1.6 Équations différentielles ordinaires sous contrainte

On considère l'EDO

$$y'(t) = f(t, y(t) \tag{1.24}$$

où $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Pour une variétés de raisons (physique, chimique,....) les solutions de l'EDO (1.24) doivent vérifier certaines contraintes appelées "viabilité contraintes".

La théorie de viabilité consiste à déterminer un lien entre la dynamique (dans notre cas l'EDO (1.24)) et une contrainte donnée que l'on considère, dans ce contexte, un sous ensemble $\mathcal{K}$ non-vide de $\mathbb{I} \times \Omega$. Plus précisément, on a les définitions suivantes (pour plus de détail voire [1] et [6]).

Définition 43

(i) On dit qu'une solution y du problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = x$ où $(t_0, x) \in \mathcal{K}$ est viable par–rapport à la contrainte $\mathcal{K}$[a] s'il existe $T > t_0$ telle que $[t_0, T] \subset \mathbb{I}$ et

$$\forall t \in [t_0, T], (t, y(t)) \in \mathcal{K}.$$

(ii) La contrainte $\mathcal{K}$ est dite viable par–rapport à (1.24) si pour tout $(t_0, x) \in \mathcal{K}$, le problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = x$ admet une solution viable $y; [t_0, T] \to \Omega$ où $[t_0, T] \subset \mathbb{I}$.

[a] Dans la suite, on omit le mot contrainte.

Remarque 44

Dans ce chapitre, on ne considère que les solutions de classe C^1. Néanmoins, la viabilité d'une solution peut être définie si elle est de type Carathéodory, ou faible...

On note ici que dans le cas où $\mathcal{K} = \mathbb{I} \times \Omega$, et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le théorème de Péano (Théorème 20) garanti que si f est continue sur $\mathcal{K}$, alors pour tout $(t_0, x) \in \mathcal{K}$, il existe $T > t_0$ telle que $[t_0, T] \subset \mathbb{I}$ et une solution $y : [t_0, T] \to \Omega$ du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = x$. Ainsi, si Ω est un ouvert et f est continue sur $\mathcal{K}$ alors $\mathcal{K}$ est viable par rapport l'EDO (1.24). Dans le cas où Ω n'est pas ouvert, le résultat précédent n'est plus valable. L'exemple suivant illustrera cette possibilité.

Exemple 14

On considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)) = e^{y(t)}, \tag{1.25}$$

où $f : [0,1[\times[0,1] \to \mathbb{R}$. f est continue sur $[0,1) \times [0,1]$. L'unique solution y du problème (1.25) vérifiant $y(0) = 1$ est définie par:

$$\forall t \in [0,1), y(t) = e^t.$$

On remarque immédiatement que: $\forall t \in (0,1), y(t) \notin \Omega$. C'est à dire le graphe de la solution s'éloigne (juste après son départ) de l'ensemble $\mathcal{K} = [0,1[\times[0,1]$. Est donc $\mathcal{K}$ n'est plus viable par rapport (1.25). ∎

Le premier théorème de viabilité a été annoncé par Nagumo en 1942. En fait, Nagumo a fut découvert la condition manquante pour garantir la viabilité d'un ensemble non nécessairement ouvert. Afin que nous puissions la bien comprendre, on s'est intéressée dans le paragraphe suivant à la notion de cone tangent.

1.6.1 Cône tangent au sens de Bouligand–Severi

La notion de vecteur tangent à un ensemble en un point donné a été introduite en même temps par Bouligand [2] et Severi [10] séparément et en même temps 1932. Dans la suite Ω est un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que la distance entre un point $v \in \mathbb{R}^n$ et l'ensemble Ω est définie par

$$\text{dist}(\eta; \Omega) = \inf_{\omega \in \Omega} \|\eta - \omega\|.$$

Définition 45

On dit que le vecteur η est tangent à Ω en x si

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \text{dist}(x + hv, \Omega) = 0.$$

L'ensemble de tous les vecteurs tangent à Ω en x est noté par $\mathcal{T}_\Omega(x)$.

