Chapitre 1

Equation du 1^{er} ordre

Definition 1.1. Une équation différentielle est une relation de la forme

$$F(t, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

entre une variable t, une fonction y et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n.

Exemple 1.1.

(1) $yy'' = t - t^2y'$.

(2) $x^{'} - tx + t^2 = 1$.

Definition 1.2. On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée.

Exemple 1.2.

(1) $yy'' = t - t^2y'$ est une équation différentielle d'ordre **2**.

(2) $x^{'} - tx + t^2 = 1$ est une équation différentielle d'ordre **1**.

Definition 1.3. On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle toute fonction $y = y(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, possédant des dérivées successives $Y', Y'', ..., Y^{(n)}$ et vérifiant la relation (1.1).

Exemple 1.3. Pour l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (équation différentielle d'ordre **2**).

La fonction $y_1 = \sin x$ est une solution, car la fonction $y_1 = \sin x$ est définie sur $I = \mathbb{R}$ et il existe $y_1' = \cos x$ et $y_2'' = -\sin x$ et $y'' + y = 0$.
De méme $y_2 = \cos x$ et aussi solution de l'équation donné de méme $y_3 = \sin x + \cos x$.
En générale $y = a \sin x + b \cos x$ est aussi solution où a et b sont deux constantes réelles.
Cette dernière est appelée solution générales et les autres $y_1, y_2, ..., y_n$ sont des solutions particulières.

Remarque 1.1.

- Résoudre ou intégrer une équation différentielle, il consiste à trouver toutes les solutions de cette équation différentielle.

- La courbe représentative de la solution générale **(resp particulier)** est appelée courbe intégrale.

1.1 Equation différentielle de premier ordre

Definition 1.4. Une équation différentielle d'ordre **1** est toute relation de la forme :

$$F(x, y, y') = 0 \quad ou \quad bien \qquad (1.1)$$

$$Y' = F(x, y) \tag{1.2}$$

1.1.1 Équation différentielle à variables séparables

Definition 1.5. On appelle une équation différentielle à variables séparables toute équation de la forme :

$$f(y)y' = g(x) \tag{1.3}$$

où f et g sont deux fonctions numériques définies et continues sur des intervalles à préciser.

Remarque 1.2. L'équation (1.3) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\boldsymbol{f(y)dy = g(x)dx.}$$

La solutions de l'équation (1.3) sont définies par

$$\boldsymbol{\int f(y)dy = \int g(x)dx + c.}$$

Démonstration. En remplaçant $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$ dans (1.3), on trouve $\boldsymbol{f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)}$ ou

$$\boldsymbol{f(y)dy = g(x)dx} \tag{1.4}$$

on intègre (1.4) terme à terme pour obtenir la solution générale de l'équation (1.3) sous la forme :

$$\boldsymbol{\int f(y)dy = \int g(x)dx + c.}$$

ou **c** étant une constante arbitraire. □

Exemple 1.4. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation :

$$\boldsymbol{x^2y' - y = 0}$$

il est évident que $\boldsymbol{y = 0}$ est une solution.
Pour $\boldsymbol{y \neq 0}$, on peut séparer les variables car $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x^2y' - y^2 = 0} &\Longrightarrow \boldsymbol{x^2\frac{dy}{dx} = y^2\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}} \\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{\frac{-1}{y} = \frac{-1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}} \\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{y} = \frac{1 - cx}{x}} \\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{x}{1 - cx}, \quad c \in \mathbb{R}.}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble $\boldsymbol{S}$ des solutions est

$$\boldsymbol{S = \{y = 0 \text{ ou } y = \frac{x}{1 - cx}, c \in \mathbb{R}\}}$$

Exemple 1.5. Intégrer l'équation suivante

$$x^3y' = e^{3y}$$

on peut séparer les variables x et y, on obtient

$$e^{-3y}dy = \frac{dx}{x^3}.$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{e^{-3y}}{3} = \frac{1}{2x^2} + c,$$

$$\begin{aligned} e^{-3y} = 3\Big(\frac{1}{2x^2} + c\Big) &\Longrightarrow -3y = Ln\Big|3\Big(\frac{1}{2x^2} + c\Big)\Big| \\ &\Longrightarrow y = \frac{-1}{3}Ln\Big|\frac{3}{2x^2} + \tilde{c}\Big|, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.1.2 Équation différentielle homogène

