Chapitre 2

EDO dans la dimension infinie

Sommaire

2.1 Introduction

La majorité des problèmes décrits par des EDP (équations aux dérivés partielles) provenant des modèles de la physique sont des équations d'évolutions (équations décrivant le changement de l'état physique au cours du temps). Ces modèles peuvent être considérées comme des EDO dans des espaces de Banach appropriés. Par exemple, l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \Delta y(t,x) \tag{2.1}$$

où Δ désigne le laplacien et $y : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, peut être transformée à une EDO du premier ordre. En effet, si on considère $X = L^1(\Omega)$, l'espace de Banach des fonctions intégrables sur Ω et on définit l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ par

$$D(A) = \{y \in L^1(\Omega), \Delta y \in L^1(\Omega)\} \text{ et } Ay = \Delta y$$

alors l'EDP (2.1) s'écrit sous la forme d'une EDO du premier ordre $y' = Ay$.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux problèmes de Cauchy ayant la forme

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f : \mathbb{I} \times \Omega \to X$, X est Banach, $\Omega \subset X$ et $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

Les concepts d'intégrabilité et dérivabilité dans les espaces de Banach sont détaillés dans Appendice A.

On commence par définir une solution du problème (2.2).

Définition 58

Une fonction $y : \mathbb{J} \to \Omega$ est dite solution du problème (2.2) où $\mathbb{J}$ est un sous intervalle non vide de $\mathbb{I}$ contenant t_0 si:

- $\forall t \in \mathbb{J}, y(t) \in \Omega$ et $y(t_0) = x$,
- y est différentiable sur $\mathbb{J}$ et $\forall t \in \mathbb{J}, y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 59

Le concept de solution des EDO en dimension infinie est une sujet délicat. En dimension infinie, rarement les EDO's admettent des solutions partout différentiable. Pour plus de détail; on réfère aux [8, 5, 4].

Comme en dimension finie, le résultat suivant est une caractérisation des solutions (classiques) du problème (2.2).

Proposition 60

Supposons que f est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$. La fonction $y : \mathbb{J} \to \Omega$ est une solution du problème de Cauchy (2.2) si et seulement si y est continue sur $\mathbb{J}$ et

$$\forall t \in \mathbb{J}, y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

Preuve. La preuve est analogue à celle faite dans la Proposition 18. On note que $\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$ est au sens de Bochner (voire Appendice A). ■

Remarque 61

Les notions de solution globale, maximale, solution à droite, à gauche etc....sont les mêmes qu'en dimension finie voire Définition 9.

2.2 Théorème de Peano en dimension infinie

Supposons que $X = \mathbb{R}^n$ et f est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$. Alors le théorème de Peano garanti que pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$, le problem de Cauchy (2.2) admet au moins une solution locale définie sur un intervalle $\mathbb{J}$ contenant t_0.

La généralisation "naïve" de théorème de Peano aux espaces de dimension infinie est drastiquement fausse.

En 1951, Dieudonné [3] a construit deux exemples montrant que la continuité de la dynamique (dans notre cas la fonction f) est insuffisante pour garantir l'existence d'au moins une solution locale au problème de Cauchy (2.2).

En particulier, pour tout espace de Banach X de dimension infinie, il existe un problème de Cauchy (associé à une fonction continue $f : \mathbb{I} \times X \to X$ ne possédant pas de solution locale [8].

Ainsi pour garantir l'existence d'au moins une solution locale, une hypothèse supplémentaire sur la fonction f (redondante en dimension finie) doit être imposée.

Définition 62

La fonction f est dite *compact* si elle transforme tout borné dans $\mathbb{I} \times \Omega$ à un relativement compact dans X.

Le théorème ci-dessous est une variante du théorème de Peano en dimension infinie.

Théorème 63

Si f est compact et continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert alors pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$, le problème (2.2) admet au moins une solution locale $y : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \to \Omega$ définie sur un sous intervalle $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ contenant t_0.

Remarque 64

En dimension finie, l'hypothèse f compacte est redondante. En effet, si f est continue alors elle transforme tout borné dans $\mathbb{I} \times \Omega$ à un borné dans $\mathbb{R}^n$ qui est relativement compact.

Avant d'entamer la preuve du Théorème 63, on considère tout d'abord le cas particulier où f est continue sur $\mathbb{I} \times X$ et $f(\mathbb{I} \times X)$ est relativement compact dans X. On choisit $\lambda > 0$ et $\delta > 0$ telles que $[t_0, t_0 + \delta] \subset I$ et on considère l'équation intégrale à retard:

$$y_\lambda(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [t_0 - \lambda, t_0] \\ x + \int_{t_0}^{t} f(s, y_\lambda(s - \lambda))ds & \text{si } t \in (t_0, t_0 + \delta] \end{cases} \tag{2.3}$$

- **Méthode de démonstration.** L'idée de la preuve est la analogue à celle du Théorème 20. Tout d'abord on montre que pour tout $\lambda > 0$, l'équation intégrale (2.3) admet, au moins une solution $y_\lambda : [t_0 - \lambda, t_0 + \delta]$. En suite, en faisant tendre $\lambda \to 0$ on montre que $(y_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers une fonction y. Finalement, on montre que la limite y est une solution du problème de Cauchy considéré. On note ici que la compacité de la fonction f est primordiale dans la convergence des solutions approximatives vers une solution du problème considéré.

Lemme 7

Si $f : \mathbb{I} \times X \to X$ est continue, alors pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times X$, $\lambda > 0$ et $\delta > 0$ telle que $[t_0, t_0 + \delta] \subset \mathbb{I}$ l'équation intégrale à retard (2.3) admet une et une seule solution définie sur $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

Preuve. On remarque tout d'abord que la fonction y_λ est définie d'une manière unique sur l'intervalle $[t_0 - \lambda, t_0]$ ($y_\lambda \equiv x$). Soit à présent $t \in [t_0, t_0 + \lambda)$. Il est claire que si $s \in [a, t]$ alors $s - \lambda \in [t_0 - \lambda, t_0]$. Ce qui donne $y_\lambda(s - \lambda) = x$. En conséquence,

$$y_\lambda(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, x)ds,$$

ce qui permet de dire que la fonction y_λ est aussi déterminée sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \lambda]$. Ainsi, d'une manière analogue on peut définir, par récurrence, la fonction y_λ sur les intervalles $[t_0 +$

$\lambda, t_0 + 2\lambda]$, $[t_0 + 2\lambda, t_0 + 3\lambda]$,......, $[t_0 + (n-2)\lambda, t_0 + (n-1)\lambda]$ telle que $n\lambda \geq t_0 + \delta$. Ainsi, la fonction y_λ est définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$ et est continue. La preuve est donc achever. ■

On passe maintenant à un autre résultat auxiliaire d'existence.

Lemme 8

Soit $f : \mathbb{I} \times X \to X$ continue et $f(\mathbb{I} \times X)$ est relativement compact, alors pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times X$ et $\delta > 0$ telle que $[t_0, t_0 + \delta] \subset \mathbb{I}$, l'équation à retard (2.3) possède une et une seule solution définie sur $[t_0, t_0 + \delta]$.

