Chapitre 2

Équations d'ordre supérieur système d'ordre 1.

I Équation différentielle du $2^{\text{ème}}$ ordre

La forme générale d'une équation différentielle du $2^{\text{ème}}$ ordre est :

$$F(t, y, y', y'') = 0$$

ou bien de la forme normale : $Y'' = F(t, y, y')$.
La solution générale "Y" dépend en générale de deux paramètres λ et μ.

1 Équations différentielles linéaires du $2^{\text{ème}}$ ordre

Soit l'équation différentielle du $2^{\text{ème}}$ ordre :

$$Y'' + a(t)Y' + b(t)Y = c(t) \tag{2.1}$$

1. Si $c(t) = 0$, l'équation (2.1) sera E.D.L homogène.
2. Si
$$\begin{cases} a(t) = a \\ b(t) = b \end{cases}$$
on obtient $Y'' + aY' + bY = c(t)$ l'équation sera linaire à coefficients constants.

Théorème 2.1 *La solution générale de (E.D.L $2^{\text{ème}}$) est égale à :*

$$S_G = S_H + S_P$$

S_H *: Solution de l'équation homogène.*
S_P *: Une solution particulière.*

Définition 2.1 Deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (2.1) sont indépendantes sur un intervalle I s'il n'existe pas de réel k tel que :

$$\text{pour tout } t \in I : y_2(t) = ky_1(t).$$

Remarque 2.1 *Les deux fonctions y_1 et y_2 sont indépendantes ie elles sont linéairement indépendantes au sens des espaces vectoriels.*

Définition 2.2 Soient deux fonctions dérivables sur l'intervalle I.
y_1, y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquent nul.

Exemple 1 SKILLS Résolution le problème

Les fonctions sont $\sin t$ et $\cos t$ sont indépendantes :

$$\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -(\sin^2 t + \cos^2 t) = -1 \neq 0 \quad \forall t.$$

2 Équations linéaires homogène du 2ème ordre

[1]- Cas ou l'on connait deux solutions particulière indépendantes :

Si y_1, y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation :

$$y'' + a(t)y' + b(t) = 0$$

la solution générale est donnée par :

$$y = \lambda y_1 + \mu y_2,$$

λ, μ sont des constantes.

[2]- Cas l'on connait une solution particulière :

Si on connait une solution particulière y_1, posons le changement de variable
$y(t) = Y_1(t)v(t)$.
$y'(t) = Y_1'v + v'Y_1, \quad Y''(t) = Y_1''v + v'Y_1' + v''Y_1 + Y_1'v' = Y_1''v + 2Y_1'v' + v''Y_1$.
Remplaçons Y, Y', Y'' dans l'équation homogène, on obtient l'équation différentielle de 2ème ordre avec l'inconnu v :

$$y_1 v'' + (2y' + a(t)y_1)v' = 0$$

On fait le 2ème changement de variable "$w = v'$", on trouve :

$$\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v'} = -2 \cdot \frac{y_1'}{y_1} - a(t)$$
$$\int \frac{dw}{w} = -2 \int \frac{Y_1'}{Y} dt - \int a(t)dt$$
$$\ln w = -2 \ln Y_1 - \int a(t)dt + c$$
$$w = \frac{1}{Y_1^{-2}} \cdot e^{-\int a(t)dt} \cdot \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$w(t) = \lambda \cdot \frac{1}{Y_1^{-2}} \cdot e^{-\int a(t)dt}.$$

D'où :

$$v(t) = \int w(t)dt + \mu, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation :

$$y'' + a(t)y' + b(t) = 0$$

est donc :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t)v(t) \\ &= y_1(t)\left(\int w(t)dt + \mu\right) = y_1(t) \int w(t)dt + \mu y_1(t), \qquad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 2 SKILLS Résolution le problème

Soit l'équation :

$$(t+1)y'' - (2t-1)y' + (t-2)y = 0$$

on peut vérifier que $y_1(t) = e^t$ est une solution particulière.
Cherchons la solution générale sous la forme $y(t) = e^t v(t)$.

