1.1 Introduction

Le mot "equatio differentialis" a été utilisé la première fois par Gottfried Wilhelm Libnitz" en 1676 pour décrire une relation entre une fonction est ses dérivés. A l'époque, plusieurs phénomènes et situations provenant de l'analyse et surtout de la géométrie nécessitaient la compréhension du concept des équations différentielles. En fait, déjà en 1639, Florimond Debeaune (1601-1652) propose deux problèmes géométriques sur la construction des courbes à partir des propriétés de la tangente (trouver une courbe dont la tangente vérifie une propriété caractéristique). La même année, Fermat aussi écrivait: "La propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe pour laquelle cette propriété est satisfaite".

A l'époque ni Fermat (1602–1665), ni Roberval (1602–1675) ni Debeaune lui même ne réussissent à les résoudre. C'est René Descartes (1596–1650) qui, grâce à une méthode graphique, propose une méthode de résolution à l'un des problèmes de Debeaune.

Les équations différentielles qui ont été étroitement associées à la résolution des problèmes géométriques en physique Newtonienne (dynamique du point, mouvement des planètes) deviennent rapidement un outil efficace d'analyse de plusieurs phénomènes de la natures. A la suite de Newton et Leibnitz plusieurs mathématiciens arrivent à résoudre plusièeurs modèles de la physique. On cite surtout les travaux de Bernoulli Jacob (1657–1705) et Guillaume Hospital (1661–1704).

Le problème de connaitre analytiquement la solution d'une équation différentielle donnée était un problème majeur à l'époque. Pour Joseph Liouville la question de résolution n'a de sens que si l'on précise la classe de fonctions dans laquelle on cherche les solutions. Si l'on imaginait, par exemple, que l'on ne connait que les fonctions polynomiales ou rationnelles, la simple équation différentielle $y' = g(t)$, n'admettait pas de "solution". Pour la résoudre, il faut donc élargir la classe des fonctions cherchées aux exponentielles.

Euler (1707–1783) a recensé toutes les équations différentielles pouvant être résolues de manière analytique (la solution pouvant être écrite en terme de fonction élémentaires).

En revanche, il existaient toujours à l'époque des équations différentielles dont la résolution était complexe. En particulier, Liouville (1848) démontre que certaines équations ne pouvaient pas être résolues analytiquement, bien que leurs solutions existent; comme, par exemple, l'EDO: $y' = t^2 + y^2$. Ce résultat important a motivé les travaux théoriques sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles ce qu'on appelle l'étude qualitative des équations différentielles.

Les travaux de Henri Poincaré ont donné naissance à l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires (voire l'introduction de la Section 1.4.1). Au lieu de s'intéresser à l'expression analytique de la solution, impossible à déterminer dans la majorité des cas, on étudiera son aspect qualitatif. L'objectif de ce chapitre est donc d'élaborer les principaux axes de cette branche de la théorie des équations différentielles ordinaires.

1.2 Généralités sur les équations différentielles ordinaires

Définition 1

On appelle équation différentielle toute relation liant les valeurs d'une fonction (inconnue) avec, au moins, une de ses dérivées ordinaires ou partielles.
L'équation différentielle dont la fonction inconnue dépend d'une seule variable est appelée équation différentielle ordinaire notée en abrégé EDO.
L'équation différentielle dont la fonction inconnue dépend d'au moins deux variables est appelée équation aux dérivées partielles notée en abrégé EDP.

Exemple 1

Les équations

$$y' = y^2 + y \quad \text{et} \quad y'' = \sin y$$

sont des équations différentielles ordinaires, tandis que les équations

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial y}{\partial z \partial x}$$

sont des équations aux dérivées partielles. ▪

Définition 2

L'ordre d'une EDO est l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Plus précisément, une EDO est dite d'ordre n si elle s'écrit sous la forme

$$F(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0 \tag{1.1}$$

où F est une fonction définie sur $D(F)$ une partie de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{n+1}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 3

Une EDO est dite linéaire d'ordre n si elle s'écrit sous la forme

$$a_0(t)y(t) + a_1(t)y'(t) + \cdots + a_n(t)y^{(n)}(t) = b(t)$$

où a_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$ et b sont des fonctions définies sur un sous–intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 2

l'EDO: $y'' + y = t$ est linéaire d'ordre 2. Cependant, l'EDO: $\cos(y^{(3)}) = 1$, est non linéaire d'ordre 3. ▪

Définition 4

Une EDO est dite autonome si la variable de la fonction inconnue ne figure pas dans l'équation. Plus précisément, une EDO est dite autonome d'ordre n si elle s'écrit sous la forme (générale) suivante

$$F(y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0$$

où F est une fonction définie sur $D(F)$ une partie de $(\mathbb{R}^n)^{n+1}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3

l'EDO: $y'' + y = 1$ est autonome, tandis que l'EDO: $y' = ty + t$ est non–autonome. ▪

Remarque 5

Sous certaines conditions de régularité sur la fonction F (théorème des fonctions implicites) l'équation (1.1) peut être réécrite sous la forme:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{n-1}(t)), \tag{1.2}$$

où f est une fonction définie sur une partie $D(f)$ de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. L'EDO (1.2) est la forme normale de l'EDO (1.1). Cette forme nous permet d'écrire la dérivée n–ième de la fonction inconnue y explicitement, au moins localement, en fonctions des dérivées d'ordre inférieure.

