Chapitre 3

Système linéaire

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, pour tout $i, j = \overline{1, n}$, a_{ij} et b_i des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
considérons le système de n équations différentielles linéaires suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases} \qquad (S)$$

Les inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Lemme 3.1 *Le système (S) est équivalent au système :*

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t), \quad \forall t \in I \qquad (S')$$

Avec

$$y : I \to \mathbb{R}^n \qquad B : I \to \mathbb{R}^n \qquad A : I \to M_n(\mathbb{R})$$

$$t \mapsto y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \qquad t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}},$$

Preuve : On a :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) \\ a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)y_n(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) + a_{12}(t) + \cdots + a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{2n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(t) + a_{n2}(t) + \cdots + a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow y'(t) = A(t)y(t) + B(t), \quad \forall t \in I \qquad (S')$$

Exemple 1 SKILLS Résolution le problème

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = t^2 y_1(t) - y_2(t) + 1 \\ y_2'(t) = \cos t y_1(t) - e^t y_2(t) \end{cases}, t \in I = \mathbb{R}.$$

S'écrit sous la forme :

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t), \text{ pour tout } t \in I = \mathbb{R}, \text{ avec}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ \cos t & -e^t \end{pmatrix} \quad et \quad B(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 3.2 *Toutes équation d'ordre deux s'écrit sous la forme :*

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t).$$

Preuve :
On considère l'équation d'ordre deux s'écrit sous la forme :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

on pose $\begin{cases} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y'(t) \end{cases}$, on a pour tout $t \in I$

$$\begin{cases} y_1'(t) = y'(t) = y_2(t) & \\ y_2'(t) = y''(t) & = -a(t)y'(t) - b(t)y(t) + c(t) \\ & = -b(t)y_1(t) - a(t)y_2(t) + c(t). \end{cases}$$

Ceci équivalent à $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$.
Pour tout $t \in I$, avec

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \quad et \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \; pour \quad tout \quad t \in I.$$

Définition 3.1 Le système (S') est appelé système différentiel linéaire du première ordre à coefficients variables avec second nombre.

Remarque 3.1 *Si* $\forall t \in I, B(t) = 0$ *alors le système*

$$y'(t) = A(t)y(t) \tag{3.1}$$

est appelé système différentiel linéaire du première ordre à coefficients variables homogène (ou sans second nombre).
On dit que (3.1) est le système homogène associé à (S').

<u>Notation :</u>
Pour simplifier, on écrit :

$$(S') = \begin{cases} y' = A(t)y & (3.1) \\ y' = A(t)y + B(t). \end{cases}$$

I L'existence d'un problème de Cauchy

Théorème 3.1 *Si A et B sont continues sur l'intervalle I, alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ le système :*

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution globale unique.

II Le système homogène et non homogène

Théorème 3.2 *L'ensemble des solution de (3.1) noté S_H, est un espace vectoriel de dimension **n**.*

Théorème 3.3 *Soit y_p une solution de (E), l'ensemble des solution de (E) noté S_H est donnée par :*

$$S_E = S_H + S_p,$$

S_H : La solution de système homogène.

III Système linéaire à coefficients constants

1 Méthode de l'exponentielle de Matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\begin{cases} A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k fois}}, \quad si \quad k \in \mathbb{N}^* \\ A^0 = I_n \end{cases}$$

et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C'est une matrice identité.

Considérons la série définie par :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{l \to +\infty} (I_n + \frac{A}{1!} + \cdots + \frac{A^l}{l!})$$

avec :

$$\begin{cases} k! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k, & si \quad k \in \mathbb{N}^* \\ 0! = 1 \end{cases}$$

Théorème 3.4 *La série :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est convergente.

Preuve : On a

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A^k\|}{k!}$$

mais $\frac{A^k}{k!}$ représente le terme général d'une série numérique convergente alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est normalement convergente. Donc elle est convergente.

