Chapitre 3

Introduction à la théorie de stabilité

Sommaire

On se propose ici d'étudier le comportement des solutions d'une EDO. Généralement parlé, une solution est dite stable si les solutions associées à des valeurs voisines de la donnée initiale restent proches de la solution considérée jusqu'à l'infini. Pour les systèmes différentiels linéaires on montre que la stabilité des solutions est gouvernée par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice associé à la partie linéaire de l'EDO. On termine ce chapitre par une simple présentation de la fonction de Lyaponove qui s'avère, sous certaines conditions, très pratique pour étudier la stabilité des EDO.

3.1 Généralités

On considère l'EDO

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. On suppose, en plus, que la fonction f est localement Lipschitzienne sur Ω. Supposons que l'EDO (3.1) possède une solution globale

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \Omega.$$

Définition 71

La solution φ de (3.1) est dite stable si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) pour tout $a \geq 0$ il existe $\mu(a) > 0$ telle que pour tout $\xi \in B(\varphi(a), \mu(a))$ la solution maximale y du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ est définie sur $[a; +\infty)$;

(ii) pour tout $a \geq 0$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(a, \epsilon) \in [0, \mu(a))$ telle que pour tout $\xi \in B(\varphi(a), \delta(a, \epsilon)$ la solution maximale du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ vérifie la relation:

$$\forall t \in [a, \infty), \|y(t) - \varphi(t)\| \leq \epsilon.$$

Remarque 72

La condition (i) de la définition ci–dessus nous garantie que pour tout $a \geq 0$, il existe une unique solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ définie sur $[a, +\infty[$ pourvu que ξ soit suffisamment proche de $\varphi(a)$. En plus, la condition (ii) nous garantie que pour tout $\epsilon > 0$, et ξ suffisamment proche de $\varphi(a)$ la graphe de la solution y du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ (dont l'existence est assurée par la condition (i)) et celui de la solution φ sont suffisamment proches.

Exemple 17

Soit l'EDO $y' = 0$. Étudiant la stabilité de la solution nulle i.e., $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $\varphi \equiv 0$.

- Soit $a \geq 0$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'unique solution maximale du problème de Cauchy $y' = 0$, $y(a) = \xi$ est définie sur $[a, +\infty[$ et $y \equiv \xi$. Ainsi, $\mu(a)$ peut être choisi d'une manière quelconque. La condition (i) de la Définition 71 est donc satisfaite.

- Soit $\epsilon > 0$ fixé mais arbitraire. On a:

$$\forall t \geq a, |y(t) - \varphi(t)| = \|y(t)\| \leq \epsilon \Rightarrow |\xi| \leq \epsilon.$$

  Il en résulte qu'on peut choisir $\delta(a, \epsilon) = \epsilon$. Ainsi, la condition (ii) de la Définition 71 est satisfaite. Conclusion: la solution nulle est donc stable.

■

Exemple 18

Soit l'EDO $y' = y$. Étudiant la stabilité de la solution nulle.

- Ainsi, soit $a \geq 0$. L'unique solution maximale du problème de Cauchy $y' = y$, $y(a) = \xi$ est définie sur $[a, \infty)$ par
$$y(t) = \xi e^{t-a}.$$
Ainsi, on peut choisir la constante $\mu(a)$ arbitrairement. La condition (i) de la Définition 71 est satisfaite.

- En revanche, la condition (ii) n'est pas saisfaite puisque
$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty.$$
Conclusion: la solution nulle est instable.

■

D'autres concepts de stabilité peuvent être définis.

Définition 73

La solution φ de (3.1) est dite uniformément stable si elle est stable et les constantes $\mu(a)$ et $\delta(a, \epsilon)$ figurant dans la Définition 71, ne dépendent pas de a et ϵ.

Définition 74

La solution φ de (3.1) est dite asymptotiquement stable si elle est stable et pour tout $\xi \in B(\varphi(a), \mu(a))$ la solution maximale y du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$, vérifie:
$$\lim_{t\to+\infty} \|y(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

Remarque 75

Les notions de stabilités définies ci dessus sont relatives à une solution particulière de l'EDO (3.1). Ainsi, deux solutions du même EDO peuvent se différer dans leur stabilité.