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^t v + v' e^t \\ y''(t) &= e^t v + v' e^t + v'' e^t + e^t v' = e^t v + 2v' e^t + e^t v''. \end{aligned}$$

Remplaçons y, y' et y'' dans l'équation homogène, on obtient :

$$\begin{aligned} (1+t)[e^t(v + 2v' + v'')] + (2t-1)[e^t(v+v')] + (t-2)e^t v &= 0 \\ e^t[(t+1)v + 2(1+t)v' + (1+t)v'' - (2t-1)v - (2t-1)v' + (t-2)v] &= 0 \\ e^t[(t+1)v'' + v'[2(t+1) - (2t-1)] + v[(t-1) - (2t-1) + (t-2)] &= 0 \\ e^t[(t+1)v'' + 3v' + 0 \cdot v] &= 0, \end{aligned}$$

on a $e^t \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$:

$$[(t+1)v'' + 3v'] = 0 \Longrightarrow \frac{v''}{v'} = \frac{-3}{1+t}, \qquad t \neq -1.$$

Soit $\begin{cases} w = v' \\ w' = v'' \end{cases}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{w'}{w} &= \frac{-3}{1+t} \Longrightarrow \int \frac{dw}{w} \int \frac{-3}{1+t} dt \\ \ln|w| &= -3\ln(1+t) + c \\ w &= e^c \frac{1}{(1+t)^3} \Longrightarrow w = \frac{\lambda}{(1+t)^3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} v' &= \int \frac{\lambda}{(1+t)^3} dt = \lambda\Big(\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{(1+t)^2}\Big) + \mu \\ v(t) &= \frac{\lambda}{(1+t)\lambda^2} + \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solution générale est donnée par :

$$y(t) = e^t v(t) = \lambda \frac{e^t}{(1+t)^2} + \mu e^t, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

II Équation différentielle du $2^{\text{ème}}$ ordre à coefficients non constants non homogène

Soit l'équation :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t), \qquad c(t) \neq 0.$$

Comme pour l'équation linéaires du 1^{ere} ordre.

Théorème 2.2 ***La solution générale*** *de l'équation non homogène :*

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène :

$$S_G = S_H + S_P$$

S_G *: La solution générale.*
S_H *: Solution de l'équation homogène.*
S_P *: Une solution particulière.*

1 La méthode variation de la constante

Le principe de cette méthode est de considérer λ et μ comme des fonctions de la variable "t" :
Supposons que cherchons la solution sous la forme :

$$y_p(t) = \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t).$$

Explication :
En exportant cette fonction dans l'équation non homogène. On a après simplification :

$$\begin{aligned} b(y &= \lambda y_1 + \mu y_2) \\ ay' &= (\lambda' y_1 + y_1'\lambda + \mu' y_2 + y_2'\mu)a \\ y'' &= \lambda'' y_1 + y_1'\lambda' + y_1''\lambda + \lambda' y_1' + \mu'' y_2 + y_2'\mu' + y_2''\mu + \mu' y_2' \\ &= \lambda'' y_1 + \lambda'(2y_1') + \lambda(y_1'') + \mu'' y_2 + \mu'(2y_1') + \mu(y_2''). \end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda'' y_1 + \lambda'(2y_1') + \lambda(y_1'') + \mu'' y_2 + \mu'(2y_1') + \mu(y_2'') + a\lambda' y_1 + ay_1'\lambda + a\mu' y_2 + ay_2'\mu + by_1\lambda + by_2\mu$$
$$= \lambda'' y_1 + \mu'' y_2 + \lambda'(2y_1' + ay_1) + \mu'(2y_2' + ay_2) + \lambda(y_1'' + ay_1 + by_1) + \mu(y_2'' + ay_2' + by_2) = c(t)$$
$$\lambda'' y_1 + \mu'' y_2 + \lambda'(2y_1' + ay_1) + \mu''(2y_2'' + ay_2) = c(t).$$