Exemple 15

Soit $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$. On calcule l'ensemble $\mathcal{T}_a(\Omega)$. On distingue de possibilités:

- Soit $v \in \mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \text{dis}(a + hv, [a,b]) = 0$$

Il en résulte que,

$$\mathbb{R}_+ \subset \mathcal{T}_\Omega((0,0)) = \mathbb{R}.$$

- Soit $v \in \mathbb{R}_-^\star$. Dans ce cas on aura:

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathrm{dis}(a+hv,[a,b]) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}|a+hv-a| = v \neq 0.$$

Conclusion:

$$\mathcal{T}_a(\Omega) = \mathbb{R}_+.$$

▪

Exemple 16

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. On veut déterminer tous les vecteurs η tangents à Ω en $x = (1,0)$. Ainsi, soit $\eta = (\eta_1, \eta_2)$. On a:

$$\begin{aligned} \mathrm{dis}(x+h\eta,\Omega) = \mathrm{dis}((1+h\eta_1, h\eta_2),\Omega) = \mathrm{dis}((1+h\eta_1,h\eta_2);(0,0)) - 1 = \\ \sqrt{(1+h\eta_1)^2+(h\eta_2)^2} - 1 = \frac{2h\eta_1 + h^2\eta_1^2 + h^2\eta_2^2}{\sqrt{(1+h\eta_1)^2+(h\eta_2)^2}+1} \end{aligned} \tag{1.26}$$

En conséquence,

$$\liminf_{h\to 0} \frac{1}{h}\mathrm{dis}(x+h\eta,\Omega) = \liminf_{h\to 0} \frac{2\eta_1 + h\eta_1 + h\eta_2}{\sqrt{(1+h\eta_1)^2+(h\eta_2)^2}+1} = \eta_1.$$

Ainsi, le vecteur η est tangent à Ω en $x = (1,0)$ si et seulement si $\eta_1 = 0$. On écrit donc

$$\mathcal{T}_\Omega((0,0)) = \{\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2, \eta_2 = 0\}$$

▪

Proposition 46

L'ensemble $\mathcal{T}_\Omega(x)$ est un cone fermé.

Preuve. On rappelle que $\mathcal{T}_\Omega(x)$ est un cone si

- $0 \in \mathcal{T}_\Omega(x)$. En effet,

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+hv,\Omega) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x,\Omega) = 0.$$

- $\forall s \in \mathbb{R}, sv \in \mathcal{T}_\Omega(x)$. Ainsi, si on prend $v \in \mathcal{T}_\Omega(x)$ et $s \in \mathbb{R}$ on aura donc:

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+hsv,\Omega) = \liminf_{\theta\to 0^+} s\frac{1}{\theta}\mathrm{dist}(x+\theta v,\Omega) = 0.$$

Ceci prouve que $sv \in \mathcal{T}_\Omega(x)$.

Il nous reste à montrer que $\mathcal{T}_\Omega(x)$ est fermé. Soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments dans $\mathcal{T}_\Omega(x)$ convergente vers $\overline{v}$. Il s'agit de montrer que $\overline{v} \in \mathcal{T}_\Omega(x)$. Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$ et réel $h > 0$ on a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}&\mathrm{dist}(x+h\overline{v},\Omega) \leq \\ &\frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+h\overline{v},x+hv_n) + \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+h\overline{v},\Omega) \leq \|v_n-\overline{v}\| + \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+hv_n,\Omega).\end{aligned} \tag{1.27}$$

Sachant que $v_n \to \overline{v}$. Passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ on aura donc:

$$\liminf_n \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+h\overline{v},\Omega) \leq \liminf_n \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+hv_n,\Omega).$$

Comme $(v_n)_n \subset \mathcal{T}_\Omega(x)$. En faisant tendre $h \to 0^+$, on aura donc:

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+h\overline{v}.\Omega) = 0.$$

La preuve et donc achevée. ■

Proposition 47

Si x appartient à l'intérieure de Ω alors, $T_\Omega(x) = X$.