Preuve. Soit $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times X$ et $\delta > 0$ telle que $[t_0, t_0 + \delta] \subset \mathbb{I}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation intégrale à retard $\delta_n = \frac{1}{n+1}$

$$y_n(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [t_0 - \delta_n, t_0] \\ x + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s - \delta_n))ds & \text{si } t \in (t_0, t_0 + \delta_n] \end{cases} \tag{2.4}$$

En vertu du Lemme 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation intégrale à retard (2.4) admet une et une seule solution $y_n : [t_0 - \delta_n, t_0 + \delta] \to X$. Dans la suite on considère que la famille $\mathcal{F} = \{y_n; n \in \mathbb{N}\}$ des restrictions des solutions y_n à l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$. Il s'agit de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est relativement compact dans l'espace $C([t_0, t_0 +_d elta]; X)$. ceci reviens à démontrer que $\mathcal{F}$ vérifie les hypothèses du théorème d'Arzela–Ascoli (Théorème 108), i.e. $\mathcal{F}$ est uniformément borné et équicontinue.

la famille $\mathcal{F}(t) = \{y_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact. Il s'agit de montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, l'ensemble

$$\mathcal{F}(t) = \{y_n(t), n \in \mathbb{N}\}$$

est relativement compact dans X. Cela découle immédiatement de l'hypothèse: $f(\mathbb{I} \times X)$ est relativement compact dans X. Ainsi, on déduit du Lemme 110 que l'ensemble:

$$\mathcal{F}(t) = \{y_n(t); n \in \mathbb{N}\} = \left\{x + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s - \delta_n))ds; n \in \mathbb{N}\right\}$$

est relativement compact dans X pour tout $t \in [t_0, t_0 +_d elta)$.

la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue. l'ensemble $\mathcal{F}$ est équicontinue. En effet,

$$\forall (t, s) \in [t_0, t_0 + \delta) : \|y_m(t) - y_s(t)\| \leq \left| \int_{s}^{t} \|f(s, y_n(s - \delta_n))\| ds \right| \leq M|t - s|,$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est équicontinue sur $[t_0, t_0 + \delta]$. En appliquant le Théorème d'Ascoli–Arzela on déduit que $(y_n)_n$ converge uniformément vers une fonction

$y : [t_0, t_0 + \delta] \to X$. D'autre part on a

$$\lim_n y_n(s - \delta_n) = y(s)$$

uniformément sur $[t_0, t_0 + \delta]$. Comme f continue sur $\mathbb{N} \times X$, en passant à la limite dans (2.4) on déduit que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta], y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Il s'ensuit donc que $y : [t_0, t_0 + \delta] \to X$ est une solution du problème de Cauchy (2.2).

■

On passe maintenant à la preuve du théorème principale de ce paragraphe, (Théorème 63).

Preuve. Soit $t_0, x) \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, on déduit qu'il existent $d > 0$ et $r > 0$ telles que

$$[t_0 - d, t_0 + d] \times B(x, r) \subset D \,\text{et}\, B(x, r) = \{\eta \in X; \|\eta - x\| \leq r\}.$$

On définit la fonction $\rho : X \to X$ par:

$$\rho(y) = \begin{cases} y & \text{si}\, y \in B(x, r) \\ \dfrac{r}{\|y - x\|}(y - x) + x & \text{si}\, y \in X - B(x, r). \end{cases}$$

Ainsi, ρ est continue et $\rho(X) \subset B(x, r)$. On définit maintenant la fonction $g : (t_0 - d, t_0 + d) \times X \to X$ par

$$\forall (t, y) \in (t_0 - d, t_0 + d) \times X; g(t, y) = f(t, \rho(y)).$$

L'ensemble $f((t_0 - d, t_0 + d) \times B(x, r)$ est relativement compact puisque la fonction f est b–compact. Ainsi, g est continue et $g((t_0 - d, t_0 + d) \times X)$ est relativement compact. En vertu du Lemme 7, on déduit que pour tout $d' \in (0, d)$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = x, \end{cases}$$

admet au moins une solution $y : [t_0, t_0 + d'] \to X$. Comme y est continue en t_0 et $y(t_0) = x$, on déduit que pour tout $r > 0$, il existe $\delta \in (0, d')$ tels que pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ on a:

$\|y(t)-x\| \leq r$. Ce qui donne: $g(t, y(t)) = f(t, (y(t))$. En conséquence, la fonction y est solution du problème (2.2). La preuve est donc achevée. ■

Remarque 65

On note ice que l'argument qui fait défaut le résultat de Peano est l'impossibilité de faire converger les solutions approchées locales au moyen du théorème d'Ascoli. Ce dernier tombe lui-même en défaut du fait que les boules fermées de X ne sont pas compactes: par le théorème de Riesz, la boule unité fermée d'un espace normée de dimension infinie n'est jamais compacte. Plus précisément, on peut démontrer que dans tout espace de Banach séparable X de dimension infinie il existe une fonction continue $f : X \to X$ telle que l'EDO $y' = f(y)$ n'admet aucune solution locale, voir par exemple [8].

Remarque 66

Les résultats établis en dimension finie concernant l'existence des solutions maximales demeurent toujours valables en dimension infinie. Plus précisément, on a la variante ci–dessus du théorème de Peano concernant l'existence d'une solution maximale d'un problème de Cauchy en dimension infinie.

Théorème 67

Si f est compact et continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert alors pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$, le problème (1.9) admet au moins une solution maximale $y : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \to \Omega$ définie sur un intervalle ouvert $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ contenant t_0.

2.3 Problème de Cauchy et équation intégrale

On s'intéresse à donner un résultat d'existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy en dimension infinie.

Remarque 68

La preuve du théorème de Cauchy Lipschitz et analogue à celle établie en dimension finie. Dans la suite on présentera on le démontrera d'une manière différente, en basant sur les approximations de Picard. Généralement parlé: la méthode de démonstration de l'existence d'une solution dans espace de Banach (y compris en dimension finie) se fasse en trois démarches:

- Construire une suite de solutions approximatives du problème de Cauchy considéré.
- On montre que la suite construite dans la première étape converge uniformément.
- En fin, on montre que la limite de la deuxième étape est solution du problème de Cauchy.

On collecte les hypothèses suivantes sur la fonction f:

(H1) la fonction $f : R_0 = [t_0, t_0 + \delta] \times B(x, r) \to X$ est continue et

$$\exists M_0 > 0, \forall (t, y) \in R_0, \|f(t, y)\| \leq M_0.$$

(H2) Il existe une fonction $g : [t_0, t_0 + a] \times [0, 2b] \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (t, u) \in [t_0, t_0 + a] \times [0, 2b] 0 \leq g(t, u) \leq M_1.$$

En plus, $g(t, 0) \equiv 0$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta$ la fonction $g(t, \cdot)$ est strictement croissante et la fonction nulle est l'unique solution du problème de Cauchy

$$u' = g(t, u),\ u(t_0) = 0. \tag{2.5}$$

(H3) f satisfait la relation suivante (extension de la condition de Lipshitz:

$$\forall (t, y), (t, z) \in R_0, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq g(t, \|y - z\|).$$

Le résultat ci–dessus (théorème de Cauchy–Lipschitz en dimension infinie) va étendre d'une manière naturelle celui déjà établi en dimension finie. Plus précisément on le le théorème suivant.

Théorème 69

Supposons que les hypothèses (H1)∼ (H3) sont satisfaites, alors les approximations successives de Picard (en dimension infinie) définies par

$$y_{n+1}(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds, n = 0, 1, 2 \cdots \tag{2.6}$$

existe sur $[t_0, t_0+\alpha]$, où $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ et $M = \max\{M_0, M_1\}$ convergent uniformément vers une fonction y qui est la solution unique du problème de Cauchy (1.9).

Preuve.