Définition 3.2 L'exponentielle de la matrice A noté e^A est la quantité $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ c-à-d :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Exemple 2 SKILLS Résolution le problème

Soit :

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_1^2 = A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc $A_1^n = A_2^n = 0, \quad \forall \geq 2.$

$$e^{A_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{1} \frac{A_1^k}{k!} = \frac{A_1^0}{0!} + \frac{A_1}{1!} = \frac{I_2}{0!} + \frac{A_1}{1!}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Théorème 3.5 *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.*

1. *On a $e^{0_n} = I_n$, Ici 0_n représente la matrice nulle.*
2. *$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ mais si A et B commutent c-à-d $AB = BA$, alors :*
$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$
3. *e^A est une matrice inversible et on a $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*
4. *La fonction*
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to M_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto e^{tA} \end{aligned}$$
est dérivable et on a $(e^{tA})' = Ae^{tA}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- *On a :*
$$e^{O_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0_n)^k}{k!} = \frac{0_n^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0_n)^k}{k!} = I_n + 0_n = I_n.$$
-
$$(e^{tA})' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(tA)^k}{k!}\right)' = A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} \cdot A^{k-1}}{(k-1)!}$$

Si on pose $p = k - 1$, on trouve :
$$(e^{tA})' = A \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p \cdot A^p}{(p)!} = A \cdot e^{tA}.$$

Remarque 3.2 *Il existe des matrices : A et B tels que :*
$$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B.$$
Par exemple :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
D'après la définition de l'exponentielle, on a :
$$e^{A+B} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} e & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$.

Lemme 3.3 *Soient* $A_1, \cdots, A_n \in M_n(\mathbb{R})$. *On a :*

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Preuve : On a

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k}{k!}$$

mais on peut montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}}{k!} = \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} \\
&= \lim_{l \to +\infty} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemple 3 SKILLS Résolution le problème

On a :

$$e^{\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}e^2&0\\0&e^3\end{pmatrix}$$

On a :

$$e^{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-3\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}e^1&0&0\\0&e^4&0\\0&0&e^{-3}\end{pmatrix}$$

Théorème 3.6 *Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$.*

1 *Soit p une matrice inversible, on a :*

$$e^{p\cdot A\cdot p^{-1}}=p\cdot e^A\cdot p^{-1}.$$

2 *Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :*

$$e^{\lambda I_n+A}=e^\lambda\cdot e^A.$$

Preuve :

1 On a

$$e^{p\cdot A\cdot p^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(p\cdot A\cdot p^{-1})^k}{k!}$$

Par récurrence on peut montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $(p\cdot A\cdot p^{-1})^k=p\cdot A^k\cdot p^{-1}$ ceci implique que

$$\begin{aligned}e^{p\cdot A\cdot p^{-1}}=\lim_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{p\cdot A^k\cdot p^{-1}}{k!}&=\lim_{l\to+\infty}\left[p\cdot\left(\sum_{k=0}^{k=l}\frac{A^k}{k!}\right)\cdot p^{-1}\right]\\&=p\cdot\left[lim_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{A^k}{k!}\right]\cdot p^{-1}=p\cdot e^A\cdot p^{-1}.\end{aligned}$$

2 $e^{\lambda I_n+A}=e^\lambda\cdot e^A$
puisque $(\lambda I_n)A=A(\lambda I_n)$, alors (λI_n) et A commutent donc $e^{\lambda I_n+A}=e^{\lambda I_n}\cdot e^A$ mais

$$e^{\lambda I_n}=e^{\lambda\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1\end{pmatrix}}=e^{\begin{pmatrix}\lambda&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\lambda\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}e^\lambda&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&e^\lambda\end{pmatrix}=e^\lambda\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1\end{pmatrix}=e^\lambda\cdot I_n.$$

Ainsi $e^{\lambda I_n+A}=(e^\lambda I_n)e^A=e^\lambda(I_ne^A)=e^\lambda\cdot e^A$.

Exemple 4 SKILLS Résolution le problème

Calculons e^A tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$det(A - \lambda I_2) = \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 1 = 0$

implique $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont les deux valeurs propres distinctes de A. Alors elle est matrice diagonalisable

$$A = p \cdot D \cdot p^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et $p = (v_1, v_2)$ ici v_1 et v_2 sont les vecteurs propres de A associés respectement a λ_1 et λ_2. Les sous espaces propres :

$$E_{\lambda_1} = \{v_1 \in \mathbb{R}^2 / (A - \lambda_1 I)v_1 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / y = -x \right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \right\}$$

On prend $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / (A - \lambda_2 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / (A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

On prend $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc la matrice de passage $p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Rappelons que si $ad - cb \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$p^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} e^A = e^{p \cdot D \cdot p^{-1}} = p \cdot e^D \cdot p^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-1} + e & e^{-1} - e \\ e^{-1} - e & e^{-1} + e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition 3.3 Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que N est une matrice **nilpotente** d'indice $m \in \mathbb{N}^*$ si $N^{m-1} \neq 0_n$ et $N^m = 0_n$.