Exemple 19

On considère l'EDO, dite dynamique de population:
$$y' = by(p - y)$$
où $b > 0$. Étudiant la stabilité des solutions $\varphi_1 \equiv 0$ et $\varphi_1 \equiv p$.

- Soit $a \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $y' = ay(p-y)$, $y(a) = \xi$ admet une solution maximale définie sur $[a, \infty)$ par

$$y(t) = \frac{p\xi e^{bp(t-a)}}{p + \xi(e^{b(p(t-a)} - 1)}.$$

La condition (i) de la Définition 71 est donc satisfaite.

- On remarque que

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = p^2 \neq 0.$$

Ainsi, la condition (ii) de la Définition 71 est non–satisfaite. Conclusion: La solution nulle φ_1 est instable. Quant à la solution φ_2 on a :

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t) - \varphi_2(t)| = \lim_{t\to+\infty} \left| \frac{p\xi e^{bp(t-a)}}{p + \xi(e^{b(p(t-a)} - 1)} - p \right| = 0.$$

Conclusion: φ_2 est asymptotiquement stable.

■

Remarque 76

On considère l'EDO (3.1) et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \Omega$ une solution globale de (3.1). Le changement de fonction inconnuem

$$y = x - \varphi$$

mène à l'EDO suivante:

$$x'(t) = f(t, x(t) + \varphi(t)) - \varphi'(t). \tag{3.2}$$

Lors de ce chapitre on ne s'intéresse qu'à la stabilité de la solution nulle de l'EDO (3.1). Pour ce faire, on supposera que $0 \in \Omega$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t, 0) = 0$.

En considérant la solution nulle, on réécrit les Définitions 71, 73 et 74 comme suit.

Définition 77

La fonction nulle de l'EDO (3.1) est dite stable si:

(i) pour tout $a \geq 0$ il existe $\mu(a) > 0$ telle que pour tout $\xi \in B(0, \mu(a))$ la solution maximale y de $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ est définie sur $[a; +\infty)$.

(ii) pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(a, \epsilon) \in [0, \mu(a))$ telle que pour tout $\xi \in \xi \in B(0, \delta(a))$ la solution maximale du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ vérifie:

$$\forall t \in [a, \infty), \|y(t)\| \leq \epsilon.$$

Définition 78

La solution nulle de (3.1) est dite uniformément stable si elle est stable et les constantes $\mu(a)$ et $\delta(a, \epsilon)$ figurant dans la Définition 77, ne dépendent pas de a et ϵ.

Définition 79

La solution nulle de (3.1) est dite asymptotiquement stable si elle est stable et pour tout $\xi \in B(0, \mu(a))$ la solution maximale y du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$, vérifie:

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = 0.$$

Dans la suite on établit un lien entre les poins d'équilibre d'une EDO et la stabilité de la solution nulle.

Définition 80

On dit que $x^\star \in \Omega$ est un point stationnaire ou un point d'équilibre de l'EDO (3.1) si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t, x^\star) = 0.$$

Remarque 81

Il est claire que si $x^\star$ est un point stationnaire de l'EDO (3.1) alors la fonction constante $y \equiv x^\star$ est une solution constante de l'EDO (3.1) qu'on appelle solution stationnaire. En plus, il est claire, que la solution identiquement nulle est aussi une solution stationnaire de l'EDO (3.1).

On suppose que l'EDO (3.1) est autonome i.e., la fonction f ne dépend pas de t. On a le résultat suivant.

Théorème 82

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et soit $y : [a, +\infty) \to \Omega$ une solution de l'EDO

$$y'(t) = f(y(t)). \tag{3.3}$$

Si $\lim_{t\to+\infty} y(t) = y^\star$ et $y^\star \in \Omega$ alors $y^\star$ est un point d'équilibre de l'EDO (3.7).