Exemple 4

Soit l'EDO:

$$y + ty' = 0, \tag{1.3}$$

ou d'une manière équivalente:

$$F(t, y, y') = 0,$$

où $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est telle que: $\forall (t, y, z) \in \mathbb{R}^3, F(t, y, z) = y + tz$. La forme normale de l'EDO (1.3) est donc

$$y' = f(t, y) = -\frac{1}{t}y$$

où $f : D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{I}$ est un sous-intervalle de $\mathbb{R}_+^\star$. ∎

Remarque 6

Soit l'EDO (1.2) (la forme normale de l'EDO (1.1)). On pose

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

où $f_i : D(f_i) \subset \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $i = 1, 2, \cdots, n$. On considère la transformation[a] suivante: Tout d'abord on pose

$$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) = (y, y', \cdots, y^{(n-1)}),$$

et introduisons

$$Y(t) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ .. \\ z_n \end{pmatrix} \text{ et } F(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} z_2 \\ .. \\ z_n \\ f(t, z_1, z_2, \cdots, z_n) \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'EDO (1.2) peut être réécrite sous la forme: $Y'(t) = F(t, Y(t))$. En conséquence, on ne considérant dans la suite que les EDO du premier ordre ayant la forme $y' = f(t, y)$ où $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[a]Transformation proposée par Jean Le Rond D'Alembert

1.3 Notion de solution d'une équation différentielle ordinaire

Le concept de solution des EDO joue un rôle primordiale dans leurs études qualitatives. On considère l'EDO

$$y' = f(t, y) \tag{1.4}$$

où $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Le choix de la forme de l'EDO (1.4) a été motivé dans la fin du paragraphe précédent.

1.3.1 Solution classique (Solution de classe C^1)

La manière la plus naturelle de définir une solution de l'EDO (1.4) est la suivante.

Définition 7

(i) La fonction $y : \mathbb{J} \to \Omega$ est une solution de l'EDO (1.4) où $\mathbb{J}$ est un sous intervalle non vide de $\mathbb{I}$ si:

- $\forall t \in \mathbb{J}, y(t) \in \Omega$,
- y est différentiable sur $\mathbb{J}$ et $\forall t \in \mathbb{J}, y'(t) = f(t, y(t))$.

(ii) Si en plus $y \in C^1(\mathbb{J})$ on dit que y est une solution de classe C^1.

Remarque 8

Il est claire que si la fonction f, définissant la dynamique de l'EDO, est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ alors toute solution classique est de classe C^1. Dans la suite on ne s'intéresse qu'aux solutions de classe C^1 de l'EDO (1.4).

Exemple 5

1. Déterminer les solutions de classe C^1 de l'EDO $y' = f(t)$ dans le cas où f est continue sur $\mathbb{I}$ revient à une primitivation directe. En effet, toute solution classique est de classe C^1 et s'écrit sous la forme
$$y(t) = \int f(s)ds + C,$$
où C est une constante arbitraire.

2. L'EDO $y' = ty$ admet une infinité de solutions de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}$ par:
$$y(t) = C \exp \frac{t^2}{2},$$
où C est une constante arbitraire.

3. L'EDO $y' = 1 + y^2$ admet une infinité de solution de classe C^1 définies sur tout intervalle de la forme $\left]C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right[$ par
$$y(t) = \tan(t - C),$$
où C est une constante arbitraire.

4. L'EDO $y' = y^2$ a pour solutions de classe C^1:
    - la fonction $t \mapsto 0$, définie sur $\mathbb{R}$,

- la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{C-t}$, défini sur $]-\infty, C[$,
- la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\lambda - t}$, défini sur $]C, +\infty[$.

■

Il se peut que le domaine de définition d'une solution de (1.4) soit différent de $\mathbb{I}$ (f est définie sur $\mathbb{I} \times \Omega$). Ceci mène donc à la définition suivante:

Définition 9

Soit $y : \mathbb{J} \to \Omega$ une solution du problem (1.4).

1. La solution y est dite globale si $\mathbb{J} = \mathbb{I}$. Sinon y est dite locale.
2. La solution y est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement à une autre solution du problème (1.4).

On rappelle que $\tilde{y} : \tilde{\mathbb{J}} \to \Omega$ est un prolongement de $y : \mathbb{J} \to \Omega$ si $\mathbb{J} \subset \tilde{\mathbb{J}}$ et:

$$\forall t \in \mathbb{J}, \tilde{y}(t) = y(t).$$

Dans ce cas, on dit aussi que y est une restriction de $\tilde{y}$ à $\mathbb{J}$.

Exemple 6

Soit l'EDO

$$y'(t) = f(t, y), \tag{1.5}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t, y) = e^y.$$

On vérifie aisément que l'EDO (1.5) admet une infinité de solutions y définies sur $]-\infty, e^{-1}]$ par :

$$y(t) = C \log(t - e^{-1})$$

où $C \in \mathbb{R}$. Dans cet exemple toutes les solutions y sont non–globales. En plus, elles sont toutes maximales. En effet, pour tout $C \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{t \to e^{-1}} y(t) = +\infty.$$

■

Remarque 10

On montre (exercice) que toute solution $y : \mathbb{J} \to \Omega$ de l'EDO (1.4) vérifiant $\lim_{t \to a} y(t) = \infty$ où $a = \sup \mathbb{J}$ ou $a = \inf \mathbb{J}$ ne peut pas être prolongée à une autre solution du même problème.

1.3.2 Autres types de solutions

Si l'EDO (1.4) n'admet pas de solution C^1 ou si on désire chercher des solutions sous conditions faibles sur la dynamique f, on se ramène donc à élargir la classe des fonctions candidates au titre "solutions". Par exemple, on peut s'intéresser aux fonctions $y : \mathbb{J} \to \Omega$ vérifiant la relation (1.4) sur $\mathbb{J} - \mathbb{S}$ où $\mathbb{S}$ est de mesure nulle, i.e., $\lambda(\mathbb{S}) = 0$ (λ est la mesure de Lebesgue) :

$$\forall t \in \mathbb{J} - \mathbb{S}, y'(t) = f(t, y(t)).$$

On note ici que si la fonction $y : \mathbb{J} \to \mathbb{R}^n$ est presque partout différentiable sur $\mathbb{J}$ alors elle est absolument continue.

Définition 11

Une fonction $y : \mathbb{J} \to \mathbb{R}^n$ est dite absolument continue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $([a_i, b_i])_{i=1,2,\ldots.}$ de J satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \leq \delta$$

on a

$$\sum_{i=1}^{n} \|y(a_i) - y(b_i)\| \leq \epsilon.$$

Remarque 12

- On montre facilement que toute fonction absolument continue est continue. En plus, $y : \mathbb{J} \to \mathbb{R}^n$ est absolument continue si et seulement si

$$\forall (a, b) \in \mathbb{J}, y(b) - y(a) = \int_a^b y'(s) ds. \tag{1.6}$$

- On note que l'égalité (1.6) peut ne pas étre vérifiée si y est seulement presque partout différentiable sur $\mathbb{J}$. Ainsi, considérer une fonction absolument continue est primordial dans ce contexte.

