UDBKM Faculté de ST 2024-2025
S5 LMD Physique Statistique

TD 4

Exercice 1 :

On s'intéresse aux fluctuations du nombre N de particules contenues dans un sous-volume V d'un fluide (gaz ou liquide). On suppose le fluide en contact avec un thermostat qui fixe la température T. on rappelle que la grande fonction de partition de l'ensemble grand-canonique s'écrit

$$\Xi(T,\mu,V) = \sum_l e^{-\beta(E_l-\mu N_l)}$$

Avec l un indice pour les micro-états d'energie E_l et de nombre de particules N_l .

1- Montrer que le nombre moyen de particules vaut $\langle N\rangle = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\mu} ln\, \Xi\right)$ et que les fluctuations valent

$$\Delta N^2 = \langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} ln\, \Xi\right) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\langle N\rangle\right)_{T,V}$$

2- Dans cette question uniquement, on note $N \equiv \langle N\rangle$ car on ne s'intéresse qu'à des relations valables à la limite thermodynamique. Montrer que :

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial N}\right)_{T,V} =-\frac{V}{N}\left(\frac{\partial\mu}{\partial V}\right)_{T,N} \; et \; \left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{T,V} =-\frac{V}{N}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T,N}$$

A partir de l'identité $dF =- SdT - pdV + \mu dN$ justifiez que $\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{T,V}$ =-$\left(\frac{\partial\mu}{\partial V}\right)_{T,N}$

3- En déduire que l'on peut écrire

$$\Delta N^2 = k_B T\, n\, \langle N\rangle\chi_T$$

Avec χ_T la compressibilité isotherme définie par $\chi_T =-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N}$ et $n = \frac{\langle N\rangle}{V}$ la densité moyenne dans le fluide.

Exercice 2 :

On considère un Gaz Parfait classique de volume V en contact avec un réservoir de chaleur et de particules à la température T et de potentiel chimique μ.

1. Montrer que l'on peut mettre la fonction de partition grand-canonique sous la forme $\Xi = \mathrm{K}\, \mathrm{Z(N,V,T)}$ où Z(N, V, T) est la fonction de partition canonique et K un terme dont on donnera l'expression ;
2. Donner l'expression de la fonction de partition Z(N, V,T). En déduire que Ξ peut se mettre sous la forme exp(z z_c) où $z_c$est la fonction de partition particulaire canonique que l'on calculera et z un terme à déterminer ; z est appelé fugacité ;
3. Calculer le nombre moyen de particules < N > en fonction de z_c et z ainsi que l'énergie moyenne < E > du gaz.
4. Montrer que l'on retrouve l'expression de l'équation d'état des gaz parfaits.

Exercice 3 :

Le grand potentiel d'un gaz parfait monoatomique vaut : $\Psi =-\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} V(kT)^{3/2} e^{\mu/kT}$

Calculer la pression, le nombre moyen de particules, le potentiel chimique, l'énergie interne, l'équation d'état du gaz ainsi que son entropie.

Exercice 4 :

On considère un gaz de particules identiques, indépendantes, non relativistes, à 1,2 et 3dimensions. Trouver les relations entre l'énergie moyenne et le grand potentiel dans l'approximation thermodynamique (taille macroscopique, nombre de particules élevé) dans les cas :

- De fermions ;
- De bosons ;
- De l'approximation classique (température élevé, faible densité)

Exercice 5:

La densité d'energie par unité de volume emis par un corps noir dans l'intervalle des longueurs d'onde $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ est donnée par la formule de planck

$$dU_\lambda = u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{Exp\left[\frac{hc}{\lambda kT}\right] - 1}$$

Trouver la longueur d'onde crrespondant a la valeur maximale de la densité d'energie par unité de longueur d'onde u_λ