Existence de la solution On montre par récurrence que les approximations successives (2.6) sont définies et continues sur $[t_0, t_0 + \alpha]$. En plus, on a:

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha], \|y_{n+1}(t) - x\| \leq b, n = 0, 1, \cdots$$

On considère maintenant les approximations suivantes:

$$\begin{cases} u_0(t) = M(t - t_0) \\ u_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} g(s, u_n(s))ds, t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Encore un fois par récurrence, on montre que les approximations successives ci–dessus sont bien définies et on a

$$0 \leq u_{n+1}(t) \leq u_n(t), t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Par théorème d'Ascolli–Arzela, on montre que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u sur $[t_0, t_0 + \alpha]$. De l'hypothèse (ii) on déduit que $u \equiv 0$ sur $[t_0, t_0 + \alpha]$. D'autre part on montre par récurrence que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha], \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq u_n(t), n = 0, 1, \cdots$$

En conséquence,

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha], \|y'_{n+1}(t) - y'_n(t)\| \leq g(t, u_{n-1}(t)).$$

Soit à présent, $n \leq m$. On a donc

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha], \|y'_{n+1}(t) - y'_n(t)\| g(t, u_{n-1}(t)) + g(t, u_{m-1}(t)) + g(t, \|y_n(t) - y_m(t)\|).$$

Comme $u_{n+1}(t) \leq u_n(t)$, sur $[t_0, t_0+\alpha]$ on aura donc

$$\frac{d}{dt}(\|y_n(t) - y_m(t)\| \leq g(t, \|y_n(t) - y_m(t)\|) + 2g(t, u_{n-1}(t))$$

En conséquence,

$$\forall t \in [t_0, t_0+\alpha], \|y_n(t) - y_m(t)\| \leq r_n(t)$$

où $r_n(t)$ est la solution maximale du problème de Cauchy

$$v' = g(t, v) + 2g(t, u_{n-1}(t)), v_n(t_0) = 0, n = 0, 1, \cdots$$

Mais, $2g(t, u_{n-1}(t))$ tend vers 0 uniformément sur $[t_0, t_0+\alpha]$, lorsque n tend vers ∞. Ceci implique que y_n converge uniformément vers y lorsque n tend vers ∞. En fin, on montre que y est solution du problème de Cauchy (1.9).

Unicité de la solution Pour montrer que la solution y est unique supposons que z est une autre solution du problème de Cauchy (1.9). On pose

$$\forall t \in [t_0, t_0+\alpha], m(t) = \|y(t) - z(t)\|.$$

Ainsi, $m(t_0) = 0$. En plus on a:

$$\forall t \in [t_0, t_0+\alpha], m'(t) \leq \|y'(t) - z'(t)\| \leq g(t, m(t)).$$

De l'hypothèse (iii) on déduit donc

$$\forall t \in [t_0, t_0+\alpha], m(t) \leq r(t),$$

où r est l'unique solution maximale de (2.5). De l'hypthèse (H2) on aura donc $r \equiv 0$, ce qui entraine que $y \equiv z$. L apreuve est donc achevée.

■

Remarque 70

On note ici que si l'hypothèse (H3) est affaiblie (voire Exercice 31).

2.4 Exercices corrigés

Exercice 29

On considère le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(t_0) = x = \left(\frac{1}{n}\right)_n, \end{cases} \tag{2.7}$$

où $f : X \to X$ définie par: $f(x) = f((x_n)) = (y_n)_n = (2\sqrt{|x_n|})_n$ et[(1)] $X = C_0$.

(i) Montrer que la fonction f est continue sur X.

(ii) Montrer que le problème de Cauchy (2.7) n'admet aucune solution.

(iii) A quelle conclusion peut-on aboutir?

Solution détaillée.

(i) On montre que la fonction $f : X \to X$ est continue. En effet, la suite définissant $f(x)$ tend bien vers 0 à l'infini. Soit à présent $a \in X$. On a

$$|f_n(x) - f_n(a)| = |\sqrt{|x_n|} - \sqrt{|a_n|} \leq \sqrt{|x_n - a_n|} \tag{2.8}$$

Cela est possible grâce à l'identité: pour tous $u, v \in \mathbb{R}$ on a

$$(\sqrt{|u|} + \sqrt{|v-u|})^2 \geq |u| + |v-u| \geq |v|.$$

En intervenant, u et v on aura donc:

$$\sqrt{|v|} - \sqrt{|u|} \leq \sqrt{|v-u|}.$$

Ainsi, en passant au sup sur l'entier n dans l'inégalité (2.8) on aura donc:

$$\|f(x) - f(a)\|_\infty \leq \sqrt{\|x-a\|_\infty},$$

et la continuité de f s'ensuit.

(ii) On montre par l'absurde que le problème de Cauchy (2.7) n'admet aucune solution locale. Ainsi, soit $y : [0, \delta) \to X$ une solution du problème (2.7). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction $y_n : [0, \delta) \to X$ est solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y_n' = 2\sqrt{|y_n|} \\ y_n(0) = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Lés EDO's ci–dessus sont à variables séparées, leur solutions est donnée par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall t \in [0, \delta) y_n(t) = \left(t + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Mais

$$\forall t \in [0, \delta), \lim_{n\to\infty} y_n(t) = t^2.$$

Ce qui contredit la condition $(y_n(t))_n \in X$. Ainsi le problème de Cauchy (2.7) n'admet aucune solution locale.

(1) $X = C_0$ est l'espace vectoriel des suites à carrées sommable convergeant vers 0, i.e., $X = \{x = (x_n)_n \subset \mathbb{R}; \lim x_n = 0\}$, muni d'une norme définie par: $\|x\| = \sup\{|x_n| n \in \mathbb{N}\}$.

2.5 Exercices non corrigés

Exercice 30

On considère $X = C_0$. Soit $f : X \to X$ définie par

$$\forall x \in X, f(x) = f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n) = (f_n(x)) \, \text{et} \, f_n(x) = [2(x_n + x_{n+1}) - 1](e_{n+1} - e_n)$$

1. Montrer que f est continue et Lipschitzienne.

2. On considère maintenant la fonction $g : \mathbb{R} \times X \to X$ définie par:

$$\begin{cases} f(t,x) = 0, \text{ si, } t \leq 0 \\ f(t,x) = \psi_n(t) f_n(x) \text{si, } \dfrac{1}{n+1} \leq t \leq \dfrac{1}{n}, \; n \geq 1, \end{cases}$$

où $\psi_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to \mathbb{R}_+$, définie par

$$\begin{cases} \psi_n(\frac{1}{n+1}) = \psi_n(\frac{1}{n} = 0, \\ \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \psi_n(t) dt = 1. \end{cases}$$

- Montrer que f est continue et localement Lipschitzienne.

- Montrer que le problème de Cauchy $u' = -g(t,u)$, $u(0) = (e_n)_n$ n'admet aucune solution locale. (Raisonner par l'absurde).

Exercice 31

Soit X un espace de Hilbert. On considère $f : R_0 = [t_0, t_0 + \delta] \times B(x,r) \to X$ satisfaisant:

$$\forall (t,x), (t,y) \in R_0, (x - y, f(t,x) - f(t,y)) \leq g(t, \|x - y\|) \|x - y\|, \tag{2.9}$$

où g satisfait l'hypothèse (H2) du Théorème de Cauchy–Lipschitz en dimension infinie.

1. Montrer que l'hypothèse (H3) du Théorème de Cauchy Lipshitz est satisfaite.

2. On considère $X = \mathbb{R}$. On définit $f : \mathbb{R} \times X \to X$ par

$$f(t,x) = \begin{cases} 0, \; t = 0, \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ 2t, \; t \in]0,1], \text{ et } x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t}, \; t \in]0,1], \text{ et } 0 \leq x < t^2 \\ -2t, \; t \in]0,1], \text{ et } t^2 < x. \end{cases}$$

Montrer que la condition (2.9) est satisfaite, mais les approximations successives construites par la méthode de Picard, i.e.

$$y_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, y_n(s)) ds$$

ne convergent pas uniformément.

Chapitre 3

Introduction à la théorie de stabilité

Sommaire

On se propose ici d'étudier le comportement des solutions d'une EDO. Généralement parlé, une solution est dite stable si les solutions associées à des valeurs voisines de la donnée initiale restent proches de la solution considérée jusqu'à l'infini. Pour les systèmes différentiels linéaires on montre que la stabilité des solutions est gouvernée par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice associé à la partie linéaire de l'EDO. On termine ce chapitre par une simple présentation de la fonction de Lyaponove qui s'avère, sous certaines conditions, très pratique pour étudier la stabilité des EDO.

