Méthodes d'optimisation sans contrainte

Exercice 1.
Programmer la régression linéaire.

Exercice 2.
Programmer la méthode du gradient à pas fixe :

Algorithme 1 Algorithme du Gradient

(1) Initialisation : $k = 0$: choix de x_0 et de $\rho_0 > 0$
(2) Itération k : $x_{k+1} = x_k - \rho_k \, \nabla J(x_k)$;
(3) Critère d'arrêt
if $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ **then**
  STOP
else
  on pose $k = k + 1$ et on retourne à 2.
end if

Tester avec les fonctions du TP précédent.

Exercice 3.
Programmer la méthode de Newton dans $\mathbb{R}^n$

Algorithme 2 Algorithme de Newton dans $\mathbb{R}^n$

(1) Initialisation $k = 0$: choix de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dans un voisinage de x^*.
(2) Itération k : $x_{k+1} = x_k - [DF(x_k)]^{-1} \, F(x_k)$
(3) Critère d'arrêt :
if $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ **then**
  STOP,
else
  on pose $k = k + 1$ et on retourne à 2.
end if

puis l'appliquer à la recherche de points critiques

Algorithme 3 Algorithme de Newton pour la recherche de points critiques

(1) Initialisation - $k = 0$: choix de x_0 dans un voisinage de x^*.
(2) Itération k : $x_{k+1} = x_k - [H(x_k)]^{-1} \, \nabla J(x_k)$;
(3) Critère d'arrêt :
if $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ **then**
  STOP
else
  on pose $k = k + 1$, et on retourne à (2)
end if

Tester avec les fonctions du TP précédent.

Exercice 4.
Algorithme du Gradient conjugué

Algorithme 4 Algorithme du Gradient conjugué

(1) Initialisation - $k = 0$: choix de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et calcul de $g_0 = Ax_0 - b$.
(2) Itération k
if $g_k = 0$ **then**
  STOP
else
— $w_k = \begin{cases} g_0 & \text{si} \quad k = 0 \\ g_k + \alpha_k\, w_{k-1} & \text{si} \quad k \geqslant 1 \end{cases}$ avec $\alpha_k = -\dfrac{(g_k, Aw_{k-1})}{(Aw_{k-1}, w_{k-1})}$.
— $\rho_k = \dfrac{(g_k, w_k)}{(A\, w_k, w_k)}$
— $x_{k+1} = x_k - \rho_k w_k$,
— $g_{k+1} = A\, x_{k+1} - b$.
end if
(3) $k = k + 1$

Exercice 5.
Méthode de relaxation successive

Algorithme 5 Méthode de relaxation successive

(1) Initialisation - $k = 0$: choix de X_0 dans $\mathbb{R}^n$ et calcul de $g_0 = \nabla J(x_0)$.
(2) Itération k
for i=1 à n **do**
  calcul de la solution x_i^{k+1} de $\min J(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)$, $x \in \mathbb{R}$.
end for
(3) Critère d'arrêt :
if $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ **then**
  STOP
else
  on pose $k = k + 1$, et on retourne à (2)
end if