On propose donc un autre concept de solution de l'EDO (1.4).

Définition 13

On dit que la fonction $y : \mathbb{J} \to \mathbb{R}^n$ est une solution de l'EDO (1.4) si y est absolument continue et telle que:

- $\forall t \in \mathbb{J}, y(t) \in \Omega$;
- pour prèsque partout $t \in \mathbb{J}$, on a $y'(t) = f(t, y(t))$.

Exemple 7

On considère l'équation Eikonale définies par :

$$|y'(t)| = 1. \tag{1.7}$$

(i) Les fonctions y_1 et y_2 définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y_1(t) = t + C \text{ et } y_2(t) = -t + C,$$

où C est une constante arbitraire sont des solutions C^1 de l'EDO (1.7).

(ii) La fonction y_3 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y_3(t) = n \text{ si } t \in [n, n+1[,\ n \in \mathbb{Z}$$

est une solution du problème (1.7) au sens de la Définition 13. En effet, la fonction y_3 est presque partout différentiable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{N}; y'(t) = 1.$$

Ici, $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ et $\lambda(\mathbb{N}) = 0$ où λ est le mesure de Lebesque.

■

On se propose maintenant de chercher des solutions de l'EDO (1.4), non différentiables, et vérifiant $y(a) = y(b) = 0$. On est donc amené, une autre fois, à élargir la classe des fonctions candidates au titre "solutions" de l'EDO (1.4). Pour ce faire on considère, formellement, une solution y de l'EDO (1.4) et on multiplie les deux membres de l'EDO par une fonction $\phi \in D(\Omega)$. On aura donc :

$$y'(t)\phi(t) = f(t, y(t))\phi(t).$$

Ainsi, en intégrant les deux membres de l'égalité entre t_0 et t on aura donc:

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)\phi(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\phi(s)ds.$$

Par une intégration par parties et tenant en compte que $\phi \in D(\Omega)$, on obtient la relation :

$$\int_{t_0}^{t} y(s)\phi'(s) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\phi(s)ds.$$

On introduit ainsi la notion de solution faible.

Définition 14

On dit que la fonction $y : \mathbb{J} \to \mathbb{R}^n$ est une solution faible de l'EDO (1.4) si

$$\forall \phi \in D(\Omega), \forall t \in \mathbb{J}, \int_{t_0}^{t} y(s)\phi'(s) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\phi(s)ds.$$

1.4 Problème de Cauchy (Étude qualitative des EDO)

1.4.1 Sur l'étude qualitative des EDO

En 1879, dans sa thèse de doctorat, Henri Poincaré à donner lieu à une nouvelle approche dans l'étude des EDO. Il a écrit:" Malheureusement, il est évident que dans la grande majorité des cas qui se présentent on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. (...) Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples ...".

Ainsi est née la théorie qualitative des équations différentielles. Il s'agit donc à décrire le comportement qualitatif local ou global, des solutions des équations différentielles données sans connaître les expressions analytiques de ces dernières.

Dans ce qui suit, s'intéresse à la théorie d'existence et unicité des solutions. Étant donnée un problème de Cauchy, on se pose la question suivante: Quelle contraintes doivent vérifie la dynamique pour qu'on ait des solutions ? Si une solution existe on s'intéressera à son unicité. Dans ce contexte, deux grands théorèmes sont établis, à savoir le théorème de Peano (Existence des solutions locales) et le théorème de Lipshitz (Unicité de la solution).

1.4.2 Problème de Cauchy et équation intégrale

Définition 15

Étant donnée une EDO

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.8}$$

où $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{I}$ est un sous intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$. Un problème de Cauchy est la recherche d'une solution de (1.8) vérifiant $y(t_0) = x$ et on l'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = x. \end{cases} \tag{1.9}$$

Ainsi, on définit une solution[(1)] du problème de Cauchy (1.9) de la manière suivante.

Définition 16

La fonction $y : \mathbb{J} \to \Omega$ est dite solution du problème (1.9) où $\mathbb{J}$ est un sous intervalle de $\mathbb{I}$ contenant t_0 si $y(t_0) = x$ et y est solution de l'EDO (1.8) (voire Définition 7).

Remarque 17

Étant donnée $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$ et soit y une solution du problème de Cauchy (1.9). La solution y est dite solution à droite si $\mathbb{J} = [t_0, T]$ ou $\mathbb{J} = [t_0, T[$. De même, y est dite solution à gauche si $\mathbb{J} = [T, t_0]$ ou $\mathbb{J} =]T, t_0]$. Sinon, la solution y est dite bilatérale ($\inf \mathbb{J} < t_0 < \sup \mathbb{J}$). Maintenait, si on peut construire (ou démontrer l'existence) d'une solution à droite, les mêmes considérations nous permettent de construire (ou démontrer l'existence) une solution à gauche et donc un simple recollement mène à construire une solution bilatérale. Ainsi, dans la suite, et sauf mention contraire on ne considèrera que des solutions à droite d'un problème de Cauchy.

Proposition 18

Supposons que f est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$. La fonction $y : \mathbb{J} \to \Omega$ est une solution du problème (1.9) si et seulement si y est continue sur $\mathbb{J}$ et

$$\forall t \in \mathbb{J}, y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds,$$

[(1)] Dans ce paragraphe on ne considère que les solutions de classe C^1

Preuve.