3.1 Généralités

On considère l'EDO

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. On suppose, en plus, que la fonction f est localement Lipschitzienne sur Ω. Supposons que l'EDO (3.1) possède une solution globale

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \Omega.$$

Définition 71

La solution φ de (3.1) est dite stable si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) pour tout $a \geq 0$ il existe $\mu(a) > 0$ telle que pour tout $\xi \in B(\varphi(a), \mu(a))$ la solution maximale y du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ est définie sur $[a; +\infty)$;

(ii) pour tout $a \geq 0$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(a, \epsilon) \in [0, \mu(a))$ telle que pour tout $\xi \in B(\varphi(a), \delta(a, \epsilon)$ la solution maximale du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ vérifie la relation:

$$\forall t \in [a, \infty), \|y(t) - \varphi(t)\| \leq \epsilon.$$

Remarque 72

La condition (i) de la définition ci–dessus nous garantie que pour tout $a \geq 0$, il existe une unique solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ définie sur $[a, +\infty[$ pourvu que ξ soit suffisamment proche de $\varphi(a)$. En plus, la condition (ii) nous garantie que pour tout $\epsilon > 0$, et ξ suffisamment proche de $\varphi(a)$ la graphe de la solution y du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ (dont l'existence est assurée par la condition (i)) et celui de la solution φ sont suffisamment proches.

Exemple 17

Soit l'EDO $y' = 0$. Étudiant la stabilité de la solution nulle i.e., $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $\varphi \equiv 0$.

- Soit $a \geq 0$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'unique solution maximale du problème de Cauchy $y' = 0$, $y(a) = \xi$ est définie sur $[a, +\infty[$ et $y \equiv \xi$. Ainsi, $\mu(a)$ peut être choisi d'une manière quelconque. La condition (i) de la Définition 71 est donc satisfaite.

- Soit $\epsilon > 0$ fixé mais arbitraire. On a:

$$\forall t \geq a, |y(t) - \varphi(t)| = \|y(t)\| \leq \epsilon \Rightarrow |\xi| \leq \epsilon.$$

  Il en résulte qu'on peut choisir $\delta(a, \epsilon) = \epsilon$. Ainsi, la condition (ii) de la Définition 71 est satisfaite. Conclusion: la solution nulle est donc stable.

■

Exemple 18

Soit l'EDO $y' = y$. Étudiant la stabilité de la solution nulle.

- Ainsi, soit $a \geq 0$. L'unique solution maximale du problème de Cauchy $y' = y$, $y(a) = \xi$ est définie sur $[a, \infty)$ par
$$y(t) = \xi e^{t-a}.$$
Ainsi, on peut choisir la constante $\mu(a)$ arbitrairement. La condition (i) de la Définition 71 est satisfaite.

- En revanche, la condition (ii) n'est pas saisfaite puisque
$$\lim_{t \to +\infty} |y(t)| = +\infty.$$
Conclusion: la solution nulle est instable.

■

D'autres concepts de stabilité peuvent être définis.

Définition 73

La solution φ de (3.1) est dite uniformément stable si elle est stable et les constantes $\mu(a)$ et $\delta(a, \epsilon)$ figurant dans la Définition 71, ne dépendent pas de a et ϵ.

Définition 74

La solution φ de (3.1) est dite asymptotiquement stable si elle est stable et pour tout $\xi \in B(\varphi(a), \mu(a))$ la solution maximale y du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$, vérifie:
$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

Remarque 75

Les notions de stabilités définies ci dessus sont relatives à une solution particulière de l'EDO (3.1). Ainsi, deux solutions du même EDO peuvent se différer dans leur stabilité.

Exemple 19

On considère l'EDO, dite dynamique de population:
$$y' = by(p - y)$$
où $b > 0$. Étudiant la stabilité des solutions $\varphi_1 \equiv 0$ et $\varphi_1 \equiv p$.

- Soit $a \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $y' = ay(p-y)$, $y(a) = \xi$ admet une solution maximale définie sur $[a, \infty)$ par

$$y(t) = \frac{p\xi e^{bp(t-a)}}{p + \xi(e^{b(p(t-a)} - 1)}.$$

La condition (i) de la Définition 71 est donc satisfaite.

- On remarque que

$$\lim_{t \to +\infty} |y(t)| = p^2 \neq 0.$$

Ainsi, la condition (ii) de la Définition 71 est non–satisfaite. Conclusion: La solution nulle φ_1 est instable. Quant à la solution φ_2 on a :

$$\lim_{t \to +\infty} |y(t) - \varphi_2(t)| = \lim_{t \to +\infty} \left| \frac{p\xi e^{bp(t-a)}}{p + \xi(e^{b(p(t-a)} - 1)} - p \right| = 0.$$

Conclusion: φ_2 est asymptotiquement stable.

■

Remarque 76

On considère l'EDO (3.1) et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \Omega$ une solution globale de (3.1). Le changement de fonction inconnuem

$$y = x - \varphi$$

mène à l'EDO suivante:

$$x'(t) = f(t, x(t) + \varphi(t)) - \varphi'(t). \tag{3.2}$$

Lors de ce chapitre on ne s'intéresse qu'à la stabilité de la solution nulle de l'EDO (3.1). Pour ce faire, on supposera que $0 \in \Omega$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t, 0) = 0$.

En considérant la solution nulle, on réécrit les Définitions 71, 73 et 74 comme suit.

Définition 77

La fonction nulle de l'EDO (3.1) est dite stable si:

(i) pour tout $a \geq 0$ il existe $\mu(a) > 0$ telle que pour tout $\xi \in B(0, \mu(a))$ la solution maximale y de $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ est définie sur $[a; +\infty)$.

(ii) pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(a, \epsilon) \in [0, \mu(a))$ telle que pour tout $\xi \in \xi \in B(0, \delta(a))$ la solution maximale du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$ vérifie:

$$\forall t \in [a, \infty), \|y(t)\| \leq \epsilon.$$

Définition 78

La solution nulle de (3.1) est dite uniformément stable si elle est stable et les constantes $\mu(a)$ et $\delta(a, \epsilon)$ figurant dans la Définition 77, ne dépendent pas de a et ϵ.

Définition 79

La solution nulle de (3.1) est dite asymptotiquement stable si elle est stable et pour tout $\xi \in B(0, \mu(a))$ la solution maximale y du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(a) = \xi$, vérifie:

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = 0.$$

Dans la suite on établit un lien entre les poins d'équilibre d'une EDO et la stabilité de la solution nulle.

Définition 80

On dit que $x^\star \in \Omega$ est un point stationnaire ou un point d'équilibre de l'EDO (3.1) si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t, x^\star) = 0.$$

Remarque 81

Il est claire que si $x^\star$ est un point stationnaire de l'EDO (3.1) alors la fonction constante $y \equiv x^\star$ est une solution constante de l'EDO (3.1) qu'on appelle solution stationnaire. En plus, il est claire, que la solution identiquement nulle est aussi une solution stationnaire de l'EDO (3.1).

On suppose que l'EDO (3.1) est autonome i.e., la fonction f ne dépend pas de t. On a le résultat suivant.

Théorème 82

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et soit $y : [a, +\infty) \to \Omega$ une solution de l'EDO

$$y'(t) = f(y(t)). \tag{3.3}$$

Si $\lim_{t\to+\infty} y(t) = y^\star$ et $y^\star \in \Omega$ alors $y^\star$ est un point d'équilibre de l'EDO (3.7).

Preuve. Soit $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$. Supposons que $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ est une solution de l'EDO (3.7). On considère une composante y_i où $i \in \{1, 2, ...n\}$ définie sur un intervalle $[m, m+1]$ où $m \in \mathbb{N} \cap [a, +\infty)$. On applique à la fonction y_i le théorème des accroissement fini sur l'intervalle $[m, m+1]$. Ainsi, il existe un réel $\theta_m \in (m, m+1)$ tel que

$$y_i(m+1) - y_i(m) = y_i'(\theta_m) = f_i(y_i(\theta_m)).$$

Comme

$$\lim_{m\to+\infty} y_i(m+1) - y_i(m) = 0,$$

et

$$\lim_{m} f_i(y(\theta_m) = f_i(y^\star)$$

on déduit que:

$$\lim_{t\to+\infty} f_i(y(t)) = f_i(y^\star)$$

et ce pour tout $i \in \{1, 2, ...n\}$. Ainsi, $f(y^\star) = 0$. ■

3.2 Stabilité des systèmes linéaires

Nous étudierons d'abord le cas le plus simple, à savoir le cas d'un système linéaire sans second membre:

$$y'(t) = \mathcal{A}y(t), \tag{3.4}$$

où $\mathcal{A} \in M_{(n\times n)}(\mathbb{C})$. Le théorème ci–dessous est utile pour la suite.