Rappel :

f est dit homogène de degré "n" si elle vérifie l'identité

$$\forall (x, y) \in D_f, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n = f(x, y).$$

Exemple 1.6. Montrons que $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ est une fonction homogène :
En effet pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2x^2 + \lambda^2y^2 - \lambda^2xy \\ f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^2(x^2 + y^2 - xy) \end{aligned}$$

Donc f est une fonction homogène d'ordre 2.

Definition 1.6. Une équation différentielle de la forme $y' = f(t, y)$ est dite homogène lorsque la fonction $f(x, y)$ est homogène de degré zéro.

Remarque 1.3. Une équation différentielle homogène peut se mettre toujours sous la forme $y' = \varphi(\dfrac{y}{x})$.

1.1.3 La résolution d'une équation différentielle homogène :

Soit l'équation différentielle homogène : $y' = \varphi(\frac{y}{t})$ $(*)$.
Posons $\frac{y}{t} = u$, donc $y = ut \Longleftrightarrow y' = u't + u$. Alors :

$$\begin{aligned}
(*) &\Longleftrightarrow u't + u = f(u) \\
&\Longleftrightarrow tu' + u = f(u) \\
&\Longleftrightarrow tu' = f(u) - u \Longleftrightarrow \frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x} \\
&\Longleftrightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dt}{t} \\
&\Longleftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|t| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation $(*)$ sont définies par :

$$y = tu \quad et \quad t = ke^{\int \frac{du}{f(u) - u}}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.7. Résoudre l'équation suivante :

$$ty' = \sqrt{t^2 - y^2} + y \qquad (**)$$

pour $t \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
(**) &\Longleftrightarrow y' = \sqrt{\frac{t^2 - y^2}{x^2}} + \frac{y}{t} \\
&\Longleftrightarrow y' = \sqrt{1 - (\frac{y}{t})^2} + \frac{y}{t}.
\end{aligned}$$

Posons $\frac{y}{t} = u$, donc $y' = tu' + u$, alors :

$$\begin{aligned}
(**) &\Longleftrightarrow t \Longleftrightarrow tu' + u = \sqrt{1 - u^2} + u \\
&\Longleftrightarrow tu' = \sqrt{1 - u^2} \\
&\Longleftrightarrow \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{t} \Longleftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dt}{t} \\
&\Longleftrightarrow \arcsin u = \ln|t| + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow u = \sin(\ln|t| + c) \\
&\Longleftrightarrow y = t \sin(\ln|t| + c), \qquad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1.1.4 Équations différentielles linéaires d'ordre un

Definition 1.7. La forme générale d'une équation linéaire du première ordre est :

$$a(t)y' + b(t)y = f(t) \tag{1.5}$$

ou a, b et f sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. Elle est linéaire car l'opérateur $L(y) = a(t)y' + b(t)y$ est linéaire.
2. Si la fonction $f \equiv 0$ sur I, l'opérateur (1.5) est dite homogène où sans second membre.
3. La solution générale se donne par $y = y_h + y_p$ où y_h est la solution générale de l'équation homogène, et y_p est une solution particulière de l'équation (1.5).

Soit en effet y la solution générale et y_p une solution particulière de l'équation (1.5).

$$\begin{cases} ay' + by = f(t) \\ ay_p' + by_p = f(t) \end{cases} \quad D'ou \quad par \quad différence. \tag{1.6}$$

$$a(y' - y_p') + b(y - y_p) = 0$$

ou

$$a(y - y_p)' + b(y - y_p) = 0$$

alors $(y - y_p)$ représente la solution générale notée y_h de l'équation homogène (second membre) donc $y = y_h + y_p$.