Partie nécessaire. Supposons que y est une solution du problème (1.9). Comme y est partout différentiable sur $\mathbb{J}$ elle y est donc continue. La fonction f est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$. Ainsi la fonction $s \mapsto f(s, y(s))$ est aussi continue sur $\mathbb{J}$. La solution y vérifie:

$$\forall t \in \mathbb{J}, y'(t) = f(t, y(t)).$$

En intégrant les deux membres de l'équation ci-dessus entre t_0 et t, on obtient:

$$\forall t \in \mathbb{J}, \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Comme $y(t_0) = x$ on aura donc:

$$\forall t \in \mathbb{J}, y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Partie suffisante. Réciproquement, puisque f est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ et y est continue sur $\mathbb{J}$, alors la fonction $s \mapsto f(s, y(s))$ est continue sur $\mathbb{J}$. En plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{J}, y(t) = x + \int_{a}^{t} f(s, y(s))ds,$$

Ainsi, la fonction y est dérivable sur $\mathbb{J}$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{J}, y'(t) = f(t, y(t)).$$

Ce qui achève la preuve.

■

Le principe de recollement, annoncé et démontré ci-dessous, joue un rôle primordial dans l'étude des problèmes de Cauchy.

Proposition 19

Soit $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue. On considère $[a, b]$ et $[b, c]$ deux sous intervalles de $\mathbb{I}$ et $x \in \Omega$. Soit $v : [a, b] \to \Omega$ une solution du problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(a) = x$ et $w : [b, c] \to \Omega$ une solution du problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(b) = v(b)$. Alors la fonction $y : [a, c] \to \Omega$ définie par

$$\begin{cases} y(t) = v(t), \text{ si } t \in [a, b] \\ y(t) = w(t), \text{ si } t \in [b, c] \end{cases} \tag{1.10}$$

est une solution du problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(a) = x$.

Preuve. Il est claire que la fonction y est continue sur $[a, c]$. Ainsi, en vertu du Proposition 18, il suffit donc de montrer que

$$\forall t \in [a, c], y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

La relation ci-dessus est satisfaite quand $t \in [a, b]$ puisque $y \equiv v$ sur $[a, b]$. Toujours, en vertu du Proposition 18 on a:

$$\forall t \in [b, c], y(t) = z(t) = z(b) + \int_{b}^{t} f(s, z(s))ds.$$

Comme

$$w(b) = x + \int_{t_0}^{b} f(s, y(s))ds,$$

on déduit alors que

$$\forall t \in [b, c], y(t) = x + \int_{t_0}^{b} f(s, y(s))ds + \int_{b}^{t} f(s, w(s))ds = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Ce qui achève la preuve du proposition. ■

1.4.3 Existence locale des solutions d'un problème de Cauchy

Théorème de Peano.

Le théorème de Peano [9] annoncé par l'italien Giuseppe Peano en 1890, garantit que tout problème de Cauchy possède au moins une solution locale, sous réserve que la dynamique définissant l'EDO considérée soit continue.

Théorème 20

Si f est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, alors pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$, le problème (1.9) admet au moins une solution locale $y : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \to \Omega$ définie sur un sous intervalle $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ contenant t_0.

Remarque 21

- Les conditions citées dans le théorème de Peano sont suffisantes. Il se peut qu'un problème de Cauchy admet une solution locale sans que la fonction f ne soit continue ou (et) l'ensemble Ω ne soit ouvert.
- La condition "Ω ouvert" est primordiale. Dans le cas contraire, une condition tangentielle est nécessaire pour garantir l'existence d'une solution locale. (Voir la fin de ce chapitre (section viabilité).
- On note que le résultat de Peano est un cas particulier d'un résultat générale à savoir le théorème de Nagumo. Ce dernier va être établi la fin de ce chapitre (section viabilité).

Plusieurs méthodes ont été proposées pour démontrer le fameux théorème de Peano. Dans la suite, on présentera une méthode de démonstration basée sur les équations intégrales à retard, voir par example [12].

On considère l'équation intégrale à retard $\lambda \geq 0$:

$$y_\lambda(t) = \begin{cases} x & \text{si}\, t \in [t_0 - \lambda, t_0] \\ x + \int_{t_0}^{t} f(s, y_\lambda(s-\lambda))ds & \text{si}\, t \in (t_0, t_0 + \delta]. \end{cases} \tag{1.11}$$

où $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert et $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$. On choisit $\delta > 0$ tel que $[t_0, t_0 + \delta] \subset \mathbb{I}$ et le retard $\lambda \geq 0$. On remarque que si $\lambda = 0$ alors, l'équation (1.11) se réduit à l'équation intégrale

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta], y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Celle–ci n'est autre que l'équation intégrale associée au problème de Cauchy (1.9).

- **Méthode de démonstration.** L'idée de la preuve est la suivante: Tout d'abord on montre que l'équation intégrale (1.11) admet, pour tout $\lambda > 0$, au moins une solution $y_\lambda : [t_0 - \lambda, t_0 + \delta]$. En suite, en faisant tendre $\lambda \to 0$ on montre que $(y_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers une fonction y. Finalement, on montre que la limite y est une solution du problème de Cauchy considéré.

On considère tout d'abord le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ et f est continue sur $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$. Le résultat ci-dessous est utile pour la suite.

Lemme 1

Si $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue, alors pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ et $\delta > 0$ vérifiant $[t_0, t_0+\delta] \subset \mathbb{I}$, l'équation intégrale (1.11) admet une et une seule solution définie sur $[t_0-\lambda, t_0+\delta]$.

Preuve. L'opération de construction de y_λ se fait en deux étapes.

- Supposons que $\delta \leq \lambda$. Sur l'intervalle $[t_0 - \lambda, t_0]$ on a $y_\lambda \equiv x$. Soit à présent $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Il est claire que si $s \in [t_0, t]$ alors $s - \lambda \in [t_0 - \lambda, t_0]$. Ce qui donne:

$$\forall s \in [t_0, t], y_\lambda(s - \lambda) = x.$$

  En conséquence,
$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta], y_\lambda(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, x)ds.$$
  L'opération de construction est donc achevée.

- Supposons que $\lambda < \delta$. La construction de y_λ étant faite sur $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$.