Exemple 5 SKILLS Résolution le problème

La matrice

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ est une matrice nilpotente d'indice } m = 3. \text{ Car :}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & 18 \end{pmatrix} \neq 0_3 \text{ et } N^3 = N^2 \cdot N = 0_3.$$

Remarque 3.3 *Toute matrice, triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls est nilpotente.*

Par exemple, la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls.

Théorème 3.7 *Soit N une matrice nilpotente d'indice $m \in \mathbb{N}^*$. On a :*

$$e^N = I_n + \frac{N}{1!} + \cdots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Preuve :
On a

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = I_n + \frac{N}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{N^k}{k!}.$$

mais N est une matrice nilpotente d'indice m, alors pour tout $k \geq m, N^k = 0_n$. En effet, on a :

$$k \geq m \Longrightarrow N^k = N^{(k-m)+m} = N^{k-m} \cdot N^m = N^{k-m} \cdot 0_n = 0_n.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = 0_n.$$

Exemple 6 SKILLS Résolution le problème

Soit la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente. Trouvons son indice m, on a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2, \text{ alors } m = 2 \text{ donc}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_n + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV Systèmes homogènes

Soit le système :

$$y' = A(t)y.$$

Lemme 3.4 *Si pour tout $t \in I$, on a :*

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}.$$

Preuve :
D'après la définition de la résolvante, on a :

$$R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du} = e^{\int_{t_0}^{t} Adu} = e^{A\int_{t_0}^{t} du} = e^{(t-t_0)A}.$$

Exemple 7 SKILLS Résolution le problème

La résolvante du système : $y' = Ay$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\begin{aligned} R(t, t_0) &= e^{(t-t_0)A} \\ &= e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 2(t-t_0) & 0 \\ 0 & (t-t_0) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{(t-t_0)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lemme 3.5 *La solution du système $y' = Ay$ est donnée par :*

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{tA}c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Preuve :
Puisque $I = \mathbb{R}$, alors $0 \in I$. Donc d'après la solution précedante, la solution du système homogène est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = R(t, 0)c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^n.$$

Mais d'après le lemme précedant, on a :

$$R(t, 0) = e^{(t-0)A} = e^{tA}.$$

Exemple 8 SKILLS Résolution le problème

La solution du système $y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} y$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{tA}c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^2.$$

On a : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ c-à-d $y(t) = e^{tA}c$, mais

$$e^{t\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 4t & 3t \\ 0 & 4t \end{pmatrix}} = e^{4t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{4tI_2 + \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

On peut montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est matrice nilpotente d'indice $m = 2$, alors :

$$e^{tA} = e^{4t} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{4t}\left[I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!}\right] = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{4t} + c_2 3te^{4t} \\ 0 + c_2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.6 *La solution du système suivant :*

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{est donnée par : } \forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0.$$

Exemple 9 SKILLS Résolution le problème

La solution du système :

$$\begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} y \\ y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{est donnée par : } \forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0.$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $t_0 = 1$ et $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c-à-d :

$$\begin{aligned} y(t) = e^{(t-1)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = e^{4(t-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} &= e^{4(t-1)} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= e^{4(t-1)}\left(I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{4(t-1)}\begin{pmatrix} 1 & 3(t-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} & 3(t-1)e^{4(t-1)} \\ 0 & e^{4(t-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

V Système non homogène

Théorème 3.8 *La solution du système :*

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A}B(u)du.$$

Exemple 10 SKILLS Résolution le problème

Calculons e^A tel que $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
On calculons le polynome caractéristique $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{bmatrix} 0-\lambda & -1 \\ -1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_1 = -1 \end{cases}$$

sont les deux valeurs propres distinctes de A. Alors A est une indice **diagonalisable**.
Donc, on peut l'écrire sous forme $A = p \cdot D \cdot p^{-1}$ tels que :
•D : Soit diagonale et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A tel que :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

•p : Soit inversible et les colonnes de p sont les vecteurs propres de A tel que :

$$p = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix},$$

v_1, v_2 Sont les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1, λ_2.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les sous espaces propres :