Utilisant la méthode variation des constantes telle que :

$$\lambda'' y_1 + \mu'' y_2 + 2(\lambda' y_1' + \mu' y_2') + a(t)(\lambda' y_1 + \mu' y_2) = c(t).$$

En utilisant la méthode variation des constantes telle que les fonctions λ' et μ' doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c(t) \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$\lambda' = \frac{-c(t)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)}, \quad \mu' = \frac{+c(t)y_1(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)}.$$

D'où la solution particulière est donnée par :

$$y_p(t) = y_1(t)\int \frac{-c(t)Y_2}{Y_1Y_2' - Y_1'Y_2}dt + y_2(t)\int \frac{-c(t)Y_1}{Y_1Y_2' - Y_1'Y_2}dt.$$

Exemple 3 SKILLS Résolution le problème

Soit l'équation :

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = te^t, \quad y = t^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad t \in]0, +\infty[$$

cherchons des solutions pour l'équation homogène :

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = 0 \text{ sous la forme } y(t) = t^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$\begin{aligned} y = t^\alpha &\Longrightarrow \frac{2}{t^2}y = 2 \cdot t^{-2} \cdot t^\alpha = 2t^{\alpha-2}, \\ y' &= \alpha t^{\alpha-1}, \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}, \end{aligned}$$

par sommation de ces termes, on trouve t :

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = t^{\alpha-2}[\alpha(\alpha-1)-2] = 0 \Longrightarrow \alpha(\alpha-1)-2=0$$
$$\Longrightarrow \alpha^2-\alpha-2=0,$$
$$\text{on a } \Delta = 1-4(-2) = 9, \quad \text{donc :} \quad \alpha_1=-1, \qquad \alpha_2=2.$$

• Pour $\alpha_1 = -1 \Longrightarrow y_1(t) = \frac{1}{t}$.
• Pour $\alpha_2 = 2 \Longrightarrow y_2(t) = t^2$.
D'où la solution générale de l'équation homogène est :

$$y_H(t) = \lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda \cdot t^2 + \mu \cdot \frac{1}{t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Supposons que la solution particulière est donnée par :

$$y_p(t) = \frac{\lambda(t)}{t} + \mu(t)t^2 \quad \text{avec les dérivées } \lambda', \mu' \text{ doivent vérifier le système :}$$
$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = te^t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda'\frac{1}{t} + \mu' t^2 = 0 \\ \lambda'(-\frac{1}{t^2}) + \mu'(2t) = te^t \end{cases}$$

En utilisant la règle de Carmer car $(det \neq 0)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{t} & t^2 \\ -\frac{1}{t^2} & 2t \end{bmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0$$

$$\lambda' = \frac{\begin{bmatrix} 0 & t^2 \\ te^t & 2t \end{bmatrix}}{3} = \frac{t^3}{3}e^t \Longrightarrow \lambda(t) = \frac{1}{3}e^t(-t^3+3t^2-6t+6),$$
$$\mu' = \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ \frac{\frac{-1}{t^2}}{3} & te^t \end{bmatrix}}{3} = \frac{e^t}{3} \Longrightarrow \mu(t) = \frac{1}{3}e^t,$$

et donc :

Explication :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{-1}{3}\int t^3e^tdt = \frac{1}{3}[t^3e^t - 3\int t^2e^tdt] = \frac{1}{3}[t^3e^t - 3(t^2e^t - \int te^tdt)] \\
&= \frac{-1}{3}[t^3e^t - 3\int t^2e^tdt] = \frac{-1}{3}\left[t^3e^t - 3[t^2e^t - 2[te^t - \int e^tdt]]\right] \\
&= \frac{-1}{3}\left[t^3e^t + 3(t^2e^t - 2(te^t - e^t))\right] \\
&= \frac{-1}{3}[t^3e^t + 3(t^2e^t - 2te^t2e^t)] \\
&= \frac{-1}{3}\left[t^3e^t - 3t^2e^t + 6te^t - 6e^t\right] \\
&= \frac{1}{3}e^t[-t^3+3t^2-6t+6],
\end{aligned}$$