  - Si $t_0 + \delta \leq t_0 + 2\lambda$, alors pour tout $t \in [t_0 + \lambda, t_0 + \delta]$ on aura:

$$\forall s, s \in [t_0 + \lambda, t] \Rightarrow s - \lambda \in [t_0, t_0 + \lambda].$$

    En conséquence:

$$\forall s, s \in [t_0 + \lambda, t], y_\lambda(s - \lambda) = x + \int_{t_0}^{s} f(\theta, x)d\theta.$$

    Ainsi, on a définit y_λ sur $[t_0 - \lambda, t_0 + t_0 + \delta]$.

  - Si $2\lambda \leq \delta$. On refait le même travail.

Après un nombre fini d'opérations, il existe forcement un nombre naturel n tel que $t_0 + n\lambda \geq t_0 + \delta$. Ce qui donne fin à l'opération de construction de la solution y_λ de l'équation intégrale considérée. En plus, puisque la solution y_λ est définie par des intégrales elle est donc continue. La preuve est donc achevée. ■

On a donc pu construire une solution de l'équation intégrale définie sur $[t_0 - \lambda, t_0 + \delta]$ et ce pour un choix arbitraire du retard λ et un choix quelconque de $\delta > 0$ vérifiant $[t_0, t_0 + \delta] \subset \mathbb{I}$. Le lemme ci-dessous nous permet de faire disparaitre le retard $\lambda > 0$.

Lemme 2

Soit $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et bornée sur $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$, alors pour tout $(t_0, x) \in I \times \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$ telle que $[t_0, t_0 + \delta] \subset \mathbb{I}$, l'équation à retard (1.11) possède une et une seule solution définie sur $[t_0, t_0 + \delta]$.

Preuve. Soit $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$ telle que $[t_0, t_0 + \delta] \subset \mathbb{I}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation intégrale à retard $\delta_n = \frac{\delta}{n+1}$:

$$y_n(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [t_0 - \delta_n, t_0] \\ x + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s - \delta_n))ds & \text{si } t \in (t_0, t_0 + \delta_n] \end{cases} \tag{1.12}$$

En vertu du Lemme 2, l'équation intégrale (2.4) admet une et une seule solution $y_n : [t_0 - \delta_n, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère la famille $\mathcal{F}$ des restrictions des solutions y_n à l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$ notées aussi y_n. Pour prouver que les solutions y_n convergent uniformément sur $[t_0, t_0 + \delta]$ il suffit d'appliquer le théorème d'Arzela Ascoli (Voire Appendice B). Ce qui mène donc à montrer que la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue et uniformément bornée.

La famille $\mathcal{F}$ est uniformément bornée. Il s'agit de montrer que toutes les fonctions y_n sont bornées par une constante indépendante de n. En effet, la fonction f étant bornée sur $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$ (hypothèse du lemme). Ainsi,

$$\exists M > 0, \forall (t, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n, \|f(t, y)\| \leq M.$$

De l'équation (1.12) on aura donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_0, t_0 + \delta], \|y_n(t)\| \leq \|x\| + (t - t_0)M \leq \|x\| + \delta M.$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est uniformément bornée sur $[t_0, t_0 + \delta]$.

La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue. On observe que:

$$\forall t, s \in [t_0, t_0 + \delta], \|y(t) - y(s)\| \leq \left| \int_s^t \|f(s, y_n(s - \delta_n))\| ds \right| \leq M|t - s|.$$

Ceci nous permet de dire que la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue sur $[t_0, t_0 + \delta]$.

En appliquant le Théorème d'Ascoli–Arzela, on déduit que $(y_n)_n$ converge uniformément vers une fonction continue $y : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$. D'autre part on a

$$\lim_n y_n(s - \delta_n) = y(s)$$

uniformément sur $[t_0, t_0 + \delta]$. Comme f continue sur $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$, en passant à la limite dans (1.12) lorsque $n \to +\infty$, on déduit que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta], y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Finalement, de la Proposition 18, on déduit que $y : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy (1.9). ■

On passe maintenant à la preuve du résultat principale de Peano, i.e. Théorème 20.

Preuve. Soit $(t_0, x) \in \Omega$. Comme $\mathbb{I}$ et Ω sont des ouverts, on déduit qu'il existent $d > 0$ et $r > 0$ telles que

$$[t_0 - d, t_0 + d] \subset \mathbb{I}, \text{ et } B(x, r) = \{\eta \in X; \|\eta - x\| \leq r\} \subset \Omega.$$

On définit la fonction $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ comme suit:

$$\rho(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in B(x, r) \\ \dfrac{r}{\|y - x\|}(y - x) + x & \text{si } y \in \mathbb{R}^n - B(x, r). \end{cases}$$

L'application ρ est continue et $\rho(\mathbb{R}^n) \subset B(x, r)$. On définit maintenant l'application $g : (t_0 - d, t_0 + d) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$\forall (t, y) \in (t_0 - d, t_0 + d) \times \mathbb{R}^n; g(t, y) = f(t, \rho(y)).$$

Comme f est continue, d'après le théorème de Weirstrass on déduit que la restriction de f à l'ensemble $(t_0 - d, t_0 + d) \times \mathbb{R}^n$ est bornée. En vertu du Lemme 2, on déduit que pour tout $d' \in (0, d)$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = x, \end{cases}$$

possède au moins une solution $y : [t_0, t_0 + d'] \to \mathbb{R}^n$. Comme y est continue en t_0 et $y(t_0) = x$, on déduit que pour tout $r > 0$, il existe $\delta \in (0, d')$ tel que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta], \|y(t) - x\| \leq r.$$

Ce qui donne: $g(t, y(t)) = f(t(y(t))$. En conséquence, la fonction y est solution du problème de Cauchy (1.9). La preuve est donc achevée. $\blacksquare$

Remarque 22

(i) La continuité de la fonction f n'est pas suffisante pour garantir l'unicité de la solution. L'exemple ci–dessous (construit par G. Peano lui même) illustrera ce phénomène.

(ii) Les conditions du théorème du Peano sont suffisantes pour garantir l'existence d'au moins une solution locale du problème de Cauchy (1.9). Il se peut que f ne soit pas continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ et le problème de Cauchy (1.9) admet au moins une solution locale (Voire exercice).