Preuve. Soit $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$. Supposons que $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ est une solution de l'EDO (3.7). On considère une composante y_i où $i \in \{1, 2, ...n\}$ définie sur un intervalle $[m, m+1]$ où $m \in \mathbb{N} \cap [a, +\infty)$. On applique à la fonction y_i le théorème des accroissement fini sur l'intervalle $[m, m + 1]$. Ainsi, il existe un réel $\theta_m \in (m, m + 1)$ tel que

$$y_i(m + 1) - y_i(m) = y_i'(\theta_m) = f_i(y_i(\theta_m)).$$

Comme

$$\lim_{m\to+\infty} y_i(m + 1) - y_i(m) = 0,$$

et

$$\lim_m f_i(y(\theta_m) = f_i(y^\star)$$

on déduit que:

$$\lim_{t\to+\infty} f_i(y(t)) = f_i(y^\star)$$

et ce pour tout $i \in \{1, 2, ...n\}$. Ainsi, $f(y^\star) = 0$. ■

3.2 Stabilité des systèmes linéaires

Nous étudierons d'abord le cas le plus simple, à savoir le cas d'un système linéaire sans second membre:

$$y'(t) = \mathcal{A}y(t), \tag{3.4}$$

où $\mathcal{A} \in M_{(n\times n)}(\mathbb{C})$. Le théorème ci–dessous est utile pour la suite.

Théorème 83

La solution nulle de l'EDO (3.4) est stable (asymptotiquement stable), (uniformément stable) si et seulement si toute solution maximale de l'EDO (3.4) est stable (asymptotiquement stable), (uniformément stable).

Preuve. Supposons que $y = \varphi$ est une solution maximale de l'EDO (3.4). En utilisant le changement de fonction $x = y - \varphi$ on déduit que φ correspond à la solution maximale $x = 0$. Ainsi, il suffit de remarquer que φ satisfait les conditions des Définitions 71, 73 et Définition 74 si et seulement si la solution nulle $x = 0$ satisfait les conditions des Définitions 77, 78 et Définition 79. ■

Remarque 84

En vertu du théorème précédent on déduit que toutes les solutions maximales de l'EDO (3.4) ont le même type de stabilité. Ainsi dans ce qui suit on parlera de la stabilité d'un système différentiel tout entier.

Afin d'étudier la stabilité de l'EDO (3.4), on rappelle que pour tout $t_0 \geq 0$, la solution du problème de Cauchy $y' = \mathcal{A}y$, $y(t_0) = \xi$ est définie sur $[t_0, +\infty[$ et est donné par

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}\xi.$$

Ainsi la condition (i) dans la Définition 77 est satisfaite. Pour comprendre ce qui se passe étudiant le cas particulier.

1. $n = 1$ et $A = (a)$ où $a \in \mathbb{C}$.

$$\forall t \in [t_0, +\infty), \|y(t)\| = e^{(t-t_0)Re(a)}$$

Ainsi, la condition (ii) dans la Définition 78 est satisfaite si et seulement si $Re(a) \leq 0$. Conclusion: La solution nulle de l'EDO $y' = ay$ où $a \in \mathbb{C}$ est stable si et seulement $Re(a) \leq 0$. D'autre part, $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0$ si et seulement si $Re(a) < 0$. Conclusion: La solution nulle de l'EDO $y' = ay$ où $a \in \mathbb{C}$ est asymptotiquement stable si et seulement si $Re(a) < 0$. Le théorème ci–dessous caractérise la stabilité des solutions de l'EDO (3.4).

Théorème 85

Soient $\lambda_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$. les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors l'EDO (3.4) est:

(i) stable si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ou bien $Re(\lambda_i) < 0$ ou bien $Re(\lambda_i = 0$ et le bloc correspondant à λ_i est diagonalisable,

(ii) asymptotiquement stable si si et seulement si $Re(\lambda_i) < 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Preuve. On distingue les cas suivants:

- **La matrice A est diagonalisable.**

Dans ce cas, on se ramène après un changement linéaire de coordonnée à la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où λ_1, λ_2,....,λ_n désignent les valeurs propres de la matrice A. Ainsi, l'EDO (3.4) se ramène aux EDO linéaires suivants

$$y_j' = \lambda_j y_j,\ t_j(0) = \xi, j \in \{1, 2, 3 \cdots, n\}.$$

Les solutions sont définies par

$$y_j = \xi_j e^{\lambda_j (t - t_0)}, j \in \{1, 2, 3 \cdots, n\}.$$

Les solutions sont donc stables si et seulement si $Re(\lambda_j) \leq 0$ pour tout $j \in \{1, 2, 3 \cdots, n\}$ et asymptotiquement stable si et seulement si $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout $j \in \{1, 2, 3 \cdots, n\}$.