Preuve. Si x appartient à l'intérieure de Ω, alors il existe une boule ouverte de centre x et de rayon r telle que $B(x,r) \subset \Omega$. Si $v \in X$, peut-on choisir h suffisamment proche de 0 de sorte que $x+hv \in B(x,r)$? La réponse est oui. En effet, comme:

$$\|x+hv-x\| = \|hv\| = h\|v\|.$$

Pour avoir $x+hv \in B(x,r)$, i.e., $h\|v\| < r$, il suffit donc de choisir $h \in \left(0, \dfrac{r}{\|v\|}\right)$. On aboutit donc à:

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x+hv,\Omega) = 0.$$

■

Proposition 48

Soit Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \Omega$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) v est tangent à Ω en x, ($v \in \mathcal{T}_\Omega(x)$);

(ii) pour tous $\delta, \epsilon > 0$, il existe $h \in]0, \delta[$ et $p_h \in B(0, \epsilon)$ telle que:

$$x + hv + hp \in \Omega;$$

(iii) il existe trois suites $(h_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ vérifiant $\lim_n h_n = 0$, $(v_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim_n v_n = 0$ et $(p_n) \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim p_n = 0$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x + h_n v_n + h_n p_n \in \Omega$$

Preuve.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons que v est tangent à Ω en x. D'après la définition 45 on aura donc

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \text{dist}(x + hv, \Omega) = 0.$$

Ce qui est équivalent à:

$$\sup_{\delta > 0} \inf_{h \in (0,\delta)} \frac{1}{h} \text{dist}(x + hv, \Omega) = 0.$$

L'expression ci-dessus est aussi équivalente à

$$\forall \delta > 0, \forall \epsilon > 0, \exists h \in (0, \delta), \exists \omega_h \in \Omega, \frac{1}{h} \|x + hv - \omega_h\| \leq \epsilon.$$

En posant $p_h = \dfrac{-x - hv + \omega_h}{h}$, on aura donc:

$$x + hv + hk_h = \omega_h \in \Omega.$$

Il est claire que $p_h \in B(0, \epsilon)$. En fin, on a donc montrer que:

$$\forall \delta > 0, \forall \epsilon > 0, \exists h \in (0, \delta), \exists \omega_h \in \Omega, x + hv + hp_h \in= \omega_h \in \Omega.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Il suffit de choisir $\delta = \epsilon = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots, n$.

$(iii) \Rightarrow (i)$

■

1.6.2 Théorème de Nagumo

Comme on a déjà signalé auparavant, Nagumo [7] a découvert en 1942 la condition manquante pour assurer la viabilité d'un ensemble par rapport l'EDO (1.25). Plus précisément on a le résultat suivant.

Théorème 49

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fermé et $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue. Une condition nécessaire et suffisant pour que $\mathcal{K} = \mathbb{I} \times \Omega$ soit viable par rapport l'EDO (1.25) est la condition tangentielle:

$$\forall (t_0, x) \in \mathcal{K}, f(t_0, x) \in \mathcal{T}_{\otimes}(x).$$

Remarque 50

- Le théorème de Nagumo nous assure que si $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue et Ω est un fermé, alors $\mathcal{K} = \mathbb{I} \times \Omega$ est viable par rapport (1.24) si et seulement si la condition tangentielle (CT) est satisfaite.
- On note que le théorème de Nagumo géneralise celui établi par Peano en 1890. En effet, la condition tangentielle est redondé si Ω est ouvert.

1.6.3 Preuve du théorème de Nagumo

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème de Nagumo [7].

Preuve de la condition nécessaire

Soit $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Il s'agit de montrer que si la $\mathcal{K} = \mathbb{I} \times \Omega$ est viable par rapport à (1.24) alors la condition tangentielle (CT) est satisfaite.

Preuve. Soit $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$. Comme $\mathcal{K} = \mathbb{I} \times \Omega$ est viable par rapport à (1.24), alors il existe $T > t_0$ telle que $[t_0, T] \subset \mathbb{I}$ et une solution $y : [t_0, T] \to \Omega$ du problème de Cauchy $y' = f(t, y); y(t_0) = x$. Un développement limité d'ordre 1 de la fonction y au voisinage de t_0 donne:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)(h) + o(h) = x + f(t_0, x)h + o(h);\ h \simeq 0^+.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x + f(t_0, x)h, \Omega)) &= \operatorname{dist}(y(t_0 + h) - o(h), \Omega)) \\ &\leq \operatorname{dist}(y(t_0 + h) - o(h), y(t_0 + h))) + \operatorname{dist}(y(t_0 + h), \Omega). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Sachant que pour h suffisamment proche de 0 on a alors $y(t_0 + h) \in \Omega$, on aura ainsi:

$$\frac{1}{h}\text{dist}(x + f(t_0, x), \Omega)) \leq \frac{1}{h}(|o(h)| + 0) \leq |o(1)|.$$

En faisant tendre $h \to 0^+$:

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\text{dist}(x + f(t_0, x), \Omega)) = 0.$$

Conclusion: $f(t_0, x) \in \mathcal{T}_\Omega(x)$. La condition nécessaire est donc satisfaite. ■

Preuve de la condition Suffisante

On présentera un sketch de la preuve du théorème de Nagumo. Pour un détail de la preuve on réfère à [6].