$$\mu(t) = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t.$$

D'où :

$$\begin{aligned} S_p(t) &= \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{3}e^t(-t^2+3t^2-6t+6)\Big) + t^2(\frac{1}{3}e^t) \\ &= \frac{1}{3}e^t(-t^2+3t-6+\frac{6}{t}+t^2) \\ &= \frac{1}{3}e^t(3t-6+\frac{6}{t}) \\ S_p &= e^t(t-2+\frac{2}{t}) \end{aligned}$$

donc :

$$S_G(t) = \lambda(\frac{1}{t}) + \mu(t^2) + e^t(t-2+\frac{2}{t}).$$

III Équation linéaire du 2ème ordre coefficients constantes

Une équation différentielle du 2ème ordre linéaire à coefficients (E.D.L du 2ème ordre à coefficients constants) est une équation du type :

$$y'' + ay' + by = c(t)$$

a, b sont des constants réelles, $t \mapsto c(t)$ est une fonction donnée continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On commence par résoudre l'équation homogène associe :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.2}$$

On cherche des solutions sous la forme :

$$y = e^{rt}, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans l'équation homogène (2.2), on obtient :

$$(r^2 + ar + b)e^{rt} = 0, \quad \text{comme } e^{rt} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pour voir une solution, il faut que :

$$r^2 + ar + b = 0$$

cette équation appelle **l'équation caractéristique** associée à l'équation homogène (2.2).

On a trois cas :

1 Si $a^2 - 4b > 0$, on trouve deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 la solution générale de l'équation homogène sera alors :

$$y_H = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2 Si $a^2 - 4b = 0$, on trouve une racine réelle double r_0 alors la solution générale de l'équation homogène :

$$y_H = (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3 Si $a^2 - 4b < 0$, on trouve deux racines complexes distinctes et conjuguées de la forme :

$$\begin{cases} r_1 = \alpha - i\beta \\ r_2 = \alpha + i\beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$y_H = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)), \qquad \alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4 SKILLS Résolution le problème

On a l'équation suivante :

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

L'équation caractéristique (E.C) est : $\quad r^2 + 4r + 3 = 0.$
On a : $r_1 = -3$ et $r_2 = -1$, alors la solution générale est :

$$y = \lambda e^{-3t} + \mu e^{-t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1 Recherche d'une solution particulière pour des second nombres spécifiques

Si $c(t) = p(t)$ où $p(t)$ est **un ploynome** de degré "n".
• Cherche une solution $q(t)$ qui soit un **polynome** de degré.

1 Si $b \neq 0 \Longrightarrow q(t)$ de degré "n".

2 Si $b = 0, \quad a \neq 0 \Longrightarrow q(t)$ de degré "$n+1$".

3 Si $b = 0$ et $a = 0 \Longrightarrow q(t)$ de degré "$n+2$".

Exemple 5 SKILLS Résolution le problème

Soit l'équation :

$$y'' - y' - 2y = 2t^2,$$

on a L'équation caractéristique (E.C) est : $\quad r^2 - r - 2 = 0$ admet deux racines réelles :

$$r_1 = -1 \text{ et } r_2 = 2$$

donc la solution générale est :

$$S_G = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous forme d'un polynome du 2ème ordre :

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \alpha t^2 + \beta t + \gamma \\ y_p'(t) &= 2\alpha t + \beta \\ y_p''(t) &= 2\alpha \end{aligned}$$

l'équation sera :

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' - 2y_p = 2t^2 &\Longleftrightarrow 2\alpha - (2\alpha t + \beta) - 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = 2t^2 \\ &\Longleftrightarrow (2\alpha - \beta - 2\gamma) + t(-2\alpha - 2\beta) + t^2(-2t) = 2t^2 \end{aligned}$$

Par identification, on

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma = \dfrac{2\alpha - \beta}{2} = \dfrac{-3}{2} \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

d'où la solution générale est :

$$y_G = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} + (-t^2 + t - \frac{3}{2}), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