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \left\{v_1 \in \mathbb{R}^2; (A-\lambda_1 I_2)v_1 = 0\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \begin{cases}-x-y=0\\-x-y=0\end{cases}\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; y=-x\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}x\\-x\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; x\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{x\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; x\in\mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

on prend $v_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; (A-\lambda_2 I_2)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; (A+I_2)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0\right\}; \quad A+I = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \begin{cases}x-y=0\\-x+y=0\end{cases} \Longrightarrow x=y\right\}
\end{aligned}$$

On prend $v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, alors la matrice de passage est :

$$p = \begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix} \text{ tel que } det(p) = 2.$$

Rappolons que soit $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ si $det(p) = (ad-cb \neq 0)$ tel que $p \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned}
p^{-1} &= \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(p)}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}\\
p^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\\
e^A &= e^{p\cdot D\cdot p^{-1}} = p\cdot e^D\cdot p^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^1 & 0\\0 & e^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\\
e^A &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}e+e^{-1} & -e+e^{-1}\\-e^1-e^{-1} & e+e^{-1}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Définition 3.4 Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que N est une matrice **nilpotente** d'indice $m \in \mathbb{N}^*$, Si :

$$N^{m-1} \neq 0_n \text{ et } N^m = 0_n.$$

Exemple 11 SKILLS Résolution le problème

La matrice $N = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice $m = 3$.

Exemple 12 SKILLS Résolution le problème

En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice sur le système homogène, résoudre le système :

$$y' = Ay + B \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

• **Solution :**
La solution générale du système :

$$y' = Ay + B \text{ est } y = y_H + y_p$$

avec :
y_H : est la solution générale du système homogène associé $y' = Ay$.
y_p : est la solution particulière du système considéré.
Calculons y_H : En utilisant la méthode d'exponentielle de matrice, on a :
$\forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = e^{tA}c$ avec $c \in \mathbb{R}^2$, mais

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = e^{t\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]} \\ &= e^{tI_2 + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = e^t \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est composée par des zéros alors elle est une matrice nilpotente, un simple calcul montre que :

$$\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0_2. \text{ Donc :}$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = I_2 + \frac{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{1!} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \textit{Alors :}$$

$$e^{tA} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}, \quad \textit{ainsi :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y_H(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Calculons y_p :
On utilise la méthode de la variation de la constante, il existe une solution particulière sous la forme :

$$y_p(t) = e^{tA}c(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$
$$\text{Avec } c'(t) = e^{-tA} \cdot B(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} : \quad c'(t) = e^{-tA}B(t).$$

Calculons e^{-tA}, puisque

$$\begin{aligned}
-tA = -t\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Longrightarrow e^{-tA} &= e^{-t\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]}\\
&= e^{-t\left[I_2+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]}\\
&= e^{-tI_2+\begin{bmatrix}0 & -t\\ 0 & 0\end{bmatrix}}\\
&= e^{-t} \cdot e^{\begin{bmatrix}0 & -t\\ 0 & 0\end{bmatrix}}\\
&= e^{-t}\left[I_2 + \begin{bmatrix}0 & -t\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]\\
e^{-(t)A} &= e^{-t}\begin{bmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t} & -te^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$c'(t) = \begin{bmatrix}e^{-t} & -te^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$$

ceci implique que :

$$c(t) = \int c'(t)dt = \begin{bmatrix}\int e^{-t}dt\\ \int 0dt\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}, \quad avec \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc : $c(t) = \begin{bmatrix}-e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$
implique que :

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= e^{tA} \cdot c(t) = \begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}\\
y_p(t) &= \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R}; \quad y(t) = y_H(t) + y_p(t) = \begin{bmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{bmatrix}c + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$

Théorème 3.9 *Si la matrice A admet n vecteurs propres linéairement indépendant $v_1, v_2, \cdots, v_n$ associés aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Alors la solution générale de (H) est donnée par :*

$$y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t}, \quad \text{avec } v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathbb{R} \ .$$

Exemple 13 SKILLS Résolution le problème

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y$$

Calculons y_H, on a :

$\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux valeurs propres distinctes de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Sont les vecteurs propres de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ associé respectivement à λ_1, λ_2.

$$y_H(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Calculons y_p :
On utilise la méthode variation de la constante, il existe une solution particulière sous la forme :

$$y_H(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2} + \cdots, \text{ avec } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}' = \left(v_1 e^{\lambda_1 t} \quad v_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, v_n e^{\lambda_n t} \right)^{-1} \cdot B(t).$$

Rappelons que si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

Exemple 14 SKILLS Résolution le problème

Résoudre le système : $y' = Ay + B$ tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La solution générale du système : $y' = Ay + B$ est :

$y = y_H + y_p$, avec y_H est la solution générale du système homogène associé $y' = Ay$.
y_p est la solution particulière du système considéré.

