Série :1

Equations du 1er ordre

Exercice 1

1 Montrer que la fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + y^2$ est localement lipschitzienne par rapport à y sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Montrer que toute solution maximale de

$$\begin{cases} y' = t\sqrt{t^2 + y^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $(E_3) : y^{'} = (1 + \cos t)y - y^3$.

- Soient $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, Étudier l'existence et l'unicitéé de la solution maximale y de l'équation (E_3) qui vérifie $y(t_0) = y_0$

Exercice 4

1 Les fonctions suivantes sont elles lipschitzienne en y.

$$f_1(t, y) = \ln(t^2 + y^2 + 1)$$

$$f_2(t, y) = 2\sqrt{y}, y \in [1, +\infty[$$

2 Montrer que la fonction φ définie sur $]-\infty, 2]$ par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'} = y^3$.

Exercice 5

1 étudier la lipschitzienne au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = 3\sqrt{|y|}$.

2 Soit $a \succeq 0$. Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \dfrac{9}{4}(t - a)^2, t \succ a \\ 0, t \leq a. \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy $y^{'} = 3\sqrt{|y(t)|}$ avec $y(0) = 0$.