IV Résume les cas possible

Résume les cas possible dans le tableau suivant :

Second nombre $c(t)$.	Solution particulière $y_p(t)$
$c(t) = p_n(t)$ est un polynome de degré "n".	$\begin{cases} \bullet y_p(t) = q_n(t), \quad si \quad b \neq 0. \\ \bullet y_p(t) = q_{n+1}(t) \quad si \quad b = 0 \quad et \quad a \neq 0. \\ \bullet y_p(t) = q_{n+2}(t) \quad si \quad b = 0 \quad et \quad a = 0. \end{cases}$
$c(t) = ke^{rt}$ avec $r^2 + ar + b \neq 0$.	$\bullet y_p(t) = \alpha e^{rt}$; "r" n'est pas racine.
$c(t) = ke^{rt}$ avec $r^2 + ar + b = 0$.	$\begin{cases} \bullet y_p = \alpha t e^{rt}; \quad "r" \quad racine \quad simple. \\ \bullet y_p = \alpha t^2 e^{rt}; \quad "r" \quad racine \quad double. \end{cases}$
$c(t) = p_n(t)e^{rt}, \quad r^2 + ar + b \neq 0.$	$\bullet y_p(t) = q_n(t)e^{rt}; \quad deg(q) = n.$
$c(t) = p_n(t)e^{rt}, \quad r^2 + ar + b = 0.$	$\bullet y_p(t) = q_{n+1}(t)e^{rt}; \quad deg(q) = n + 1.$
$c(t) = p_n(t)e^{rt}; \quad r = \frac{-a}{2}$ et $deg(p) = n.$	$\bullet y_p(t) = q_{n+2}e^{rt}; \quad deg(q) = n + 2.$
$c(t) = d\cos(rt) + e\sin(rt).$	$\bullet y_p(t) = \alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt).$

Exemple 6 SKILLS Résolution le problème

Soit l'équation :

$$y'' - y' - 2y = \sin(2t).$$

La solution générale est donnée par :

$$S_G = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}.$$

La solution particulière est :

$$y_p = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t),$$

donc : $\alpha = \frac{1}{20}$ et $\beta = \frac{-3}{20}$.

Alors :

$$y_G = \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{3}{20}\sin(2t) + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7 SKILLS Résolution le problème

Soit l'équation :

$$y'' - y' - 2y = te^t \Longrightarrow y_H = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Comme 1 n'est pas racine du P.C, on cherchons une solution pour sous la forme :

$$y_P = (\alpha t + \beta)e^t.$$

On a :

$$\left.\begin{aligned} y_p' &= (\alpha t + \alpha + \beta)e^t \\ y_p'' &= (\alpha t + 2\alpha + \beta)e^t \end{aligned}\right\}$$ En remplaçant dans l'équation (2.3), on trouve :

$\alpha = \dfrac{-1}{2}, \beta = \dfrac{-1}{4}$, d'où la solution générale est :

$$y_G = \frac{-1}{4}(2t+1)e^t + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8 SKILLS Résolution le problème

Soit l'équation suivante :

$$y'' - y' - 2y = \sin(2t)$$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$y_H = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution sous la forme :

$$y_p = \alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t).$$

On a :

$$\left.\begin{aligned} y_p' &= -2\alpha \sin(2t) + 2\beta \cos(2t) \\ y_p'' &= -4\alpha \cos(2t) - 4\beta \sin(2t). \end{aligned}\right\}$$ En remplaçant dans l'équation , on trouve :

$$-2(3\alpha + \beta)\cos(2t) + (2t - 6\beta)\sin(2t) = \sin(2t)$$

donc : $\begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ et \\ 2\alpha - 6\beta = 1 \end{cases}$, d'où $\alpha = \dfrac{1}{20}, \beta = \dfrac{-3}{20}$.