Calculons y_H :
On a : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 4$ sont les trois valeurs propres distinctes de A.
$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ et $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}$ Sont les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3. Donc :

$$\begin{aligned} y_H(t) &= c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t} \\ &= c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix} e^{4t} = \begin{bmatrix}c_1 e^t\\2c_2 e^{2t}\\4c_3 e^{4t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Calculons y_p :
On utilise la méthode de variation de la constantes, il existe une solution particulière sous la forme :

$$y_p(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2} + c_3 v_3 e^{\lambda_3}, \text{ avec } \begin{bmatrix}c_1'\\c_2'\\c_3'\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} & v_2 e^{\lambda_2 t} & v_3 e^{\lambda_3 t}\end{pmatrix}^{-1} \cdot B(t), \text{ pour}$$

$$\text{tout } t \in \mathbb{R}. \text{ Alors : } \begin{bmatrix}c_1'\\c_2'\\c_3'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\0 & 2e^{2t} & 0\\0 & 0 & 4e^{4t}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Rappelons que si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\\vdots & 0 & \ddots & \vdots\\0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0\\0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0\\\vdots & 0 & \ddots & \vdots\\0 & \cdots & 0 & \lambda_n^{-1}\end{bmatrix}, \text{ainsi :}$$

$$\begin{bmatrix}c_1'\\c_2'\\c_3'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2}e^{-2t} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{4}e^{-4t}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}e^{-2t}\\0\end{bmatrix}$$

ceci implique que $c_1' = c_3' = 0$ et $c_2' = \frac{1}{2}e^{-2t}$.
Ainsi, on prend

$$c_1 = c_3 = 0 \text{ et } c_2 = \frac{-1}{4}e^{-2t}, \text{ ceci implique que :}$$

$$y_H(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix}0\\\frac{-1}{2}\\0\end{bmatrix}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi : } y(t) = y_H(t) + y_p(t) = \begin{bmatrix}c_1 e^t\\2c_2 e^{2t}\\4c_3 e^{4t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\frac{-1}{2}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1 e^t\\2c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}\\4c_3 e^{4t}\end{bmatrix}.$$

- **Résoudre de**

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (P_1)$$

La solution de (P_1) est donnée par :

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot y_0, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

- **Résoudre de**

$$\begin{cases} y' = Ay + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (P_2)$$

La solution de (P_1) est donnée par :

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)du, \qquad \forall t \in I.$$

Exemple 15 SKILLS Résolution le problème 01

La solution du système :

$$\begin{cases} y' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} y \\ y(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}; y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot y_0$, avec $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad t_0 = 1$ et $y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ c-à-d

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow (t-1)\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4(t-1)I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$e^{aI_2 + A} = e^a \cdot I_n \cdot e^A = e^a \cdot e^A$, donc :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{(t-1)\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} \\ &= e^{(t-1)\left[4I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]} \\ &= e^{4(t-1)} \cdot e^{(t-1)\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \\ &= e^{4(t-1)} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

On a :

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution générale est donnée par :$y = y_H + y_p$.

• Calculons y_H :
En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice, on trouve $\forall t \in \mathbb{R}; y_H(t) = e^{tA} \cdot c$ avec $c \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$e^{tA} = e^{t\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 2\end{bmatrix}} = e^{2t+I_2+\begin{bmatrix}0 & 3t\\0 & 0\end{bmatrix}} = e^{2t} \cdot e^{\begin{bmatrix}0 & 3t\\0 & 0\end{bmatrix}}.$$

La matrice $\begin{bmatrix}0 & 3t\\0 & 0\end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est composée par des zéros alors elle est nilpotente.

$$e^{tA} = e^{2t}\left(I_2 + \begin{bmatrix}0 & 3t\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = e^{2t}\begin{bmatrix}1 & 3t\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{2t} & 3te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}.$$

$$\text{Ainsi} \qquad \forall t \in \mathbb{R}; \quad y_H(t) = \begin{bmatrix}e^{2t} & 3te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{bmatrix} c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^2.$$