Exemple 8

On vérifie aisément que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

admet deux solutions: La fonction nulle $y_1 \equiv 0$ et la fonction $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y_2(t) = t^3$.

$\blacksquare$

Théorème de Cauchy–Lipshitz (unicité de solution locale d'un problème de Cauchy)

On s'intéresse à l'unicité d'une solution locale du problème (1.9) lorsqu'elle existe. Comme on a déjà signalé dans l'exemple 8, la continuité de f n'est pas suffisante pour garantir l'unicité. A cet effet, des conditions supplémentaires sur la fonction f doivent être imposées.

Définition 23

On dit que le problème de Cauchy (1.9) possède la propriété d'unicité locale, si pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$, si u et v sont deux solutions du problème (1.9), alors il existe $\delta > 0$ tel que $[t_0, t_0 + \delta[\subset \mathbb{I}$ et

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta[, u(t) = v(t).$$

Le problème de Cauchy (1.9) possède la propriété d'unicité globale si pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$, toutes les solutions du problème (1.9) coïncident sur la partie commune de leurs domaines de définition.

Proposition 24

Les propriétés d'unicités locales et globales d'un problème de Cauchy sont équivalentes.

Preuve. Il s'agit de démontrer que la propriété d'unicité locale implique celle globale (l'autre implication est triviale). Soit donc $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$. On considère deux solutions $u : \mathbb{J} \to \Omega$ et $v : \mathbb{K} \to \Omega$ du problème (1.9). On définit l'ensemble $\mathcal{C}(u, v)$ par

$$\mathcal{C}(u, v) = \{t \in \mathbb{J} \cap \mathbb{K}, u(s) = v(s), \forall s \in [t_0, t]\}.$$

Puisque (1.9) possède la propriété d'unicité locale, alors, l'ensemble $\mathcal{C}(u, v)$ est non vide. On montre que $\mathcal{C}(u, v)$ est fermé. Soit $(t_n)_n \subset \mathcal{C}(u, v)$ convergeant vers $\tilde{t}$. On montre que $\tilde{t} \in \mathcal{C}(u, v)$. Il s'agit de montrer que:

$$\sup \mathcal{C}(u, v) = \sup(\mathbb{J} \cap \mathbb{K}).$$

Par l'absurde, supposons que $\sup \mathcal{C}(u, v) < \sup(\mathbb{J} \cap \mathbb{K})$. On pose $b = \sup \mathcal{C}(u, v)$. On considère le problème de Cauchy $z' = f(t, z(t))$, $z(b) = y(b)$. La solution étant définie sur $[b, \delta[\subset \mathbb{I}$. Le principe de recollement nous permet donc de définir une solution du problème de Cauchy (1.9) sur $[t_0, b + \delta[$ ce qui contredit l'hypothèse de la solution maximale. La preuve est donc achevée.

■

Remarque 25

Puisque il y a équivalence entre les deux propriétés de l'unicité on dit, dorénavant s'il y a lieu que le problème de Cauchy possède la propriété d'unicité.

Définition 26

La fonction $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite localement Lipschitzienne sur Ω si pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{I} \times \Omega$ il existe une constante $L = L(\mathcal{K}) > 0$ telle que

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \mathcal{K}, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Si la relation ci-dessus est satisfaite sur $\mathbb{I} \times \Omega$ on dit que la fonction f est Lipschitzienne sur Ω.

Exemple 9

1. Évidemment, toute fonction Lipschitzienne est localement Lipschitzienne.

2. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t, y) = |ty|$ est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t||y_1 - y_2| \leq L(t)|y_1 - y_2|, \forall t \in [a, b] \times \mathbb{R}^n.$$

3. La fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t, y) = \sqrt{ty}$ n'est pas localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

■

Remarque 27

Si $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfait la condition de Cauchy sur Ω, i.e., pour tout $i, j = 1, 2, \cdots, n$ les dérivés partielles $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ sont continues sur $\mathbb{I} \times \Omega$ alors f est localement Lipschitzienne sur Ω.

Proposition 28

Si f est localement Lipschitzienne sur Ω alors le problème de Cauchy (1.9) possède la propriétés d'unicité.

Preuve. En vertu du Proposition 24, il suffit de démontrer que le problème de Cauchy (1.9) possède la propriété d'unicité locale. Soit $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$ et $u : \mathbb{J} \to \Omega$, $v : \mathbb{K} \to \Omega$ deux solutions du problème (1.9). Comme $\mathbb{I} \times \Omega$ est un ouvert alors ils existent $\rho > 0$ et $d > 0$ telles que

$$a + d \leq \sup(\mathbb{J} \cap \mathbb{K}), \text{ et } B(x, \rho) \subset \Omega.$$

Les fonctions u et v sont continues en t_0. On peut donc choisir δ de sorte que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + d[, u(t), \; v(t) \in B(x, \rho).$$

Ainsi

$$\forall t \in [t_0, t_0 + d[, \|u(t) - v(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s) - f(s, v(s))\| ds \leq \int_{t_0}^{t} L\|u(s) - v(s))\| ds.$$

Le Lemme de Gronwall nous permet de conclure que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + d[, \|y(t) - z(t)\| \leq 0.$$

En conséquence,

$$\forall t \in J', y(t) = z(t).$$

■

Théorème 29

Si la fonction $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ et localement Lipschitzienne sur Ω, alors pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$, il existe $\delta > 0$ tels que $[t_0, t_0 + \delta[\subset \mathbb{I}$ et le problème de Cauchy (1.9) admet une et une seule solution définie sur $[t_0, t_0 + \delta[$.

Preuve. On applique le théorème de Peano, i.e., Théorème 20 et le résultat de la Proposition 28. ■

1.4.4 Solutions maximales d'un problème de Cauchy

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux solutions maximales du problème (1.9). On rappelle qu'une solution $y : \mathbb{J} \to \Omega$ est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement à une autre solution du même problème.