Théorème 83

La solution nulle de l'EDO (3.4) est stable (asymptotiquement stable), (uniformément stable) si et seulement si toute solution maximale de l'EDO (3.4) est stable (asymptotiquement stable), (uniformément stable).

Preuve. Supposons que $y = \varphi$ est une solution maximale de l'EDO (3.4). En utilisant le changement de fonction $x = y - \varphi$ on déduit que φ correspond à la solution maximale $x = 0$. Ainsi, il suffit de remarquer que φ satisfait les conditions des Définitions 71, 73 et Définition 74 si et seulement si la solution nulle $x = 0$ satisfait les conditions des Définitions 77, 78 et Définition 79. ■

Remarque 84

En vertu du théorème précédent on déduit que toutes les solutions maximales de l'EDO (3.4) ont le même type de stabilité. Ainsi dans ce qui suit on parlera de la stabilité d'un système différentiel tout entier.

Afin d'étudier la stabilité de l'EDO (3.4), on rappelle que pour tout $t_0 \geq 0$, la solution du problème de Cauchy $y' = \mathcal{A}y$, $y(t_0) = \xi$ est définie sur $[t_0, +\infty[$ et est donné par

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}\xi.$$

Ainsi la condition (i) dans la Définition 77 est satisfaite. Pour comprendre ce qui se passe étudiant le cas particulier.

1. $n = 1$ et $A = (a)$ où $a \in \mathbb{C}$.

$$\forall t \in [t_0, +\infty), \|y(t)\| = e^{(t-t_0)Re(a)}$$

Ainsi, la condition (ii) dans la Définition 78 est satisfaite si et seulement si $Re(a) \leq 0$. Conclusion: La solution nulle de l'EDO $y' = ay$ où $a \in \mathbb{C}$ est stable si et seulement $Re(a) \leq 0$. D'autre part, $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0$ si et seulement si $Re(a) < 0$. Conclusion: La solution nulle de l'EDO $y' = ay$ où $a \in \mathbb{C}$ est asymptotiquement stable si et seulement si $Re(a) < 0$. Le théorème ci–dessous caractérise la stabilité des solutions de l'EDO (3.4).

Théorème 85

Soient $\lambda_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$. les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors l'EDO (3.4) est:

(i) stable si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ou bien $Re(\lambda_i) < 0$ ou bien $Re(\lambda_i = 0$ et le bloc correspondant à λ_i est diagonalisable,

(ii) asymptotiquement stable si si et seulement si $Re(\lambda_i) < 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Preuve. On distingue les cas suivants:

- **La matrice A est diagonalisable.**

Dans ce cas, on se ramène après un changement linéaire de coordonnée à la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où λ_1, λ_2,....,λ_n désignent les valeurs propres de la matrice A. Ainsi, l'EDO (3.4) se ramène aux EDO linéaires suivants

$$y_j' = \lambda_j y_j,\ t_j(0) = \xi, j \in \{1, 2, 3 \cdots, n\}.$$

Les solutions sont définies par

$$y_j = \xi_j e^{\lambda_j (t-t_0)}, j \in \{1, 2, 3 \cdots, n\}.$$

Les solutions sont donc stables si et seulement si $Re(\lambda_j) \leq 0$ pour tout $j \in \{1, 2, 3 \cdots, n\}$ et asymptotiquement stable si et seulement si $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout $j \in \{1, 2, 3 \cdots, n\}$.

- **La matrice A est non diagonalisable.**

Dans ce cas on traite à part tout block d'une triangularisation de A. Plus précisément supposons que:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \star \\ & & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

où N est une matrice nilpotente[1] triangulaire supérieure non nulle. Il vient alors:

$$e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)\lambda I} e^{(t-t_0)} N = e^{\lambda(t-t-0)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} N^k.$$

Le résultat découle du fait que .... ■

3.2.1 Stabilité des systèmes linéaires perturbés

On considère le système

$$y' = \mathcal{A}y + F(t, y(t)), \tag{3.5}$$

où $\mathcal{A} \in M_{(n\times n)}(\mathbb{C})$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soient les conditions suivantes:

Sur la matrice $\mathcal{A}$.

(A) Il existe des constantes $M \geq 1$, $\omega > 0$ et $L > 0$ telles que:

$$\forall t \geq 0, \|e^{t\mathcal{A}}\| \leq Me^{-\omega t}$$

Sur la fonction f.

(f_1) f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et localement Lipshitzienne sur Ω.

(f_2) $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t, 0) = 0.$

(f_3) $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega. \|f(t, x)\| \leq L\|x\|.$

On commence par le résultat fondamental suivant.

Théorème 86

Supposons que les conditions (A), (f_1)∼(f_3) et (D) dont satisfaites. Alors si

$$LM - \omega < 0 \tag{3.6}$$

la solution nulle de l'EDO (3.5) est asymptotiquement stable.

Preuve. Soit $\xi \in \Omega$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$. On considère le problème de Cauchy

$$y' = \mathcal{A}y + f(t, y(t)),\ y(t_0) = \xi.$$

[1] Une matrice est dite nilpotente s'il existe $p \leq 2$ tel que $N^p = 0$

On rappelle que le problème de Cauchy ci–dessus admet une unique solution maximale définie sur $[t_0, T_n[$ est donnée par

$$y(t) = e^{(t-t_0)\mathcal{A}}\xi + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathcal{A}} f(s, y(s))ds.$$

On montre tout d'abord que si ξ est suffisament proch de 0 alors la solution y est définie sur $[t_0, \infty)$. On a

$$\forall t \in [t_0, T_n[, \|y(t)\| \leq \|e^{(t-t_0)\mathcal{A}}\|\|\xi\| + \int_{t_0}^{t} \|e^{(t-s)\mathcal{A}}\|\|(s, y(s))\|ds.$$

En utilisant les hypothèses (f_3) et (A) on aura

$$\forall t \in [t_0, T_n[, \|y(t)\| \leq Me^{-\omega(t-t_0)}\|\xi\| + \int_{t_0}^{t} LMe^{-\omega(t-s)}\|y(s)\|ds.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité ci–dessus par $e^{\omega t}$ on obtient

$$\forall t \in [t_0, T_n[, e^{\omega t_0}\|y(t)\| \leq Me^{\omega s}\|y(s)\|ds$$

On considère la fonction $x : [0, T_n[\to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall t \in [t_0, T_n[, x(t) = e^{\omega t}\|y(t)\|.$$

En conséquence on aura

$$\forall t \in [t_0, T_n[, x(t) \leq Me^{\omega t_0}\|\xi\| + \int_{t_0}^{t} LMx(s)ds.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall on aura:

$$\forall t \in [t_0, T_n[, y(t) \leq Me^{\omega t_0}\|\xi\|e^{LM(t-t_0}.$$

On aboutit donc à

$$\forall t \in [t_0, T_n[, \|y(t)\| \leq M\|xi\|e^{(LM-\omega)(t-t_0)}$$

Soit maintenant $\rho > 0$ choisit de telle sorte que $B(0, \rho) \subset \Omega$. On définit $\mu(a)$ par:

$$\mu(a) = \frac{\rho}{2M}$$

Il en résulte que

$$\forall t \in [t_0, T_n[, \|y(t)\| \leq \frac{\rho}{2}.$$

Supposons que $T_n < \infty$. On déduit ainsi que

$$\lim_{t \to T_n} y(t) = y^\star$$

et $y^\star \in B(0, \frac{\rho}{2}) \subset \Omega$. Ceci contredit le fait que la solution y est maximale. Conclusion: $T_n = \infty$ et donc la condition (i) de la Définition 79 est satisfaite. La condition (ii) est satisfaite. En effet, si $\xi \leq \mu(a)$ on a:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

La preuve est donc achevée. ■

Le résultat suivant est une conséquence du théorème ci-dessus.

