Faculté de FSMI
Dépt de Maths

UDBKM
Matière : OSC

L3 Math

Série n=02

Exo1 :

Montrer qu'une norme est convexe

Exo2 :

Montrer que la fonction indicatrice d'un ensemble E définie par

$$1_E = \begin{cases} 0 \ si \ x \in E \\ +\infty \quad si \ non \end{cases}$$

Est convexe si et seulement si E est convexe

Exo3 :

Montrer l'inégalité de Young

$\forall a,b \succ 0, \forall p,q \in N$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Exo4 :

Soit f une fonction convexe de R^n dans R

Montrer que : $\forall(\lambda_i)_{1\le i\le p} \in R \ telque \sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1. \forall(x_i)_{1\le i\le p} \in (R^n)^p : f\left(\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i x_i)\right) \le \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$

Exo5 :

Soit f une fonction de classe C^2 sur U.

Montrer que f est convexe sur U si et seulement si $\langle \nabla^2 f(x)(y-x); y-x\rangle \ge 0, \forall x, y \in U$

Exo6 :

Pour chacune des deux fonctions suivantes de R2 dans R, déterminer les points pour lesquels la fonction admet un minimum local, un maximum local, un minimum global, un maximum global

1. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 3x_2$
2. $f(x_1,x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$
3. $f(x_1,x_2) = e^{x_1-x_2}\left(x_1^{\ 2} - 2x_2^{\ 2}\right)$

Exo7 :

Considérons la fonction scalaire suivante :

$f(x,y) = x - y - x^2y + xy^2$

1. Calculer les dérivées partielles de f
2. Trouver les extrémums en résolvant les équations $f_x = 0, f_y = 0$
3. Calculer le Hessein de la fonction f.
4. Déduire la nature des extrémums.

Exo8 :

Série n=02

Soit la fonction réelle à deux variables : $f(x,y) = x - x^2 y + xy^2$

1. Calculer le Jacobien,
2. Calculer le Hessien,
3. Déterminer l'équation caractéristique du Hessien,
4. Donner les valeurs propres de cette matrice,
5. Cette matrice est-elle définie positive, pourquoi ?
6. Calculer le déterminant en utilisant les valeurs propres.
7. Trouver analytiquement les optimums de cette fonction. Quelle sont leurs natures ?

Exo9 :

Soit f la fonction définie sur R2 par :
Justifier que f est de classe C2 sur R2.
(2) (a) Calculer ∇f.
(b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est A = (−1,0).
(3) (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
(b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum en A, en précisant sa nature et sa valeur.
(4) (a) Montrer que : ∀(x,y) ∈ R2, f(x,y) ≥ xex.
(b) En étudiant la fonction g définie sur R par g(x) = xex, conclure que l'extremum trouvé à la question (2)(b) est un extremum global de f sur R2.