- **La matrice A est non diagonalisable.**

Dans ce cas on traite à part tout block d'une triangularisation de A. Plus précisément supposons que:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \star \\ & & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

où N est une matrice nilpotente[1] triangulaire supérieure non nulle. Il vient alors:

$$e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)\lambda I} e^{(t-t_0)} N = e^{\lambda(t-t-0)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} N^k.$$

Le résultat découle du fait que .... ■

3.2.1 Stabilité des systèmes linéaires perturbés

On considère le système

$$y' = \mathcal{A}y + F(t, y(t)), \tag{3.5}$$

où $\mathcal{A} \in M_{(n\times n)}(\mathbb{C})$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soient les conditions suivantes:

Sur la matrice $\mathcal{A}$.

(A) Il existe des constantes $M \geq 1$, $\omega > 0$ et $L > 0$ telles que:

$$\forall t \geq 0, \|e^{t\mathcal{A}}\| \leq Me^{-\omega t}$$

Sur la fonction f.

(f_1) f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et localement Lipshitzienne sur Ω.

(f_2) $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t, 0) = 0$.

(f_3) $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega . \|f(t, x)\| \leq L\|x\|$.

On commence par le résultat fondamental suivant.

Théorème 86

Supposons que les conditions (A), (f_1)∼(f_3) et (D) dont satisfaites. Alors si

$$LM - \omega < 0 \tag{3.6}$$

la solution nulle de l'EDO (3.5) est asymptotiquement stable.

Preuve. Soit $\xi \in \Omega$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$. On considère le problème de Cauchy

$$y' = \mathcal{A}y + f(t, y(t)),\ y(t_0) = \xi.$$

[1] Une matrice est dite nilpotente s'il existe $p \leq 2$ tel que $N^p = 0$

On rappelle que le problème de Cauchy ci–dessus admet une unique solution maximale définie sur $[t_0, T_n[$ est donnée par

$$y(t) = e^{(t-t_0)\mathcal{A}}\xi + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathcal{A}} f(s, y(s))ds.$$

On montre tout d'abord que si ξ est suffisament proch de 0 alors la solution y est définie sur $[t_0, \infty)$. On a

$$\forall t \in [t_0, T_n[, \|y(t)\| \leq \|e^{(t-t_0)\mathcal{A}}\|\|\xi\| + \int_{t_0}^{t} \|e^{(t-s)\mathcal{A}}\|\|(s, y(s))\|ds.$$

En utilisant les hypothèses (f_3) et (A) on aura

$$\forall t \in [t_0, T_n[, \|y(t)\| \leq Me^{-\omega(t-t_0)}\|\xi\| + \int_{t_0}^{t} LMe^{-\omega(t-s)}\|y(s)\|ds.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité ci–dessus par $e^{\omega t}$ on obtient

$$\forall t \in [t_0, T_n[, e^{\omega t_0}\|y(t)\| \leq Me^{\omega s}\|y(s)\|ds$$

On considère la fonction $x : [0, T_n[\to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall t \in [t_0, T_n[, x(t) = e^{\omega t}\|y(t)\|.$$