Théorème 87

Soit $\mathcal{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ ont une partie réelle négative. Supposons que les conditions (D), $(f_1) \sim (f_2)$ sont satisfaites. S'il existe une fonction $\alpha; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \|f(t, c)\| \leq \alpha(\|x\|),$$

et

$$\lim_{r \Longrightarrow 0^+} \frac{\alpha(r)}{r} = 0.$$

Alors la solution nulle de l'EDO (3.5) est asymptotiquement stable.

Preuve. Comme toute les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ possèdent une partie réelle négative on déduit (voire exercie) qu'il existeent deux constantes $M \geq 1$ et $\omega > 0$ telle que la condition (A) est satisfaite. On choisit $L > 0$ telle que

$$ML - \omega < 0.$$

Soit à présent $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall r \in (0, \delta), \alpha(r) \leq Lr.$$

Ainsi, la matrice $\mathcal{A}$ et la fonction f vérifient les hypothèses du théorème précident sur $\mathbb{R}_+ \times \{x \in \Omega, \|x\| \leq \delta$. La preuve est donc terminée. ■

On s'intéresse maintenat à la stabilité de la solution nulle de l'EDO autonome

$$y' = f(y) \tag{3.7}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. On a le résultat suivant.

Théorème 88

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Si f est de classe C^1 sur Ω, $f(0) = 0$ est toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $\mathcal{A} = f_x(0)$ possèdent une partie réelle négative, alors la solution nulle de l'EDO (3.7) est asymptotiquement stable.

Preuve. Comme f est de classe C^1 sur Ω, alors on a:

$$\forall x \in \Omega, f(x) = f(0) + f_x(0)x + g(x) = \mathcal{A}x + g(x),$$

et telle que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Soit $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \alpha(r) = \sup\{\|f_x(\theta) - f_x(0)\|, \theta \in \Omega, \|\theta\| \leq r\}.$$

Ainsi, les hypothèses du Théorème 87 sont vérifiées. La preuve est donc achevée. ■

3.3 Fonction de Lyapunov

Soit l'EDO

$$y' = f(t, y) \tag{3.8}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que la fonction f satisfait les deux conditions suivantes.

(i) f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et localement Lipshitzienne sur Ω,

(ii) $f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 89

La première condition garantie l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy associé à l'EDO (3.8), quant à la deuxième nous montre que la fonction $\varphi \equiv 0$ est solution de l'EDO (3.8).

Définition 90

On dit que la fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ est définie positive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ s'il existe une fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, croissante et telle que $\omega(r) = 0$ si et seulement si $r = 0$ et

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, V(t,x) \geq \omega(\|x\|). \tag{3.9}$$

La fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_-$ est définie négative si sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ si $-V$ est définie positive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Définition 91

On appelle fonction de Lyaponov du système (3.8) toute fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) V est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, V(t,0) = 0$;

(ii) V est définie positive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$;

(iii) la relation ci-dessous est satisfaite pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t,x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(t,x) \leq 0. \tag{3.10}$$

Théorème 92

Si l'EDO (3.8) possède une fonction de Lyaponov alors la solution nulle est stable.

Preuve. Soient $a \in \mathbb{R}_+$, $\xi \in \Omega$ et $y : [a, T_m[\to \Omega$ l'unique solution maximale de l'EDO (3.8) satisfaisant $y(a) = \xi$. On montre tout d'abord que si ξ est suffisamment petit alors $T_m = +\infty$. Pour cela on défini la fonction $g : [a, T_m[\to \mathbb{R}_+$ par

$$\forall t \in [a, T_m[, g(t) = V(t, y(t)),$$

où V est la fonction de Lyaponov correspondant à l'EDO (3.8). La fonction g est de classe C^1 sur $[a, T_m[$. En plus de la relation (3.10) on déduit que:

$$\begin{aligned}\forall t \in [a, T_m[; g'(t) &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, y(t)) + \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t, x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(t, y(t))\frac{dy_i}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, y(t)) + \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t, x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(t, y(t)) f_i(t, y(t)) \leq 0. \quad (3.11)\end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction g est décroissante sur $[a, T_m[$. Ainsi,

$$\forall t \in [a, T_m[, g(t) \leq g(a) \Rightarrow \forall t \in [a, T_m[, V(t, y(t)) \leq V(\xi).$$

En conséquence, de la relation (3.9) on déduit que

$$\forall t \in [a, T_m[, \omega(\|y(t)\|) \leq V(a, \xi).$$

Soit à présent $\rho > 0$ tel que $B(0, \rho) \subset \Omega$. Comme le fonction $V(a, \cdot)$ est continue en 0 et $V(a, 0) = 0$ on déduit que pour tout $\omega(\rho) > 0$ où $\rho > 0$ (comme ci-dessus), il existe $r = r(a) \in]0, \rho[$ tel que

$$\forall \xi \in B(0, \rho), V(a, \xi) < \omega(\rho).$$

Ainsi,

$$\forall t \in [a, T_m[, \omega(\|y(t)\|) \leq \omega(\rho),$$

et donc

$$\forall t \in [a, T_m[, \|y(t)\| \leq \rho.$$

Comme $B(0, \rho) \subset \Omega$ et la solution y est saturée, on déduit de l'inégalité ci dessus que

$$\forall \xi \in \Omega, \|\xi\| \leq r(a) \Rightarrow T_m = +\infty.$$

De la même manière on démontre d'une manière similaire que pour tout $a \geq 0$ et $\epsilon > 0$, il existe $\delta(a, \epsilon)$ tel que

$$\forall \xi \in \Omega, \|\xi\| \leq \delta \Rightarrow \|y(t)\| \leq \epsilon.$$

Finalement, ceci nous montre que la solution nulle est stable. La preuve est donc achevée. ■

Théorème 93

Si l'EDO (3.8) possède une fonction de Lyaponov V et ils existent deux fonctions $\lambda, \eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues et strictement croissantes telles que $\lambda(r) = 0$ si et seulement si $r = 0$; $\eta(s) = 0$ si et seulement si $s = 0$ et

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, V(t, x) \leq \lambda(\|x\|) \tag{3.12}$$

et

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t, x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x) \leq -\eta(\|x\|), \tag{3.13}$$

alors la solution nulle est asymptotiquement stable.

Preuve. Du Théorème 92, on déduit que la solution nulle est stable.

■

3.4 Exercices corrigés

Exercice 32

Étudier la stabilité de la solution nulle de l'EDO

$$y' = -2y + \sin y. \tag{3.14}$$

Solution détaillée

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2x + \sin x$ est de classe C^1 est satisfait $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Par conséquent la solution nulle est asymptotiquement stable.

Exercice 33

On considère l'EDO

$$y' = a(t)y \tag{3.15}$$

où $t \geq 0$ et $a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est continue. Montrer que

(i) L'EDO (3.15) est stable si et seulement s'il existe une fonction $K : [0; \infty) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds \leq K(t_0);$$

pour tout $t_0 \geq 0$ et pour tout $t \geq t_0$.

(ii) L'EDO (3.15) est uniformément stable si il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds \leq M$$

pour tout $t_0 \geq 0$ et pour tout $t \geq t_0$.

(iii) L'EDO (3.15) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} a(s)ds = -\infty.$$

Solution détaillée.

On note tout d'abord que la solution générale de l'EDO (3.15) est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}; y(t) = ce^{\int_0^s a(s)ds}, \tag{3.16}$$

où c est une constante arbitraire.