Soit $(t_0, x) \in \mathcal{K}$. On considère le problème de Cauchy

$$y' = f(t, y(t)),\ y(t_0) = x. \tag{1.29}$$

Il s'agit de construire à partir de la condition tangentielle (CT) une solution viable du problème (1.29). Dans cette partie la continuité de f est primordiale. La démonstration se fera en trois étapes à savoir:

(i) La première étape consiste à construire à partir de la condition tangentielle (CT) une suite de solutions approximatives du problème de Cauchy (1.29).

(ii) Montrer la convergence de la suite de construite vers une fonction y continue.

(iii) Montrer que la fonction limite y est viable.

Première étape: Construction d'une suite de solutions approximative du problème de Cauchy (1.29). Soit $(t_0, x) \in \mathcal{K}$ et on considère le problème de Cauchy (1.29). On fixe a priori le domaine de définition des solutions approximatives. En fait, le domaine doit étre uniforme pour toutes les solutions (il ne dépend pas de l'approximation choisie). Cela va nous servir dans l'étape de passage à la limite.

Comme Ω est fermé et $x \in \Omega$, on déduit qu'il existe $\rho > 0$ telle que $B(x, \rho) \cap \Omega$ est fermé. La fonction f étant continue. Ainsi, elle est bornée sur $B(x, \rho) \cap \Omega$. Soit donc

$$M = \sup_{y\in B(x,\rho)\cap\Omega} \|f(t_0, y)\|. \tag{1.30}$$

On choisit T de sorte que

$$(T - t_0)(M + 1) \leq \rho. \tag{1.31}$$

Le lemme suivant est constructif; à partir duquel on peut construire une suite de solutions approximatives du problème (1.29).

Lemme 6

Soit T, ρ et $M > 0$ fixés comme ci–dessus. Pour tout $\epsilon > 0$, ils existent trois fonctions $\sigma; [t_0, T] \to [t_0, T]$ (croissante), $g : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, (Lebesgue intégrable) et $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ vérifiant:

(i) $\sigma(t) \leq t$ *et* $t - \sigma(t) \leq \epsilon$, *pour tout* $t \in [t_0, T]$;

(ii) $\|g(t)\| \leq \epsilon$, *pour tout* $t \in [t_0, T]$;

(iii) $y(\sigma(t)) \in B(x, \rho) \cap \Omega$ *pour tout* $t \in [t_0, T]$ *et* $y(T) \in B(x, \rho) \cap \Omega$;

(iv) $y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(\sigma(s), y(\sigma(s))ds + \int_{t_0}^{t} g(s)ds$, *pour tout* $t \in [t_0, T]$.

Preuve.

Initiation du problème. Il s'agit d'initialiser la construction des fonctions du lemme précédent. Cela veut dire qu'on construit les fonction σ, g et y sur un intervalle $[t_0, t_0 + h]$ tout en vérifiant les assertions du lemme.

Soit $(t_0, x) \in \mathcal{K}$ et $\epsilon \in (0, 1)$. Comme $f(t_0, x)$ est tangent à $\mathcal{K}$ en (t_0, x), alors il existent $\delta > 0$, $h \in)0, \delta($ et $p \in X$ tels que $\|p\| \leq \epsilon$ et

$$x + f(t_0, x)h + hp \in \Omega.$$

on définit les fonctions $\sigma : [t_0, t_0 + h] \to [t_0, t_0 + h]$, $g : [t_0, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ et $f : [t_0, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ de la manière suivante:

$$\begin{cases} \forall t \in [t_0, t_0 + h], \sigma(t) = t_0 \\ \forall t \in [t_0, t_0 + h], g(t) = p \\ \forall t \in [t_0, t_0 + h], y(t) = x + (t - t_0)f(t_0, x) + (t - t_0)p. \end{cases}$$