En conséquence on aura

$$\forall t \in [t_0, T_n[, x(t) \leq Me^{\omega t_0}\|\xi\| + \int_{t_0}^{t} LMx(s)ds.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall on aura:

$$\forall t \in [t_0, T_n[, y(t) \leq Me^{\omega t_0}\|\xi\|e^{LM(t-t_0}.$$

On aboutit donc à

$$\forall t \in [t_0, T_n[, \|y(t)\| \leq M\|xi\|e^{(LM-\omega)(t-t_0)}$$

Soit maintenant $\rho > 0$ choisit de telle sorte que $B(0, \rho) \subset \Omega$. On définit $\mu(a)$ par:

$$\mu(a) = \frac{\rho}{2M}$$

Il en résulte que

$$\forall t \in [t_0, T_n[, \|y(t)\| \leq \frac{\rho}{2}.$$

Supposons que $T_n < \infty$. On déduit ainsi que

$$\lim_{t \to T_n} y(t) = y^\star$$

et $y^\star \in B(0, \frac{\rho}{2}) \subset \Omega$. Ceci contredit le fait que la solution y est maximale. Conclusion: $T_n = \infty$ et donc la condition (i) de la Définition 79 est satisfaite. La condition (ii) est satisfaite. En effet, si $\xi \leq \mu(a)$ on a:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

La preuve est donc achevée. ■

Le résultat suivant est une conséquence du théorème ci-dessus.

Théorème 87

Soit $\mathcal{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ ont une partie réelle négative. Supposons que les conditions (D), $(f_1) \sim (f_2)$ sont satisfaites. S'il existe une fonction $\alpha; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \|f(t, c)\| \leq \alpha(\|x\|),$$

et

$$\lim_{r\Longrightarrow 0^+} \frac{\alpha(r)}{r} = 0.$$

Alors la solution nulle de l'EDO (3.5) est asymptotiquement stable.

Preuve. Comme toute les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ possèdent une partie réelle négative on déduit (voire exercie) qu'il existeent deux constantes $M \geq 1$ et $\omega > 0$ telle que la condition (A) est satisfaite. On choisit $L > 0$ telle que

$$ML - \omega < 0.$$

Soit à présent $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall r \in (0, \delta), \alpha(r) \leq Lr.$$

Ainsi, la matrice $\mathcal{A}$ et la fonction f vérifient les hypothèses du théorème précident sur $\mathbb{R}_+ \times \{x \in \Omega, \|x\| \leq \delta$. La preuve est donc terminée. ■

On s'intéresse maintenat à la stabilité de la solution nulle de l'EDO autonome

$$y' = f(y) \tag{3.7}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. On a le résultat suivant.

Théorème 88

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Si f est de classe C^1 sur Ω, $f(0) = 0$ est toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $\mathcal{A} = f_x(0)$ possèdent une partie réelle négative, alors la solution nulle de l'EDO (3.7) est asymptotiquement stable.

Preuve. Comme f est de classe C^1 sur Ω, alors on a:

$$\forall x \in \Omega, f(x) = f(0) + f_x(0)x + g(x) = \mathcal{A}x + g(x),$$

et telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Soit $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \alpha(r) = \sup\{\|f_x(\theta) - f_x(0)\|, \theta \in \Omega, \|\theta\| \leq r\}.$$

Ainsi, les hypothèses du Théorème 87 sont vérifiées. La preuve est donc achevée. ■

3.3 Fonction de Lyaponov

Soit l'EDO

$$y' = f(t, y) \tag{3.8}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que la fonction f satisfait les deux conditions suivantes.

(i) f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et localement Lipshitzienne sur Ω,

(ii) $f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 89

La première condition garantie l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy associé à l'EDO (3.8), quant à la deuxième nous montre que la fonction $\varphi \equiv 0$ est solution de l'EDO (3.8).

Définition 90

On dit que la fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ est définie positive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ s'il existe une fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, croissante et telle que $\omega(r) = 0$ si et seulement si $r = 0$ et

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, V(t, x) \geq \omega(\|x\|). \tag{3.9}$$

La fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_-$ est définie négative si sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ si $-V$ est définie positive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Définition 91

On appelle fonction de Lyaponov du système (3.8) toute fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) V est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, V(t, 0) = 0$;

(ii) V est définie positive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$;

(iii) la relation ci-dessous est satisfaite pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t, x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x) \leq 0. \tag{3.10}$$

Théorème 92

Si l'EDO (3.8) possède une fonction de Lyaponov alors la solution nulle est stable.