Alors la solution générale est :

$$y_G = \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{3}{20}\sin(2t) + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

V Équation linéaire homogène à coefficients analytique

Soit l'équation différentielle du second ordre homogène :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{2.4}$$

Supposons que $a(t)$ et $b(t)$ sont des séries entière (puissances entières positives de t) c'est à dire :

$$a(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \qquad et b(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k.$$

Cherchons la solution de l'équation (2.4) sous la forme d'une série entière :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = c_0 + c_1 t + c_2 t^2.$$

Exemple 9 SKILLS Résolution le problème

Soit l'équation du second ordre :

$$y'' - ty' - 2y = 0 \tag{2.5}$$

Cherchons une solution sous forme d'une série entière, soit

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k, \quad alors :$$

$$y_1'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1}, \qquad y_1''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} = c_1 + 2c_2 t + \ldots$$

En introduisant y_1, y_1', y_1'' dans l'équation (2.5), on obtient :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} - t \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = 0$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} - \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^k - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = 0$$

posons par changement d'indice dans première somme, on obtient :

$$p = k - 2 \Longrightarrow k = p, \text{ donc on a :}$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (p+2)(p+1) c_{p+2} t^p + \sum_{p=1}^{+\infty} p c_p t^p - 2 \sum_{p=0}^{+\infty} c_p t^p = 0$$

$$2c_2 + \sum_{p=1}^{+\infty} (p+2)(p+1) c_{p+2} t^p - \sum_{p=1}^{+\infty} p c_p t^p - 2(c_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} c_p t^p) = 0$$

$$2c_2 - 2c_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} ((p+2)(p+1) c_{p+2} - p c_p - 2c_p) t^p = 0.$$

En annulant les coefficients de torites les puissances de t, on obtient des relations permettant de déterminer $c_0, c_1, \dots$ et $\sum_{n\geq} b_n t^n = 0 \Longleftrightarrow b_n = 0 \qquad \forall n$.

Posons $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$, alors on trouve $c_0 = 1$ et $c_2 = 0$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
t^0 &= 2c_2 - 2c_0 = 0 \Longrightarrow c_2 = c_0 = 1 \\
t^1 &= 3 \times 2c_3 - c_1 - 2c_1 \Longleftrightarrow 6c_3 - 3c_1 = 0 \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow c_3 = \frac{1}{2}c_1, \qquad c_3 = 0, \\
t^2 &= 12c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0 \Longrightarrow c_4 = \frac{1}{3}c_2 = \frac{1}{3}, \\
t^3 &= 20c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0 \Longrightarrow c_5 = \frac{1}{4}c_3 = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$y_1(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{3}t^4 + \dots, \qquad \cos y = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}.$$

De façon analogue, en prenant :$y_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k$ et les condition initireles $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$,

on obtient :

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_1 = 1.$$

En remplaçant $y_2(t)$ dans l'équation (2.5) d'où

$$y_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k, \quad y_2' = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k t^{k-1}, \quad y_2'' = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\alpha_k t^{k-2}.$$

Alors on obtient : $\alpha_{k+2} = \frac{1}{k+1}\alpha_k, \quad k = 2, 3, \dots.$

On en déduit que $\alpha_{2k} = 0$ et $\alpha_{2k+1} = \frac{1}{k!2^k}$ et donc :

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!2^k} t^{2k+1} \\
&= t\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(\frac{t^2}{2})^k = t \times e^{\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

La solution générale de l'équation (2.5) sera sous la forme :

$$y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent :

$$y_1(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{3}t^4 + \dots.$$

De façon analogue en prenant $y_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k$ et les conditions initiales $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$, on obtient :

$$\begin{cases} y_2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots \\ y_2'(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \ldots. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_2(0) = \alpha_0 = 0 \\ y_2'(0) = 1 \Longrightarrow \alpha_1 = 1. \end{cases}$$

En remplaçant $y_2(t)$ dans l'équation (2.5), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\alpha_k t^{k-2} - t(\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k t^{k-1}) - 2(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k) = 0.$$