(i) La solution nulle de l'EDO (3.15) est stable si et seulement si il existe une matrice fondamentale bornée sur $\mathbb{R}_+$ ou d'une manière équivalente toute matrice fondamentale est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Il s'ensuit de la formule (3.16) que:

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}_+,\ t_0 \leq t \Rightarrow y(t) = e^{\int_0^s a(s)ds} = e^{\int_0^{t_0} a(s)ds} e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \leq M. \tag{3.17}$$

En conséquence,

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}_+,\ t_0 \leq t \Rightarrow y(t) \leq e^{K(0)}.$$

Et donc la solution nulle est stable. Inversement, supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, y(t) \leq M.$$

De l'équation (3.17), on observe que la fonction $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, K(t) = \log M - \int_0^t a(s)ds$$

satisfait la relation en question.

(ii) La solution nulle est uniformément stable si est seulement s'il existe une matrice fondamentale $\mathcal{X}(t)$ et une constante $M > 0$ telle que

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}_+,\ t_0 \leq t \Rightarrow \|\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(t_0)\| \leq M.$$

Ainsi, la solution nulle est uniformément stable si et seulement si

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}_+,\ t_0 \leq t \Rightarrow e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \leq M.$$

Ce qui est équivalent à

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}_+,\ t_0 \leq t \Rightarrow \int_{t_0}^{t} a(s)ds \leq \log M = K.$$

(iii) De la même manière que auparavant, la solution nulle est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\int_0^t a(s)ds} = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t a(s)ds = -\infty.$$

Exercice 34

Étudier la stabilité de la solution nulle de l'EDO de Linéard:

$$z'' + g'(z)z' + z = 0, \tag{3.18}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et $g(0) = 0$.

Solution détaillée.

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$f(x) = f((y, z)) = \begin{pmatrix} y - g(z) \\ -z \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne au point $(0, 0)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -g'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque aisément que toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ sont négatives. Il en résulte d'après le Théorème 87 que la solution nulle est asymptotiquement stable. Cela veut dire que la solution nulle de l'EDO de Van der Pol equation est (la solution correspondante au cas où $(\forall z \in \mathbb{R}, g(z) = z - z^3)$ est asymptotiquement stable.

Remarque 94

On réécrit l'EDO (3.18) comme suit:

$$\begin{cases} z' = y - g(z) \\ y' = -z. \end{cases}$$

L'EDO ci–dessus est un système de premier ordre

$$Y' = \mathcal{A}Y + f(t, Y)$$

où

$$Y = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}, \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } f(t, Y) = \begin{pmatrix} -g(z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ sont négatifs. Puisque la condition (A) dans Théorème 86 est non satisfaite alors on peut pas l'appliquer. Ceci nous a mené donc à considérer Théorème 87.

Exercice 35

Soient $\omega > 0$ et $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continue et absolument intégrable sur $[0, \infty[$. Montrer que toute solution globale de l'EDO

$$y'' + [\omega^2 + f(t)]y = 0 \tag{3.19}$$

est bornée.

Solution détaillée.

En utilisant la méthode de la variation de la constante, on déduit que la solution générale de l'EDO (3.20) est donnée par

$$y(t) = \xi_1 \cos \omega t + \xi_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t - s) ds,$$

où ξ_1 et ξ_2 sont deux constantes réelles. Ainsi on aura:

$$|y(t)| \leq |\xi_1| + |\xi_2| + \frac{1}{\omega} \int_0^\infty |f(s)| ds.$$

Cette majoration nous permet d'appliquer la définition de l'uniforme stabilité facilement.

Exercice 36

Soient $\omega > 0$ et $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continue et absolument intégrable sur $[0, \infty[$. Montrer que la solution nulle de l'EDO

$$y'' + [\omega^2 + f(t)]y = 0, \tag{3.20}$$

est uniformément stable.

Indication sur la solution

Il suffit de remarquer que la stabilité uniforme de la solution nulle d'une EDO du deuxième degré est équivalente à la stabilité uniforme d'une EDO linéaire du premier ordre ayant la forme

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -[\omega^2 + f(t)]x(t), \end{cases}$$

et on applique les résultats établis dans la section "stabilité des systèmes linéaires".

3.5 Exercices non corrigés

Exercice 37

Étudier la stabilité des systèmes linéaires suivants:

$$(1). \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2x - y, \end{cases} \quad (2). \begin{cases} x' = -x + 5y \\ y' = -x - y, \end{cases} \quad (3). \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y. \end{cases}$$

Exercice 38

On considère l'EDO

$$y' = a(t)y$$

où

$$a(t) = \frac{d}{dt}[t(1 - t\cos t)\cos t].$$

1. Montrer que la solution nulle est stable.
2. Étudier l'uniforme et l'asymptotique stabilité de la solution nulle.
3. A quelle conclusion peut-on aboutir?

Appendice A: Différentiabilité et intégrabilité dans les espaces vectoriels normés

Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Un $\mathbb{R}$–espace vectoriel[(1)] X est dit normé si l'on peut munir par une norme $N : X \to \mathbb{R}_+$. On rappelle ce qui suit.

Définition 95

Une norme sur un espace vectoriel X est une application $N : X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois axiomes suivants:

- Pour tout $x \in X$ on a: $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Pour tout $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $N(lambdax) = |\lambda| N(x)$
- Pour tous $x, y \in X$ on $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Exemple 20

1. On peut munir l'espace vectoriel $X = \mathbb{R}^n$ par trois normes à savoir

   - $N_1(x) = N_1((x_1, x_2, ...x_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
   - $N_2(x) = N_2((x_1, x_2, ...x_n)) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
   - $N_\infty(x) = \max\{|x_i|, i = 1 \cdot \cdot\cdot, n\}$

[(1)] Pour simplicité on ne considère que les espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Les résultats sont, en générale in changeables si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2. L'espace vectoriel des suites réelles bornées noté par $l^{\infty}(\mathbb{R})$ est muni par la norme suivante: Si $x = (x_n)_n$ est bornée alors:

$$N_{\infty}(x) = \|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

■

Définition 96

Un espace vectoriel normé est un Banach s'il est complet[a].

[a] Un espace topologique est complet si toute suite d'éléments de l'espace de Cauchy est convergente

Exemple 21

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $\mathbb{I}$ un ensemble quelconque. On note par $l^{\infty}(\mathbb{I}, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur $\mathbb{I}$ et à valeurs dans E. On munit $l^{\infty}(\mathbb{I}, E)$ par une norme que l'on note par $\|\cdot\|_{\infty}$ définie par:

$$\forall f \in l^{\infty}(\mathbb{I}, E), \|f\|_{\infty} = \sup\{f(x), x \in \mathbb{I}\}.$$

On montre (à titre d'exercice) que $(l^{\infty}(\mathbb{I}, E), \|\cdot\|_{\infty}))$ est un espace de Banach.

2. Dans le cas particulier où $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}$ $l^{\infty}(\mathbb{I}, E)$ deviendra l'espace vectoriel des suites réelles bornées, et on écrit:

$$l^{\infty}(\mathbb{I}, E) = l^{\infty}(\mathbb{R})$$

qui est un espace de Banach.

■

Différentielle d'une application

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés sur un corps $\mathbb{K}$ et $\Omega \subset X$ un ouvert. On considère la fonction $F : \Omega \to Y$. On note par $L(X,Y)$ le $\mathbb{K}$–espace vectoriel des applications linéaires définies sur X et à valeurs dans Y.

Définition 97

La fonction f est dite différentiable au sens de Fréchet en $x_0 \in \Omega$ s'il existe une application linéaire notée $f'(x_0) \in L(X,Y)$ telle que:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \omega(x_0,h) \text{ où } \omega(x_0,h) = o(|h|) \text{ et } h \to 0.$$

Si f est dérivable au sens de Fréchet en tout point $x_0 \in \Omega$ on dit qu'elle est Fréchet différentiable sur Ω.