Cherchons la solution générale de l'équation homogène associée à (1.5), si $a(t) \neq 0$ sur I alors :

$$\begin{aligned} a(t)y' + b(t)y = 0 &\Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{b(t)}{a(t)} \\ &\Longleftrightarrow \ln|y| = -\int \frac{b(t)}{a(t)} dt \\ &\Longleftrightarrow y = ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}} dt, \qquad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer que y_p une solution particulière de l'équation (1.5), pour cela on utilise la méthode variation de la constante qui consiste à chercher une solution particulière sous la forme :

$$y_p = k(x)e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}dt},$$

Supposant que la constante k est une fonction de t, puis on détermine $k(t)$ à partir de l'équation complète (1.5).

Exemple 1.8. Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$ty' + t + y = 0 \qquad pour \qquad t \neq 0,$$

Résolvons l'équation homogène associée à l'équation (1.1)

$$\begin{aligned}
ty' + y = 0 &\Longleftrightarrow ty' = -y \\
&\Longleftrightarrow y = 0 \quad ou \quad \frac{y'}{y} = \frac{-1}{t} \\
&\Longleftrightarrow y = 0 \quad ou \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t} \\
&\Longleftrightarrow y = 0 \quad ou \quad (\ln|y| = -\ln|t| + c, \qquad c \in \mathbb{R}) \\
&\Longleftrightarrow y = 0 \quad ou \quad y = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow y(t) = \frac{-k}{t}, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation homogène est $y_h(t) = \frac{k}{t}, \quad k \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \frac{k(t)}{t}$

$$\begin{aligned}
(1.1) &\Longleftrightarrow ty_p' + y_p = -t \\
&\Longleftrightarrow t\Big(\frac{tk'(t) - k(t)}{t^2}\Big) + \frac{k(t)}{t} = -t \\
&\Longleftrightarrow k'(t) = -t \\
&\Longleftrightarrow k(t) = -\frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

Donc on peut prendre $y_p(t) = -\frac{t}{2}$ comme solution particulière, et par conséquent la solution générale de (1.1) est donnée par :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \frac{k}{t} - \frac{t}{2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.2 Équations différentielles non linéaires

1.2.1 Équation de Bernoulli

Definition 1.8. On appelle équation de Bernoulli une est équation différentielle du première ordre qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(t)y' + b(t)y = f(t)y^{\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\},$$

ou a, b et f sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(t) \neq 0$ sur I.

• **N B :** Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ on se ramène à l'équation différentielle linéaire.

1.2.2 Méthode de résolution

En divisant par y^{α}, on obtient :

$$a(t)y'y^{-\alpha} + b(t)y^{1-\alpha} = f(t)$$

le changement de la fonction défini par $z = y^{1-\alpha}$ conduit à une équation linéaire.
En effet $\quad z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$
d'où $\quad \frac{a(t)}{(1-\alpha)}z'(t) + b(t)z(t) = f(t)$
ou encore

$$a(t)z' + (1-\alpha)b(t)z = (1-\alpha)f(t).$$

Exemple 1.9. Intégrer l'équation suivante pour $(y \neq 0)$

$$y' - ty = ty^3 \tag{1.7}$$

divisons (1.7) par $\boldsymbol{y^3}$, on obtient : $\dfrac{y'}{y^3} - t\dfrac{1}{y^2} = t$, puis on fait un changement de variable.
En posant $Z = \dfrac{1}{y^2} = y^{-2}$, cela donne $Z' = -2y'y^{-3}$.
En remplaçant dans (1.7) on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre **1**,

$$\frac{y'}{y^3} - t\frac{1}{y^2} = -t$$
$$-2y'y^{-3} + 2t\frac{1}{y^2} = 2t$$

$$z' + 2tz = 2t \tag{1.8}$$

la résolution de (1.8) donne :

$$z_H = ke^{-t^2}, \quad z_P = 1 \Longrightarrow z = 1 + ke^{-t^2}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (1.7) est donc :

$$y^2 = \frac{1}{z} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{z}} \quad \text{où} \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + ce^{-t^2}}}.$$

1.2.3 Equation de Riccati

Definition 1.9. On appelle équation de Riccati une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(t) \neq 0$ sur l'intervalle I.