Sans perte de généralité, on suppose que $y : [t_0, T) \to \Omega$ où $[t_0, T) \subset \mathbb{I}$ est une solution du problème de Cauchy (1.9). On étudiera la possibilité de prolonger y à une autre solution $\tilde{y}$ définie sur l'intervalle $[t_0, T')$ où $T < T'$ et $[t_0, T') \subset \mathbb{I}$. Le lemme suivant sera d'un grand intérêt dans la suite.

Lemme 3

Soit $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$. Alors la solution $y : [t_0, T) \to \mathbb{R}^n$ du problème (1.9) est prolongeable si

(i) $T < \sup \mathbb{I}$,

(ii) *Il existe $y^\star \in \Omega$ telle que $\lim_{t \to T^-} y(t) = y^\star$.*

Preuve. Si la solution y est prolongeable alors évidement les conditions (i) et (ii) sont vérifiées. On suppose maintenant que $y : [t_0, T) \to \Omega$ est une solution du problème (1.9) satisfaisant les conditions (i) et (ii). On définit un prolongement de y à l'intervalle $[t_0, T]$ par:

$$\begin{cases} u(t) = y(t), \text{ si } t \in [t_0, T[\\ u(T) = y^\star. \end{cases}$$

Un simple argument nous montre que u est solution du problème (1.9) sur l'intervalle $[t_0, T]$. En effet, il suffit de montrer que

$$u'(T) = f(T, u(T)) = f(T, y^\star).$$

Soit $t \in [t_0, T[$ quelconque et $h < 0$ suffisamment petit (h satisfait $t + h \in [t_0, T[$). On a ainsi

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + o(h) = y(t) + hf(t, y(t)) + o(h).$$

En faisant tendre $t \to T^-$ et tenant en compte que (ii) est vérifiée et f est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ on déduit que:

$$y(T+h) = y^\star + hf(T, y^\star) + o(h).$$

Il en résulte que:

$$\frac{u(T+h) - u(T)}{h} = \frac{y^\star + hf(T, y^\star) + o(h) - y^\star}{h} = f(T, y^\star) + o(1).$$

Maintenant on fait tendre $h \to 0^-$, on aura donc

$$u'(T) = f(T, y^\star).$$

En vertu du théorème de Peano, i.e., Théorème 20, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(T) = y^\star, \end{cases}$$

admet au moins une solution v définie sur un intervalle $[T, T') \subset \mathbb{I}$. Il s'ensuit, par le principe de recollement, Proposition 19) que la fonction $\tilde{y}$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{y}(t) = u(t), \text{ si } t \in [t_0, T] \\ \tilde{y}(t) = v(t), \text{ si } t \in [T, T'), \end{cases}$$

est une solution du problème de Cauchy (1.9) définie sur $[t_0, T')$. La preuve est donc terminée.

■

Remarque 30

Le lemme précédent demeure vrai si on considère une solution $y :]T, t_0] \to \Omega$ tout en remplaçant (i) par $T > \inf \mathbb{I}$ et dans (ii) on remplace $t \to T^-$ par $t \to T^+$. Dans ce cas, tout prolongement de y sera défini sur un intervalle de la forme $]T', t_0]$ où $\inf \mathbb{I} < T' < T$.

Remarque 31

Du lemme précédent on déduit que si $y : \mathbb{J} \to \Omega$ est une solution maximale du problème de Cauchy (1.9) et f est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ où $\mathbb{I}$ et Ω sont des ouverts, alors forcément l'intervalle $\mathbb{J}$ est ouvert.

Le lemme suivant donne des conditions suffisantes pour que la condition (ii) du Lemme 3 soit satisfaite.

Proposition 32

Soit $y : [t_0, T) \to \Omega$ une solution du problème (1.9) où $T < +\infty$. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$\forall t \in [t_0, T), \|f(t, y(t))\| \leq M.$$

Alors, il existe $y^\star \in \overline{\Omega}$ telle que,

$$\lim_{t \to T^-} y(t) = y^\star.$$

Preuve. En vertu du Proposition 18, on déduit que:

$$\forall t, s \in [t_0, T) : \|y(t) - y(s)\| \leq \left| \int_s^t \|f(s, y(s))\| ds \right| \leq M|t - s|.$$

Ainsi, le critère de Cauchy d'existence de la limite nous permet de déduire que $\lim_{t \to T^-} y(t)$ existe. ■

Théorème 33

Toute solution $y : \mathbb{J} \to \Omega$ du problème de Cauchy (1.9) est prolongeable à une solution maximale.

Preuve. Soit y une solution du problème (1.9). Supposons que y n'est pas maximale. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les solutions prolongeant y. On muni $\mathcal{S}$ par relation binaire que l'on note par "$\preceq$" définie comme suite:

$$\forall x, z \in \mathcal{S}, x \preceq z \Leftrightarrow z \text{ prolonge } x.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est non-vide ($y \in \mathcal{S}$). D'autre part, l'ensemble $\mathcal{S}$ muni de la relation binaire $\preceq$ est ordonné. Ainsi, le lemme de Zorn[(1)] nous permet de déduite qu'il existe un élément maximal $y^\star \in \mathcal{S}$ tel que $y \preceq y^\star$. Comme $y^\star \in \mathcal{S}$ elle est donc maximale. La preuve est donc achevée. ■

Remarque 34

(i) Le théorème précédent est vrai même si la fonction f n'est pas continue ou si l'un des ensembles $\mathbb{I}$ ou Ω n'est pas ouvert.

(ii) Un problème de Cauchy peut admettre plusieurs solutions maximales.

On finit ce paragraphe par un résultat fondamental concernant l'existence des solutions maximales d'un problème de Cauchy.

Corollaire 35

Supposons que $\mathbb{I}$ et Ω sont ouverts. Si $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$, alors pour tous $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$ le problème de Cauchy (1.9) admet au moins une solution maximale définie sur un intervalle ouvert $\mathbb{J}$ contenant t_0.

Preuve. La preuve découle immédiatement du théorème de Peano (Théorème 20) et le Théorème 33. ■

[(1)] Lemme de Zorn: Tout ensemble ordonné possède au oins un élément maximal.