Preuve. Soient $a \in \mathbb{R}_+$, $\xi \in \Omega$ et $y : [a, T_m[\to \Omega$ l'unique solution maximale de l'EDO (3.8) satisfaisant $y(a) = \xi$. On montre tout d'abord que si ξ est suffisamment petit alors $T_m = +\infty$. Pour cela on défini la fonction $g : [a, T_m[\to \mathbb{R}_+$ par

$$\forall t \in [a, T_m[, g(t) = V(t, y(t)),$$

où V est la fonction de Lyaponov correspondant à l'EDO (3.8). La fonction g est de classe C^1 sur $[a, T_m[$. En plus de la relation (3.10) on déduit que:

$$\begin{aligned}\forall t \in [a, T_m[; g'(t) &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, y(t)) + \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(t, y(t))\frac{dy_i}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, y(t)) + \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(t, y(t)) f_i(t, y(t)) \leq 0. \quad (3.11)\end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction g est décroissante sur $[a, T_m[$. Ainsi,

$$\forall t \in [a, T_m[, g(t) \leq g(a) \Rightarrow \forall t \in [a, T_m[, V(t, y(t)) \leq V(\xi).$$

En conséquence, de la relation (3.9) on déduit que

$$\forall t \in [a, T_m[, \omega(\|y(t)\|) \leq V(a, \xi).$$

Soit à présent $\rho > 0$ tel que $B(0, \rho) \subset \Omega$. Comme le fonction $V(a, \cdot)$ est continue en 0 et $V(a, 0) = 0$ on déduit que pour tout $\omega(\rho) > 0$ où $\rho > 0$ (comme ci-dessus), il existe $r = r(a) \in]0, \rho[$ tel que

$$\forall \xi \in B(0, \rho), V(a, \xi) < \omega(\rho).$$

Ainsi,

$$\forall t \in [a, T_m[, \omega(\|y(t)\|) \leq \omega(\rho),$$

et donc

$$\forall t \in [a, T_m[, \|y(t)\| \leq \rho.$$

Comme $B(0, \rho) \subset \Omega$ et la solution y est saturée, on déduit de l'inégalité ci dessus que

$$\forall \xi \in \Omega, \|\xi\| \leq r(a) \Rightarrow T_m = +\infty.$$

De la même manière on démontre d'une manière similaire que pour tout $a \geq 0$ et $\epsilon > 0$, il existe $\delta(a, \epsilon)$ tel que

$$\forall \xi \in \Omega, \|\xi\| \leq \delta \Rightarrow \|y(t)\| \leq \epsilon.$$

Appendice A: Différentiabilité et intégrabilité dans les espaces vectoriels normés

Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Un $\mathbb{R}$–espace vectoriel[1] X est dit normé si l'on peut munir par une norme $N : X \to \mathbb{R}_+$. On rappelle ce qui suit.

Définition 95

Une norme sur un espace vectoriel X est une application $N : X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois axiomes suivants:

- Pour tout $x \in X$ on a: $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Pour tout $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $N(lambdax) = |\lambda| N(x)$
- Pour tous $x, y \in X$ on $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Exemple 20

1. On peut munir l'espace vectoriel $X = \mathbb{R}^n$ par trois normes à savoir

   - $N_1(x) = N_1((x_1, x_2, ...x_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
   - $N_2(x) = N_2((x_1, x_2, ...x_n)) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
   - $N_\infty(x) = \max\{|x_i|, i = 1 \cdot\cdot, n\}$

[1] Pour simplicité on ne considère que les espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Les résultats sont, en générale in changeables si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2. L'espace vectoriel des suites réelles bornées noté par $l^\infty(\mathbb{R})$ est muni par la norme suivante: Si $x = (x_n)_n$ est bornée alors:

$$N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

■

Définition 96

Un espace vectoriel normé est un Banach s'il est complet[a].