• Calculons y_p :
On utilise la méthode variation de la constante $y_p = e^{tA} \cdot c$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Avec $c'(t) = e^{-tA} \cdot B(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Calculons

$$e^{-tA} = \begin{bmatrix}e^{-2t} & -3te^{-2t}\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$c'(t) = \begin{bmatrix}e^{-2t} & -3te^{-2t}\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-2t}\\0\end{bmatrix}$$

$$c'(t) = \begin{bmatrix}\int e^{-2t}dt\\ \int 0dt\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}e^{-2t}\\0\end{bmatrix} \Longrightarrow y_p(t) = \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\0\end{bmatrix}$$

VI La résolution du système homogène (H)

Lemme 3.7 *Soient $t, t_0 \in I$, considérons la fonction f_{t,t_0} définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ par :*

$$f_{t,t_0}(y_0) = y(t, t_0, y_0).$$

L'application f_{t,t_0} est linéaire.

Définition 3.5 La matrice associée à f_{t,t_0} est appellée la matrice résolution de (H). On la note par :

$$R(t, t_0).$$

Théorème 3.10 *On a*

1. $\forall t, t_0 \in I; \quad R(t,t_0) \in M_n(\mathbb{R})$.
2. $\forall t, t_0 \in I; \quad R(t,t_0)y_0 = y(t,t_0,y_0)$.
3. $\forall t_0 \in I; \quad R(t_0,t_0) = I_n$. *Ici* I_n *représente la matrice identité.*
4. $\forall t, s, r \in I; \quad R(t,s)R(s,r) = R(t,r)$.
5. $\forall t, s \in I; \quad R(t,s)$ *est inversible et on a :*

$$(R(t,s))^{-1} = R(s,t).$$

6. $\forall t, t_0 \in I; \quad \dfrac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)\cdot R(t,t_0)$.
7. $\forall t, t_0 \in I; \quad \dfrac{d}{dt}R(t,t_0) = -R(t_0,t)A(t)$.

1 Le système fondamental de (H)

Soient $y_1, y_2, \cdots, y_n \in F(I, \mathbb{R}^n)$.

Définition 3.6 On dit que $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ est un système fondamental de (H), si :

1. $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sont des solution de (H).
2. $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sont linéairement indépendants, c'est à dire :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}; \quad (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n) = 0$$
$$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Exemple 16 SKILLS Résolution le problème

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, y_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}.$$

(1) Montrons que y_1 et y_2 sont deux solutions de $y' = A(t)y$, on a :

$$y_1'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et}$$

$$A(t)y_1(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+t^2}y_1(t) = \begin{bmatrix} t^2+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$y'(t) = A(t)y(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Ce qui implique que y_1 est une solution de (H).
On montre que y_2 est aussi une solution de (H).

(2) Montrons que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants :
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 &\Longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \alpha \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ t \end{bmatrix} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha t - \beta \\ \alpha + \beta t \end{bmatrix} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha t - \beta = 0 \\ \alpha + \beta t = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Représentes une infinité d'équations de deux inconnues α et β.
On soit que pour trouver les inconnues α et β il nous suffit deux équations non équivalentes.
Pour cela, on prend les deux équations donnée par la valeur $t = 0$, on obtient $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent y_1 et y_2 sont linéairement indépendants.

Théorème 3.11 *Soient* $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ *un système fondamental de* (H), *on a :*

$$\begin{aligned}
S_H &= \Big[\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}\Big] \\
&= \{y \in F(I, \mathbb{R}^n); \quad y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n, \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

• **Preuve :**
$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ est un système fondamental de (H), alors $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ un système linéairement indépendant.
Car :
$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} = n = \mathbf{dim}\, S_H$, alors $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ est une base de S_H.

Exemple 17 SKILLS Résolution le problème

Pour tout $\forall t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix},$$ puisque $\{y_1, y_2\}$ est un système fondamental de $y' = A(t)y$. Alors :

$$\begin{aligned}
S_H = [\{y_1, y_2\}] &= \{y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2); \quad y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2); \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad t \in \mathbb{R}; y = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2); \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad t \in \mathbb{R}; y = \begin{bmatrix} \alpha_1 t - \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 t \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.4 *La solution générale de* (H) *est donnée par :*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \quad \text{avec } c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}.$$

2 La matrice fondamentale de (H)

Définition 3.7 La matrice dont ces colonnes représente un système fondamental de (H) s'appelle la matrice fondamental de (H). En d'autre terme, on dit que M est une matrice fondamentale si :

$$M = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \text{ avec } \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \text{ est un système fondamental de } (H).$$

Exemple 18 SKILLS Résolution le problème

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}, \text{ puisque } \{y_1, y_2\} \text{ est un système fondamental de } y' = A(t)y \ t \in \mathbb{R}.$$

On pose que

$$M(t) = (y_1(t), y_2(t)) = \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

Alors M est une matrice fondamentale du $y' = A(t)y$.

