Série d'exercice 01

Exercice 1 (10pt) :

Soit F une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} F(x) = +\infty$$

et soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) &= & -\nabla F(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ \\ x(t_0) &= & x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que (1) admet une solution unique maximale définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ de $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est décroissante puis que :
$$T_+ = +\infty.$$
3. Prenons $n = 1$ et $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Montrer que dans ce cas qu'on peut avoir $T_- > -\infty$.

Exercice 2 :

Considérons l'équation de Riccati

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = x^2(t), \ t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que (2) admet une solution maximale définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ contenent $t_0 = 0$.
2. Soit $y(\cdot)$ une fonction continue définie sur J vérifiant
$$y(t) \leq e^{\int_0^t y(s)ds}, \ \forall t \in J.$$
En utilisant la question (1), montrer que :
$$y(t) \leq \frac{1}{1-t}, \ \forall t \in J.$$
3. Considérons maintenent l'équation de Riccati non homogène
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = x^2(t) + t^2, \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

(3.1) Soit $x(\cdot)$ la solution maximale de (3). Posons

$$z(t) = e^{-\int_0^t x(s)ds}.$$

Ecrire une équation différentielle d'ordre deux pour $z(\cdot)$ et montrer que :

$$z(0) = z''(0) = z^3(0) = 0.$$

(3.2) Résoudre l'équation différentielle en $z(\cdot)$ en cherchant une solution sous forme d'une série entière.

(3.3) Déduire que $x(\cdot)$ est définie sur un intervalle $]-a, a[$ avec $a \in]2, +\infty[$.

Exercice 3 :

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = 2te^{-t^2} + \dfrac{x^5(t)}{1+x^4}\cos(te^{x(t)}), \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

1. Montrer que (4) admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ de $\mathbb{R}$ contenant $t_0 = 0$.
2. Soit $\phi(\cdot)$ la solution maximale de (4). En utilisant la formule intégrale de (4), montrer que :
$$|\phi(t)| \leq 2 + \int_0^t |\phi(s)|, \quad \forall t \in J.$$
3. Déduire que :
$$\phi(t) \leq 2e^{|t|}, \quad \forall t \in J.$$
4. Montrer que la solution est globale c'est-à-dire que $J = \mathbb{R}$.

Exercice 4 :

1. Donner les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants :
$$x'(t) = x^3(t),\ x(0) = 0 \quad \text{et } x'(t) = \frac{1}{x(t)},\ x(0) = 1.$$
2. Montrer que toute solution maximale du problème de Cauchy
$$x'(t) = t\sqrt{t^2 + x^2(t)}, \quad x(t_0) = x_0$$
est globale.

Exercice 5 :

On considérons l'équation différentielle :

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Supposons que ϕ et ψ sont deux solutions de cette équation telle qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ avec

$$\phi(t_0) < \psi(t_0).$$

Montrer alors que :

$$\phi(t) < \psi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Indication : Utiliser le raisonnement par absurde.

Exercice 6 :

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = (a - x(t))(b - x(t)),$$

où a et b sont deux constantes réelles avec $a \leq b$.

1. Montrer que pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ fixée, cette équation admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$.
2. Que vaut cette solution si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$?.
3. Supposons que $a = b$.
   Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle. Tracer l'allure de ces solutions en fonctions a et x_0.
4. Supposons que $a = 1,\ b = 2,\ x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$.
   Déterminer dans cas la solution en fonction de $x(0) = x_0$ puis tracer l'allure de la solution en fonction de x_0.

Exercice 7 :

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = (1 + \cos t)x(t) - x^3(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases} \tag{5}$$

1. Montrer que (5) admet une solution maximale locale unique ϕ définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et que ϕ est de classe C^2 sur J.
2. Montrer que s'il existe $t_1 \in J$ telle que $\phi(t_1) = 0$ alors $\phi(t) = 0$ pour tout $t \in J$.

3. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour $t \in J$, on a :

$$0 < \phi(t) \leq \phi(0)e^{Ct}.$$

4. Montrer que la solution maximale ϕ est globale.

5. Soit $\psi(t, x)$ le flot associé au problème (5) en $t = 0$. On pose

$$P(x) = \psi(2\pi, x) \text{ où } x \in \mathbb{R}_+.$$

   Vérifier que $P(0) = 0$ et $P'(0) = e^{2\pi}$, puis déduire que P est solution de l'équation différentielle

$$P'(x) = e^{-4\pi}\left(\frac{P(x)}{x}\right)^3.$$

6. Résoudre cette équation différentielle, puis déduire que ϕ et 2π périodique.