[a] Un espace topologique est complet si toute suite d'éléments de l'espace de Cauchy est convergente

Exemple 21

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $\mathbb{I}$ un ensemble quelconque. On note par $l^\infty(\mathbb{I}, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur $\mathbb{I}$ et à valeurs dans E. On munit $l^\infty(\mathbb{I}, E)$ par une norme que l'on note par $\|\cdot\|_\infty$ définie par:

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{I}, E), \|f\|_\infty = \sup\{f(x), x \in \mathbb{I}\}.$$

   On montre (à titre d'exercice) que $(l^\infty(\mathbb{I}, E), \|\cdot\|_\infty))$ est un espace de Banach.

2. Dans le cas particulier où $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}$ $l^\infty(\mathbb{I}, E)$ deviendra l'espace vectoriel des suites réelles bornées, et on écrit:

$$l^\infty(\mathbb{I}, E) = l^\infty(\mathbb{R})$$

   qui est un espace de Banach.

■

Différentielle d'une application

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés sur un corps $\mathbb{K}$ et $\Omega \subset X$ un ouvert. On considère la fonction $F : \Omega \to Y$. On note par $L(X,Y)$ le $\mathbb{K}$–espace vectoriel des applications linéaires définies sur X et à valeurs dans Y.

Définition 97

La fonction f est dite différentiable au sens de Fréchet en $x_0 \in \Omega$ s'il existe une application linéaire notée $f'(x_0) \in L(X,Y)$ telle que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \omega(x_0, h) \text{ où } \omega(x_0, h) = o(|h|) \text{ et } h \to 0.$$

Si f est dérivable au sens de Fréchet en tout point $x_0 \in \Omega$ on dit qu'elle est Fréchet différentiable sur Ω.

Remarque 98

(i) Si la fonction $f : \Omega \to Y$ est différentiable sur X alors on définit la fonction dérivée par $f' : \Omega \to L(X,Y)$. Si $X = \mathbb{K}$, on peut identifier $L(\mathbb{K}, Y)$ avec Y est donc $f'(x_0)$ sera identifié à un vecteur.

(ii) Si la fonction f' est continue on dit alors que f est continument différentiable sur Ω et on écrit $f \in C^1(\Omega)$.

Exemple 22

Soit l'opérateur intégral $F : X \to X$ où $X = C(\mathbb{J})$ et $\mathbb{J} = [a,b]$ définie par

$$F(x)(t) = \int_a^b k(t,s) f(s, x(s)) ds, \ t \in \mathbb{J}.$$

Si $k : \mathbb{J} \times \mathbb{J} \to \mathbb{R}$, f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues alors F est différentiable sur X et on a

$$\forall h \in X, (F'(x)(h))(t) = \int_a^b k(t,s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s)) h(s) ds$$

■

Exemple 23

On considère le fonctionnel $\psi : C(\mathbb{J}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \int_a^b \int_0^{x(t)} f(\tau, s) ds d\tau,$$

où $f : \mathbb{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Alors ψ est continument différentiable est

$$\psi'(x)(h) = \int_a^b f(\tau, x(\tau)) h(\tau) d\tau$$

■

Proposition 99

Soit X un espace de Banach. Si $f : \Omega \to Y$ alors $\int_a^b f'(t)dt = y(b) - y(a)$ si et seulement si $y[a, b] \to X$ est continument différentiable.

Proposition 100

Si $f : \Omega \to Y$ est différentiable en $a \in \Omega$ alors pour tout $h \in X$, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = df(a).h$$

Proposition 101

Si f est différentiable en a, elle est continue en a.

Remarque 102

On montre que si f est différentiable en x_0 si et seulement s'il existe une application linéaire continue notée $f'(x_0) \in L(X, Y)$ telle que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Exemple 24

Soit $X = C_0$ et $\mathbb{I} = [0, 1]$. On considère la fonction $y : \mathbb{I} \to X$, définie par

$$\forall t \in \mathbb{I}, y(t) = (y_n(t)) = \frac{1}{n} \sin(nt).$$

(i) On montre que y est Lipschitz. En effet,

(ii) On montre que y est partout non-différentiable.

■

Appendice B: Quelques résultats de compacité

On commence par rappeler le concept de compacité d'un ensemble dans un espace topologique quelconque. Soit E un ensemble non-vide muni d'une topologie.