Si le problème de Cauchy possède la propriété d'unicité de la solution, par exemple si f est Lipschitzienne par rapport la deuxième variable, alors la solution maximale si elle existe est unique. Plus précisément, on a le résultat suivant:

Corollaire 36

Supposons que $\mathbb{I}$ et Ω sont ouverts. Si $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue sur $\mathbb{I} \times \Omega$ et localement lipschitzienne sur Ω alors pour tous $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$ le problème de Cauchy (1.9) admet une et une seule solution maximale définie sur un intervalle ouvert $\mathbb{J}$ contenant t_0.

Preuve. La preuve découle immédiatement du théorème de Cauchy–Lipshitz, i.e. Théorème 29 et du Théorème 33. ∎

Exemple 10

On cherche toutes les solutions maximales de l'EDO

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Afin que nous puissions discuter la nature des solutions maximales il nous faut déclarer le domaine de définition de la dynamique de l'EDO. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et

$$\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t, y) = y^2$$

Ainsi la solution (triviale) nulle est globale. D'autre part on a,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2y$$

qui est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est localement Lipschitzienne par rapport la deuxième variable. En conséquence, la solution nulle est unique. ∎

Exemple 11

On considère le même problème précédent en considérant une condition initiale différente. Soit

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

La dynamique est définie comme auparavant. Il est claire que la solution nulle ne satisfait pas l'EDO (1.14). On résoud le problème explicitement. Pour cela, on utilise la méthode de séparation des variables. On aura donc:

$$\frac{dy}{y^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 1 \Rightarrow \frac{-1}{y} = t + C.$$

Ainsi, toute solution de l'EDO (1.14) est de la forme

$$y(t) = \frac{-1}{t+C}.$$

Comme $y(0) = 1$ on déduit que $C = -1$. En conséquence,

$$y(t) = \frac{-1}{t-1}.$$

La solution y est définie sur $]-\infty, 1[$. La solution y est maximale. En effet,

$$\lim_{t \to 1^-} y(t) = -\infty.$$

■

1.4.5 Solutions globales d'un problème de Cauchy

Ce paragraphe est destiné à l'étude d'existence des solutions globales du problème de Cauchy (1.9).

Théorème 37

Soit $\mathbb{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue sur $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$. Supposons qu'ils existent deux fonctions $h, k : \mathbb{I} \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall (t, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n, \|f(t, y)\| \leq k(t)\|y\| + h(t). \tag{1.15}$$

Alors pour tout $(t_0, x) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$ le problème de Cauchy (1.9) admet au moins une solution globale.

Preuve. En vertu du Corolaire 35, le problème de Cauchy (1.9) admet au moins une solution maximale $y : [t_0, b) \to \Omega$ où $[t_0, b) \subset \mathbb{I}$. Du Proposition 18, on déduit que la solution y satisfait:

$$\forall t \in [t_0, b), \|y(t)\| \leq \|x\| + \int_{t_0}^{t} h(s)ds + \int_{t_0}^{t} k(s)\|y(s)\|ds.$$

On montre que $b = \sup \mathbb{I}$. Par l'absurde, supposons $b \neq \sup \mathbb{I}$. Comme h et k sont continues sur $\mathbb{J}$ et $\mathbb{J}$ est un compact on déduit qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall t \in [a, b], h(t) \leq M \,\text{et}\, k(t) \leq M.$$

En appliquant le Lemme de Granwall, on déduit donc que

$$\forall t \in [a, b], \|y(t)\| \leq [\|x\| + M(b-a)]\, e^{M(b-a)}.$$

Ainsi, y est bornée sur $[a, b)$. En conséquence, $\lim_{t \to b^-} y(t)$ existe. D'où la solution y n'est pas maximale (Lemme 3). Ce qui contredit l'hypothèse. Il en résulte que la solution y est globale.

■

Application aux systèmes linéaires

On applique le résultat précédent aux systèmes linéaires ayant la forme

$$\begin{cases} \mathcal{X}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X} + \mathcal{B}(t) \\ \mathcal{X}(t_0) = \mathcal{X}_0, \end{cases} \tag{1.16}$$

où $\mathcal{A} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ sont deux fonctions matricielles, $\mathcal{X}_0 \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ et la fonction inconnue $\mathcal{X} : \mathbb{J} \to \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension $n \times p$. On peut donc l'identifier avec l'ensemble $\mathbb{R}^{n\times p}$. On note aussi que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ est normé dont la norme est définie par:

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \|\mathcal{X}\| = \sup\{\|\mathcal{X}\xi\|, \xi \in \mathbb{R}^p, \|\xi\| \leq 1\}.$$

Corollaire 38

Si les fonctions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont continues alors pour tout $(t_0, \mathcal{X}_0) \in \mathbb{I} \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ le problème de Cauchy (1.16) admet une et une seule solution globale.

Preuve. On considère la fonction $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}^{n\times p}$ définit par

$$\forall (t, \mathcal{X}) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^{n\times p}, f(t, \mathcal{X}) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X} + \mathcal{B}(t).$$

La fonction f est continue et vérifie

$$\forall (t, \mathcal{X}) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^{n\times p}, \|f(t, \mathcal{X})\| \leq \|\mathcal{A}(t)\|\mathcal{X} + \|\mathcal{B}(t)\|.$$

Ainsi, la fonction f vérifie l'inégalité (1.15) (Théorème 37). En conséquence, pour tout $(t_0, \mathcal{X}_0) \in \mathbb{I} \times \mathcal{M}_{(n\times p)}(\mathbb{R})$ le problème de Cauchy (1.16) admet au moins une solution globale. Pour démontrer l'unicité, il suffit de vérifier que la fonction f est localement Lipshitzienne sur $\mathbb{R}^{n\times p}$. En effet,

$$\forall (t, \mathcal{X}_1), (t, \mathcal{X}_2), \|f(t, \mathcal{X}_1) - f(t, \mathcal{X}_2)\| \leq \|\mathcal{A}(t)\|\|\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2\|.$$

Ce qui termine la preuve. ■