Théorème 3.12 *Soit M une matrice fondamentale du système (H). Alors :*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$M'(t) = A(t)M(t).$$

2. *La solution générale de (H) est donnée par :*

$$y = Mc, \text{ avec } c \in \mathbb{R}^n.$$

- **Preuve :**

M est une matrice fondamentale du système (H), alors :

$$M = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \text{ avec } \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \text{ est un système fondamental de } (H).$$

1. On a :

$$\begin{aligned} M'(t) &= (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))' \\ &= (y_1'(t), y_2'(t), \cdots, y_n'(t)) \\ &= (A(t)y_1(t), A(t)y_2(t), \cdots, A(t)y_n(t)) \\ &= A(t)(y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) \\ &= A(t)M(t). \end{aligned}$$

2 On a :

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\cdots+c_ny_n(t) \\ &= (y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix} \\ &= (y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))c, \quad avec \quad c=\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

3 Le Wronskien d'un système de solution de (H)

Soient $y_1,y_2,\cdots,y_n\in S_H$ (l'ensemble des solutions de (H)).

Définition 3.8 Le Wronskien de $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ noté W est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont $y_1,y_2,\cdots,y_n$

$$\forall t\in I;\quad W(t):=\mathbf{det}[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)].$$

Théorème 3.13 *Soient $y_1,y_2,\cdots,y_n\in S_H$. les trois propriétés suivantes sont équivalents :*

1 $\forall t\in I;\quad W(t)\neq 0.$

2 $\forall t_0\in I;\quad W(t_0)\neq 0.$

3 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ *sont linéairement indépendants.*

• **Preuve :**

1 (1) $\Longrightarrow$ (2) Evident car :

$$\forall t;\quad P(t)\Longrightarrow \exists t_0;\quad P(t_0).$$

2 (1) $\Longrightarrow$ (3) :
$W(t_0)\neq 0$ implique que $(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))$ sont linéairement indépendants.

3 (3) $\Longrightarrow$ (1) puisque $y_1,y_2,\cdots,y_n$ sont des solutions de (H) et qui sont linéairement indépendants alors on trouve que $y_1,y_2,\cdots,y_n$ sont L.I pour tout $t\in I$, ceci implique que $W(t)\neq 0$ pour tout $t\in I$.

VII La résolution et le système non homogène

Théorème 3.14 *Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. La solution du système (E) est donnée par :*

$$\forall t \in I; \quad y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, u)B(u)du.$$

• **Preuve :**
Considérons la fonction définie sue I par :

$$Z(u) = R(t_0, u)y(u).$$

Soit $u \in I$, on a :

$$\begin{aligned} Z'(u) &= \frac{d}{du}\Big[R(t_0, u)y(u)\Big] \\ &= \frac{d}{du}(R(t_0, u)) \cdot y(u) + R(t_0, u)y'(u) \\ &= -R(t_0, u)A(t) \cdot y(u) + R(t_0, u)(A(t)y(u) + B(u)) \\ &= R(t_0, u)B(t). \end{aligned}$$

C'est à dire : $\quad \forall u \in I; \quad Z'(u) = R(t_0, u)B(u)$, ce qui implique que :

$$\forall t \in I; \quad Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)du$$

Ainsi

$$\forall t \in I; \quad R(t_0, t)y(t) = R(t_0, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)du$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall t \in I; \quad y(t) &= R(t, t_0)I_n y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, t_0)R(t_0, u)B(u)du \\ y(t) &= R(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, u)B(u)du. \end{aligned}$$

D'où le résultats.

Théorème 3.15 *Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. La solution du système (H) est donnée par :*

$$\forall t \in I; \quad y(t) = R(t, t_0)y_0.$$

• **Preuve :**
Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur $B = 0$.

VIII Systèmes linéaires à coefficients constantes