Par changement d'indice, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(p+2)(p+1)\alpha_{p+2}t^p - \sum_{p=1}^{+\infty} p\alpha_p t^p - 2(\alpha_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_p t^p) = 0$$

$$2\alpha_2 - 2\alpha_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}((p+2)(p+1)\alpha_{p+2} - p\alpha_p - 2\alpha_p)t^\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} t^0 = \alpha_2 = 0 \quad et \quad & (p+2)(p+1)\alpha_{p+2} - (p+1)\alpha_p = 0 \\ & (p+1)(p+2)\alpha_{p+2} = (p+2)\alpha_p \\ & \alpha_{p+2} = \frac{1}{p+1}\alpha_p, \quad p = 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $\begin{cases} \alpha_{2k} = 0 \\ \alpha_{2k+1} = \dfrac{1}{k!2^k} \end{cases}$, et donc :

$$y_2(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!2^k} t^{2k+1}.$$

$$y_2(t) = t\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\frac{t^{2k}}{2^k} = t\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^{2k}}{2}\right)^k = te^{\frac{t^2}{2}}.$$

La solution générale de l'équation (2.5) sera sous la forme :

$$y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

VI Équation d'ordre n et système différentielle

Rappelons qu'une équation différentielle d'ordre n est une équation faisant intervenu une fonction inconnue $y(t)$, ses dérivées jusqu'à l'ordre n, et la variable t sous la forme :

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

1 Système différentielle du première ordre

Définition 2.3 (Système canonique)

Un système d'équations différentielles ordinaires :

$$F_k(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(k_2)}, \dots, y_n, y_n', y_n^{(k_n)}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{2.6}$$

S'appelle système canonique.
On appelle ordre du système (2.6) le nombre p égale à $p = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.
Intégrer ce système c'est déterminer les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n$ vérifiant les équations du système (2.6).

Définition 2.4 (Système normale)

Soit $y_1, y_2, \dots, y_n$, n fonctions dérivables de la variable t.
On appelle système d'équations différentielles du première ordre tout système d'équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = F_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = F_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = F_n(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

On écrite un tel système :

$$y_i' = F_i(t, y), \quad i = 1, \dots, n \Longleftrightarrow y = F(t, y), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

ou F est continue sur un domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.3 (d'existence et unicité) *Soit le système $y' = F(t, y)$ ou F est continue sur un domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et admet des dérivées partielles par rapport aux y_i de y dans $\mathbb{R}^n$ qui sont continues sur D.*
Alors pour tout y_0 et t_0 tels que (t_0, y_0) appartient à D, il existe une solution maximale unique $u(t)$ vérifiant la condition initiale $u(t_0) = y_0$.

2 La solution d'un système de n équation du première ordre n

On appelle solution du système (S) un ensemble des fonctions réelles dérivables $y_1(t), \dots, y_n(t)$ définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout $t \in I$.

$$y_i' = F_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \qquad i = 1, \dots, n.$$

Exemple 10 SKILLS Résolution le problème

Soient a et$b$ des réels quelconques.

Les fonctions $\begin{cases} y_1(t) = a\cos t + b\sin t \\ y_2(t) = -a\sin t + b\cos t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
sont solutions du système :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

puisque il est facile de vérifier que :

$$\begin{cases} y_1' = a(-\sin t) + b\cos t = -a\sin t + b\cos t = y_2 \\ y_2' = -a\cos t - b\sin t = -(a\sin t + b\cos t) = -y_1. \end{cases}$$

3 La relation entre équation différentielle d'ordre n et un système d'ordre n

Soit l'équation différentielle d'ordre n :

$$y^n = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

En considérant les dérivées successives $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ comme de nouvelles fonctions inconnues notées par le système différentiel.

$$\begin{cases} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y'(t) \\ \vdots \\ y_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y''(t) = y_3(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = y^{(n)}(t) = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \end{cases}$$

Exemple 11 SKILLS Résolution le problème

Soit l'équation du troisième ordre :

$$y''' = 3y'' - y' + y.$$

Se traduit par le système différentiel.

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \Longrightarrow y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix}$$

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ 3y_3(t) - y_2(t) + y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} y(t)$$