

TD 2

Exercice 1 :

Dans le cas d'un gaz parfait, dans le cadre du formalisme microcanonique on admet que la densité d'état pour des les molécules indiscernables ayant une énergie qui fluctue entre E et $E + \delta E$ s'écrit

comme : $\rho(N, V, E) = C = \frac{1}{N! h^{3N}}$ pour $E < H(p, q) < E + \delta E$

la fonction de partition $Z_m(N, V, E)$ pour gaz qui occupe un volume géométrique V avec un nombre

de molécules N et d'une énergie E est donnée par $Z(N, V, E) = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} \frac{3N}{2} \frac{\delta E}{E}$

1- Dédurre l'expression de l'entropie microcanonique S_m .

En utilisant l'approximation de Stirling pour $N \gg$ pour calculer :

$$\ln \left(\Gamma \left(\frac{3N}{2} + 1 \right) \right) \approx \frac{3N}{2} \ln \frac{3N}{2} - \frac{3N}{2} \text{ et en négligeant les termes } \frac{1}{N} \text{ et } \frac{\ln N}{N}$$

1- monter qu'on peut réduire S_m à l'expression suivante :

$$S_m = N k_B \left[\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi m \varepsilon}{3(n \cdot h^3)^{2/3}} \right) \right]$$

Où k_B et h sont les constantes de Boltzmann et de Planck, respectivement. Avec la densité de particules définie comme : $n = \frac{N}{V}$ et l'énergie par particule $\varepsilon = \frac{E}{N}$.

2- Dédurre l'équation d'état d'un gaz parfait, d'après la définition de la pression pour un système microcanonique.

3- Quelle l'énergie d'une particule libre ?

4- Montrer que le potentiel chimique est donné par : $\mu = -\frac{3}{2} k_B T \ln \left(\frac{4\pi m \varepsilon}{3(n \cdot h^3)^{2/3}} \right)$

Exercice 2 :

1- Une particule libre de masse m et de spin nul est enfermée dans une boîte cubique de volume V , le système est isolé et l'énergie de la particule est comprise entre

E et $E + \delta E$. On suppose que l'énergie de la particule, donnée par l'expression $E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$, est suffisamment élevée pour que l'on puisse dénombrer de façon classique les micro-états accessibles.

2- Définir l'espace de phase associé a la particule. Soit un point : $\{X\}, \{P\}$ de cet espace. Pour

un point quelconque de coordonnées $\{X\}$ et $\{P\}$, on définit la fonction : $H(X, P) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$

Donner l'expression permettant de calculer le nombre $\Omega(E)$ de micro-état accessibles à la particule.

Calculer $P_i \frac{\partial H}{\partial P_i}$. montrer que dans le cas particulier que nous étudions, on peut exprimer ce terme en fonction de H

Exercice 3 :

On considère un système isolé de N particules discernables réparties sur deux niveaux d'énergie $-\varepsilon/2$ et $\varepsilon/2$. On suppose qu'on a N_1 particules sur le niveau le plus bas et N_2 sur l'autre.

1°) Quel est le nombre de configurations possibles W de cet état ?

2°) L'énergie du système est E .

a) Ecrire N_1 et N_2 puis l'entropie S en fonction de E .

b) Déterminer la température T de ce système.

- c) Déterminer N_1 et N_2 en fonction de la température T . Considérer les cas limites haute et basse température pour N_1 et N_2 .
- d) On considère l'entropie S . Etudier les cas limites haute et basse température.

Exercice 4:

On se propose d'étudier un gaz parfait classique. Ce gaz est composé de N molécules contenues dans un volume V . Le gaz est isolé avec une énergie E .

- 1- Montrer que le nombre d'états d'énergie inférieure ou égale à E est donnée par $AV^N E^{3N/2}$ où A est une constante qu'on ne déterminera pas. En déduire le nombre d'états d'énergie N sachant que $N \gg 1$.
- 2- Calculer l'entropie microcanonique du gaz parfait classique. En déduire sa température microcanonique. Montrer que $E = \frac{3}{2}NKT$
- 3- Calculer la pression microcanonique. En déduire l'équation du gaz parfait classique $PV = NKT$