

## TD 2

### Exercice 1 :

Dans le cas d'un gaz parfait, dans le cadre du formalisme microcanonique on admet que la densité d'état pour des les molécules indiscernables ayant une énergie qui fluctue entre  $E$  et  $E + \delta E$  s'écrit

comme :  $\rho(N, V, E) = C = \frac{1}{N! h^{3N}}$  pour  $E < H(p, q) < E + \delta E$

la fonction de partition  $Z_m(N, V, E)$  pour gaz qui occupe un volume géométrique  $V$  avec un nombre

de molécules  $N$  et d'une énergie  $E$  est donnée par  $Z(N, V, E) = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} \frac{3N}{2} \frac{\delta E}{E}$

1- Dédurre l'expression de l'entropie microcanonique  $S_m$ .

En utilisant l'approximation de Stirling pour  $N \gg 1$  pour calculer :

$$\ln \left( \Gamma \left( \frac{3N}{2} + 1 \right) \right) \approx \frac{3N}{2} \ln \frac{3N}{2} - \frac{3N}{2} \text{ et en négligeant les termes } \frac{1}{N} \text{ et } \frac{\ln N}{N}$$

1- monter qu'on peut réduire  $S_m$  à l'expression suivante :

$$S_m = N k_B \left[ \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{4\pi m \varepsilon}{3(n \cdot h^3)^{2/3}} \right) \right]$$

Où  $k_B$  et  $h$  sont les constantes de Boltzmann et de Planck, respectivement. Avec la densité de particules définie comme :  $n = \frac{N}{V}$  et l'énergie par particule  $\varepsilon = \frac{E}{N}$ .

2- Dédurre l'équation d'état d'un gaz parfait, d'après la définition de la pression pour un système microcanonique.

3- Quelle l'énergie d'une particule libre ?

4- Montrer que le potentiel chimique est donné par :  $\mu = -\frac{3}{2} k_B T \ln \left( \frac{4\pi m \varepsilon}{3(n \cdot h^3)^{2/3}} \right)$

### Exercice 2 :

1- Une particule libre de masse  $m$  et de spin nul est enfermée dans une boîte cubique de volume  $V$ , le système est isolé et l'énergie de la particule est comprise entre

$E$  et  $E + \delta E$ . On suppose que l'énergie de la particule, donnée par l'expression  $E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$ , est suffisamment élevée pour que l'on puisse dénombrer de façon classique les micro-états accessibles.

2- Définir l'espace de phase associé a la particule. Soit un point :  $\{X\}, \{P\}$  de cet espace. Pour

un point quelconque de coordonnées  $\{X\}$  et  $\{P\}$ , on définit la fonction :  $H(X, P) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$

Donner l'expression permettant de calculer le nombre  $\Omega(E)$  de micro-état accessibles à la particule.

Calculer  $P_i \frac{\partial H}{\partial P_i}$ . montrer que dans le cas particulier que nous étudions, on peut exprimer ce terme en fonction de  $H$

### Exercice 3 :

On considère un système isolé de  $N$  particules discernables réparties sur deux niveaux d'énergie  $-\varepsilon/2$  et  $\varepsilon/2$ . On suppose qu'on a  $N_1$  particules sur le niveau le plus bas et  $N_2$  sur l'autre.

1°) Quel est le nombre de configurations possibles  $W$  de cet état ?

2°) L'énergie du système est  $E$ .

a) Ecrire  $N_1$  et  $N_2$  puis l'entropie  $S$  en fonction de  $E$ .

b) Déterminer la température  $T$  de ce système.

- c) Déterminer  $N_1$  et  $N_2$  en fonction de la température  $T$ . Considérer les cas limites haute et basse température pour  $N_1$  et  $N_2$ .
- d) On considère l'entropie  $S$ . Etudier les cas limites haute et basse température.

**Exercice 4:**

On se propose d'étudier un gaz parfait classique. Ce gaz est composé de  $N$  molécules contenues dans un volume  $V$ . Le gaz est isolé avec une énergie  $E$ .

- 1- Montrer que le nombre d'états d'énergie inférieure ou égale à  $E$  est donnée par  $AV^N E^{3N/2}$  où  $A$  est une constante qu'on ne déterminera pas. En déduire le nombre d'états d'énergie  $N$  sachant que  $N \gg 1$ .
- 2- Calculer l'entropie microcanonique du gaz parfait classique. En déduire sa température microcanonique. Montrer que  $E = \frac{3}{2}NKT$
- 3- Calculer la pression microcanonique. En déduire l'équation du gaz parfait classique  $PV = NKT$