	0.16	0.22	0.25	0.33
0.4	0.23	0.24	0.25	0.30	0.33	0.38
0.6	0.32	0.32	0.33	0.36	0.38	0.41
0.8	0.37	0.37	0.38	0.40	0.41	0.45
1.0	0.41	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45
1.2	0.44	0.44	0.44	0.45	0.46	0.47
1.4	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.48
1.6	0.47	0.47	0.47	0.47	0.48	0.49
2.0	0.48	0.48	0.48	0.48	0.49	0.49
3.0	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.50

1.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de regrouper d'une manière générale les différentes méthodes de calcul des contraintes au sein d'un massif de sol, en distinguant celles dues au poids du sol, et due à une surcharge répartie ou concentré.

QUESTIONS A DEBATTRE

1. Pourquoi les contraintes verticales et horizontales sont-elles la plupart du temps associées aux contraintes principales ?
2. Que représente le cercle de Mohr ?
3. Si une surcharge est appliquée à la surface d'un sol, comment peut-on évaluer son influence à une profondeur donnée ?