Méthode de résolution

• **Méthode 01 :** (Transformation l'équation de Riccati à une équation de Bernoulli)
Soit l'équation de Riccati :

$$a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = f(t) \tag{1.9}$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation (1.9) posons $y = y_p + Z$, donc $y' = y_p' + Z'$, alors la détermination de y revient à déterminer Z en effet :

$$\begin{aligned}
(1.9) &\Longleftrightarrow a(y_p' + Z') + b(y_p + Z) + c(y_p + Z)^2 = f(t)\\
&\Longleftrightarrow ay_p' + aZ' + by_p + bZ + c(y_p^2 + 2y_pZ + Z^2) = f(t)\\
&\Longleftrightarrow \underbrace{ay_p' + by_p + cy_p^2}_{=0} + aZ' + (b + 2cy_p)Z + cZ^2 = f(t)\\
&\Longleftrightarrow aZ' + (b + 2cy_p)Z + cZ^2 = f(t).
\end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation (une équation de Bernoulli), on obtient Z et par conséquent la solution y de l'équation (1.9) de Riccati.
• **Méthode 02 :** (Transformation l'équation de Riccati à une équation linéaire)
Soit l'équation de Riccati :

$$a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = f(t)$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation (1.9), posons $y = y_p + \dfrac{1}{Z}$ donc $y' = y'_p - \dfrac{Z'}{Z^2}$, alors la détermination de y revient à déterminer Z, en effet :

$$\begin{aligned}
(1.9) &\iff a\Big(y'_p - \frac{Z'}{Z^2}\Big) + b\Big(y_p + \frac{1}{Z}\Big) + c\Big(y_p^2 + \frac{1}{Z}\Big)^2 = f(t)\\
&\iff ay'_p - a\frac{Z'}{Z^2} + by_p + \frac{b}{Z} + c\Big(y_p^2 + 2\frac{y_p}{Z} + \frac{1}{Z^2}\Big) = f(t)\\
&\iff \underbrace{ay'_p + by_p + cy_p^2}_{=0} - a\frac{Z'}{Z^2} + \frac{b}{Z} + 2c\frac{y_p}{Z} + \frac{c}{Z^2} = f(t)\\
&\iff -a\frac{Z'}{Z^2} + (b + 2cy_p) + \frac{c}{Z^2} = 0\\
&\iff aZ' - (b + 2cy_p) - c = 0.
\end{aligned}$$

En résolution cette dernière équation ($1^{éré}$ ordre), on obtient Z et par conséquent la solution Y de l'équation (1.9) de Riccati.

Exemple 1.10. Intégrer l'équation :

$$y' = y^2 - 2ty + t^2 + 1 \tag{1.10}$$

il est facile de vérifier que $y_p = t$ est une solution particulière de (1.10).
En posant $y = t + Z$, donc :

$$\begin{aligned}
y' = 1 + Z' &\iff 1 + Z' = (t + Z)^2 - 2t(t + Z) + t^2 + 1\\
&\iff 1 + Z' = 1 + Z^2\\
&\iff Z' = Z^2 \Longrightarrow \int \frac{dZ}{Z^2} = \int dt \Longrightarrow \frac{-1}{Z} = t + c \Longrightarrow y = t - \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Exercice :

Résoudre les équations différentielles du première ordre suivantes :

1. $\boldsymbol{y' = 3y \Longrightarrow \frac{y'}{y} = 3}$.
2. $\boldsymbol{y' = 2\frac{y}{x} - 1}$.
3. $\boldsymbol{y' - xy = x}$.
4. $\boldsymbol{y' = \frac{1}{\sqrt{x}}y = \frac{1}{\sqrt{x}}}$.
5. $\boldsymbol{y' - 2xy = 3xe^{x^2}}$.
6. $\boldsymbol{y' = xe^{y}}$.
7. $\boldsymbol{yy' = x}$.
8. $\boldsymbol{y' = \sqrt{y}}$.