On vérifie que les fonctions σ, g et y vérifient les assertions (i)$\sim$(vi) du lemme ci-dessus. En effet, les conditions (i), (ii) et (vi) sont satisfaites. On montre la vérité de la condition (iii). En utilisant les relations (1.30) et (1.31) on déduit immédiatement que

Première étape. Maintenant on va montrer l'existence des fonction σ, g et y sur l'intervalle $[t_0, T]$. On définit l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les triplets (σ, g, y) vérifiant les assertions du lemme 6 définies sur un intervalle $[t_0, t_0 + h] \subset [t_0, T]$. On munit $\mathcal{S}$ par une relation binaire

$\preceq$ définie de la manière suivante: soient (σ_1, g_1, y_1), $(\sigma_2, g_2, y_2) \in \mathcal{S}$ définies respectivement sur $[t_0, t_0 + h_1]$ et $[t_0, t_0 + h_2]$. Alors

$$(\sigma_1, g_1, y_1) \preceq (\sigma_2, g_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 \leq h_2 \\ \forall t \in [t_0, t_0 + h_1], (\sigma_1(t), g_1(t), y_1(t)) = (\sigma_1(t), g_1(t), y_1(t)) \end{cases}$$

Ainsi on démontre que l'ensemble $\mathcal{S}$ admet un élément maximale $\overline{y} : [t_0, \overline{T}] \to \mathbb{R}^n$. L'étape suivante consiste à démontrer que $\overline{T} = T$. On raisonne par l'absurde, en supposons que $\overline{T} < T$. La contradiction sera établi à l'aide de la condition tangentielle. En effet, comme la condition tangentielle est satisfaite en tout $(\tau, \xi) \in \mathcal{K}$ cela va nous permettre de construire une solution définie sur $[\overline{T}, \overline{T} + \delta[\subset \mathbb{I}$. Le principe de recollement va ainsi nous permet de définir une solution du problème (1.29) définie sur $[t_0, \overline{T} + \delta[$ ce qui contredit la maximalité de la solution $\overline{y}$.

Deuxième étape. En posant $\epsilon = \frac{1}{n}, n = 1, 2 \cdots$ on va ainsi construire une suite de fonctions approximatives (y_n). Le théorème d'Ascoli–Arzela joue un rôle primordiale pour montrer que la suite (y_n) converge uniformément vers une fonction y solution du problème (1.29).

Troisième étape. On montre que la solution $y; [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ est viable, i.e. $\forall t \in [t_0, T], y(t) \in \Omega$.

■

1.6.4 Application

On présente dans ce paragraphe quelques applications de la théorie de viabilité.

Dépendance lipschitzienne des solutions par rapport les conditions initiales

On considère l'EDO:

$$y' = f(y(t)) \tag{1.32}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. On montre que les solutions de l'EDO (1.32) dépendent d'une manière Lipschitzienne par rapport aux conditions initiales.

Théorème 51

Supposons que f est Lipschitzienne sur Ω, i.e. il existe une fonction $k > 0$ telle que

$$\forall (y, z) \in \Omega, \|f(y) - f(z)\| \leq k\|y - z\|.$$

Soient $y_0, z_0 \in \Omega$. Si $y; [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ est une solution de l'EDO (1.32) vérifiant $y(t_0) = y_0$ alors il existe une solution $z : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ de l'EDO (1.32) vérifiant $z(t_0) = y_0$ telle que:

$$\forall t \in [t_0, T], \|y(t) - z(t)\| \leq e^{k(T-t_0)}\|y_0 - z_0\|$$

Preuve. On présente un sketch de la preuve. On considère l'espace de Banach $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Soit

$$\mathcal{K} = \{(y, z) \in X, \|y\| \leq z\}.$$

On considère l'EDO

$$u' = F(u), \tag{1.33}$$

où $F : X \to X$ définie par

$$\forall u \in X, F(u) = F(y, z) = (f(y), z)$$

L'idée est donc de montrer que l'ensemble $\mathcal{K}$ est viable par rapport l'EDO (1.33). ∎

Théorème de point fixe de Banach

On donne une extension du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 52

Soit Ω un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction Lipschitzienne de constante $L < 1$. Si

$$\forall x \in K, \liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\mathrm{dist}(x + h(f(x) - x), K) = 0,$$

alors g possède un unique point fixe.

Preuve. On considère la fonction $f : K \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall x \in K, f(x) = g(x) - x.$$