Définition 103

Un sous–ensemble $M \subset E$ est dit compact si de tout recouvrement d'ouverts[a] de M on peut en extraire un sous recouvrement fini. Autrement dit, si $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille quelconque d'ouverts dans E alors:

$$M \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \in \Lambda; M \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} \Omega_{\lambda_i}.$$

[a]Un recouvrement est une famille de parties dont leur réunion contient l'ensemble M

Exemple 25

$\mathbb{R}$ n'est pas compact. En effet, la famille $(]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvremet d'ouverts de $\mathbb{R}$ dont on peut extraire aucun recouvrement fini. ▪

La proposition ci–dessous est utile pour caractériser les ensembles compacts.

Proposition 104

L'ensemble M est compact dans X si et seulement si de toute suite $(x_n)_n \subset M$ on peut en extraire une sous suite convergente dans M.

Définition 105

Un sous ensemble M de X est relativement compact si $\overline{M}$ est compact.

Exemple 26

Tout borné de $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle est un relativement compact. ∎

Dans la suite on note par $C([a,b];X)$ l'espace vectoriel d toutes les fonction définies et continues sur $[a,b]$ prenant ses valeur dans un espace de Banach X. On rappelle que $C([a,b];X)$ est muni de deux opérations: La première (interne) l'addition des fonction et la deuxième (externe) la multiplication d'une fonction par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application qui associe à chaque $y \in C([a,b];X)$ la quantité

$$\|y\| = \sup\{|y(t)\|, t \in [a,b]\}.$$

est une norme sur $C([a,b];X)$.

Définition 106

Soit $\mathcal{F}$ un sous ensemble de $C([a,b];X)$.

(i) La famille $\mathcal{F}$ est dite équicontinue en $t \in [a,b]$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon,t) > 0$ tel que: si $s \in [a,b]$ vérifie $|t-s| \leq \delta(t,\epsilon)$ alors:

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \epsilon,$$

uniformément par rapport à $f \in \mathcal{F}$.

(ii) La famille $\mathcal{F}$ est dite équicontinue sur $[a,b]$ si elle est en tout point $t \in [a,b]$.

(iii) La famille $\mathcal{F}$ est dite uniformément équicontinue sur $[a,b]$ si elle est équicontinue sur $[a,b]$ et $\delta(t,\epsilon$ peut être choisis indépendamment de t.

Remarque 107

On montre que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur $[a,b]$ si et seulement si elle équicontinue sur $[a,b]$.

Dans les espace vectoriels de dimension finie, une partie $\mathbb{A}$ est dite relativement compacte si elle est bornée. Elle est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Ces deux résultats ne demeurent plus vraies dans les espaces vectoriels de dimension infinie. En revanche, le théorème suivant appelé, Théorème Arzéla–Ascoli, donne une caractérisation de la compacité d'une famille $\mathcal{F} \subset C([a,b];X)$.

Théorème 108

Arzéla–Ascoli La famille de fonctions $\mathcal{F} \subset C([a,b];X)$ est relativement compact si et seulement si:

(i) $\mathcal{F}$ est équicontinue sur $[a,b]$.

(ii) Il existe un sous ensemble D dense dans $[a,b]$ telle que pour tout $t \in D$ l'ensemble $\mathcal{F}(t) = \{f(t), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans X.

On rappelle sans preuve le résultat de Mazur suivant.

Théorème 109

Mazur L'enveloppe convexe d'un compact dans un espace de Banach est compact

On aussi le résultat important suivant.

Théorème 110

Soit K un compact d'un espace de Banach X et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonction continues définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans K. Alors l'ensemble:

$$\left\{\int_a^b f(t)dt\right\}$$

est relativement compact dans X.

Preuve. En utilisant les sommes de Riemman, on déduit que

$$\left\{\int_a^b f(t)dt\right\} \subset (b-a)\overline{conv(K)}.$$

Il suffit donc d'apliquer le Théorème de Mazur (Théorème) pour aboutir au résultat. ■