Remarque 98

(i) Si la fonction $f : \Omega \to Y$ est différentiable sur X alors on définit la fonction dérivée par $f' : \Omega \to L(X,Y)$. Si $X = \mathbb{K}$, on peut identifier $L(\mathbb{K},Y)$ avec Y est donc $f'(x_0)$ sera identifié à un vecteur.

(ii) Si la fonction f' est continue on dit alors que f est continument différentiable sur Ω et on écrit $f \in C^1(\Omega)$.

Exemple 22

Soit l'opérateur intégral $F : X \to X$ où $X = C(\mathbb{J})$ et $\mathbb{J} = [a,b]$ définie par

$$F(x)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s,x(s))ds,\ t \in \mathbb{J}.$$

Si $k : \mathbb{J} \times \mathbb{J} \to \mathbb{R}$, f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues alors F est différentiable sur X et on a

$$\forall h \in X, (F'(x)(h))(t) = \int_a^b k(t,s)\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s))h(s)ds$$

■

Exemple 23

On considère le fonctionnel $\psi : C(\mathbb{J}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \int_a^b \int_0^{x(t)} f(\tau,s)dsd\tau,$$

où $f : \mathbb{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Alors ψ est continument différentiable est

$$\psi'(x)(h) = \int_a^b f(\tau,x(\tau))h(\tau)d\tau$$

■

Proposition 99

Soit X un espace de Banach. Si $f : \Omega \to Y$ alors $\int_a^b f'(t)dt = y(b) - y(a)$ si et seulement si $y[a,b] \to X$ est continument différentiable.

Proposition 100

Si $f : \Omega \to Y$ est différentiable en $a \in \Omega$ alors pour tout $h \in X$, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = df(a).h$$

Proposition 101

Si f est différentiable en a, elle est continue en a.

Remarque 102

On montre que si f est différentiable en x_0 si et seulement s'il existe une application linéaire continue notée $f'(x_0) \in L(X,Y)$ telle que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Exemple 24

Soit $X = C_0$ et $\mathbb{I} = [0,1]$. On considère la fonction $y : \mathbb{I} \to X$, définie par

$$\forall t \in \mathbb{I}, y(t) = (y_n(t)) = \frac{1}{n}\sin(nt).$$

(i) On montre que y est Lipschitz. En effet,

(ii) On montre que y est partout non-différentiable.

■

Appendice B: Quelques résultats de compacité

On commence par rappeler le concept de compacité d'un ensemble dans un espace topologique quelconque. Soit E un ensemble non-vide muni d'une topologie.

Définition 103

Un sous–ensemble $M \subset E$ est dit compact si de tout recouvrement d'ouverts[a] de M on peut en extraire un sous recouvrement fini. Autrement dit, si $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille quelconque d'ouverts dans E alors:

$$M \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \in \Lambda; M \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} \Omega_{\lambda_i}.$$

[a] Un recouvrement est une famille de parties dont leur réunion contient l'ensemble M

Exemple 25

$\mathbb{R}$ n'est pas compact. En effet, la famille $(]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvremet d'ouverts de $\mathbb{R}$ dont on peut extraire aucun recouvrement fini. ▪

La proposition ci–dessous est utile pour caractériser les ensembles compacts.

Proposition 104

L'ensemble M est compact dans X si et seulement si de toute suite $(x_n)_n \subset M$ on peut en extraire une sous suite convergente dans M.

Définition 105

Un sous ensemble M de X est relativement compact si $\overline{M}$ est compact.

Exemple 26

Tout borné de $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle est un relativement compact. ■

Dans la suite on note par $C([a,b];X)$ l'espace vectoriel d toutes les fonction définies et continues sur $[a,b]$ prenant ses valeur dans un espace de Banach X. On rappelle que $C([a,b];X)$ est muni de deux opérations: La première (interne) l'addition des fonction et la deuxième (externe) la multiplication d'une fonction par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application qui associe à chaque $y \in C([a,b];X)$ la quantité

$$\|y\| = \sup\{|y(t)\|, t \in [a,b]\}.$$

est une norme sur $C([a,b];X)$.

Définition 106

Soit $\mathcal{F}$ un sous ensemble de $C([a,b];X)$.

(i) La famille $\mathcal{F}$ est dite équicontinue en $t \in [a,b]$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon,t) > 0$ tel que: si $s \in [a,b]$ vérifie $|t-s| \leq \delta(t,\epsilon)$ alors:

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \epsilon,$$

uniformément par rapport à $f \in \mathcal{F}$.

(ii) La famille $\mathcal{F}$ est dite équicontinue sur $[a,b]$ si elle est en tout point $t \in [a,b]$.

(iii) La famille $\mathcal{F}$ est dite uniformément équicontinue sur $[a,b]$ si elle est équicontinue sur $[a,b]$ et $\delta(t,\epsilon$ peut être choisis indépendamment de t.

Remarque 107

On montre que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur $[a,b]$ si et seulement si elle équicontinue sur $[a,b]$.

Dans les espace vectoriels de dimension finie, une partie $\mathbb{A}$ est dite relativement compacte si elle est bornée. Elle est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Ces deux résultats ne demeurent plus vraies dans les espaces vectoriels de dimension infinie. En revanche, le théorème suivant appelé, Théorème Arzéla–Ascoli, donne une caractérisation de la compacité d'une famille $\mathcal{F} \subset C([a,b];X)$.

Théorème 108

Arzéla–Ascoli La famille de fonctions $\mathcal{F} \subset C([a,b];X)$ est relativement compact si et seulement si:

(i) $\mathcal{F}$ est équicontinue sur $[a,b]$.

(ii) Il existe un sous ensemble D dense dans $[a,b]$ telle que pour tout $t \in D$ l'ensemble $\mathcal{F}(t) = \{f(t), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans X.

On rappelle sans preuve le résultat de Mazur suivant.

Théorème 109

Mazur L'enveloppe convexe d'un compact dans un espace de Banach est compact

On aussi le résultat important suivant.

Théorème 110

Soit K un compact d'un espace de Banach X et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonction continues définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans K. Alors l'ensemble:

$$\left\{\int_a^b f(t)dt\right\}$$

est relativement compact dans X.

Preuve. En utilisant les sommes de Riemman, on déduit que

$$\left\{\int_a^b f(t)dt\right\} \subset (b-a)\overline{conv(K)}.$$

Il suffit donc d'apliquer le Théorème de Mazur (Théorème) pour aboutir au résultat. ■

Références

[1] JP. Aubin; H. Frankowska. *Set–Valued Analysis.* Birkhäuser Inc MA, Boston. 1990. 35

[2] G. Bouligand, Sur les surfaces déprouvues de points hyperlimités, Ann. Soc. Polon. Math, 9:32–41, 1930. 36

[3] J. Dieudonné. Deux exemples singuliers d'équations différentielles, Acta Sci. Math. Szeged, 12:38–40, 1950. 65

[4] V. Lakshmikantham; S. Leela. *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1981. 64

[5] V. Barbu. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach spaces*, New York, Springer, 2010. 64

[6] 0. Carja; M. Necula; II. Vrabie. Viability, Invariance and Applications, Elsevier Science B.V., Amsterdam (2007) 35, 41

[7] M. Nagumo. Uber die lage der integralkurven gewohnlicher differentialgleichungen. Proc. Phys,-Math. Soc. Japan 24, 551?559 (1942). 40

[8] P. Hajek; M. Johanis. On Peano's theorem in Banach spaces. J. Differential Equations 249:3342–3351, 2010. 64, 65, 69

[9] G. Peano. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Ann., 37:182–228, 1890. 16

[10] F. Severi, Su alcane questtioni di topologia infinitesimale, Ann. Soc. Polon. Math, 9:97–108, 1930. 36

[11] II. Vrabie. *Differential equations. An introduction to basic concepts, results ans applications*. World Scientific Publishing, 2004. 16

[12] II. Vrabie. Compactness methods for nonlinear evolutions. Second Edition, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 75, Longman 1995.

16