Série n=01

Exo1 :

1. Calculer le gradient de f(x, y, z) dans les cas suivants.
   - $f(x,y,z)=x^2+y^3+z^4$
   - $f(x,y,z)=x^2y^3z^4$
   - $f(x,y,z)=e^x\sin y\ln z$
2. Déterminer les points stationnaires de la fonction f de deux variables définie par
   - $f(x,y,z)=x(x+1)^2-y^2$
3. Calculer la dérivée ou le gradient de $(g\circ f)$ par deux méthodes dans les cas suivants
   - $f(x,y)=e^x+\cos y\,,g(x)=4x+1$
   - $f(x,y)=(e^x,\cos x)\,,g(x,y)=4x+2y$

Exo2 :

1. Montrer que
   - $\nabla(f.g)=g.\nabla f+f.\nabla g$
   - $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$
2. Montrer que : $\nabla^2 f(x)h=\nabla\langle\nabla f(x),h\rangle; x\in Df\subset R^n\ ,\forall h\in R^n$

Exo3 :

Soit $f:R^2\to R$ la fonction ainsi définie :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ non\end{cases}$$

1. Est-elle continue sur R^2 ?
2. Calculer ∇f(x,y).
3. La fonction f es de classe C[1](R^2)?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur R^2 ?

Exo4 :

Soit $f:R^2\to R$ la fonction ainsi définie :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ non\end{cases}$$

1. Est-elle continue sur ?
2. Calculer ∇f(x,y).
3. La fonction f es de classe C1( )?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur R ?

Série n=01

Exo5 :

Calculer la dérivée directionnelle de $f(x,y)=e^{xy2}$ au point $(1,2)$ dans la direction formant un angle de 30° avec l'axe des x positif.

Exo6 :

Soit $f(x,y)=x^3+y^2-2xy+1$ la température au point (x,y). Dans quelle direction au point $(1,3)$, la température f

- Augment-elle le plus rapidement et à quel taux
- Diminue-elle le plus rapidement et à quel taux

Exo7 :

Déterminer le développement de Taylor des fonctions suivante :

- $f(x,y)=-\cos x\cos y \quad en\ (0,0)$ à l'ordre 2
- $f(x,y)=e^x\cos y \quad en\ (0,0)$ à l'ordre 2

Exo8 :

Calculer le dérivée directionnelle des fonctions suivantes au points indéfinies

- $f(x,y)=x+y \quad en\ (0,0) \quad et\ d=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$
- $f(x,y)=x+y^2+2 \quad en\ (1,-2) \quad et\ d=(3,-2)^T$

Exo9 :

Calculer le gradient et la matrice hessiene des fonctions

- $f(x)=\langle a,x\rangle+b \quad a\in R^n, b\in R$
- $f(x)=a\langle b,x\rangle+c \quad b\in R^n, a,c\in R$
- $f(x)=a\langle x,x\rangle+b \quad a,b\in R$

Série n=01

Exo1 :

On considère la fonction suivante de R^2 dans R $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 + 2$

1. Déterminer les points critiques de f
2. Pour chaque point critique obtenu, dire si f présente un minimum local ou un maximum local en ce point, ou s'il s'agit d'un point selle
3. Déterminer les maxima et minima globaux de f

Exo2 :

Trouver le parallélépipède rectangle de dimension x_1, x_2, x_3 de volume maximal et de surface donnée c.

Exo3 :

Pour chacune des deux fonctions suivantes de R^2 dans R, déterminer les points pour lesquels la fonction admet un minimum local, un maximum local, un minimum global, un maximum global

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 3x_2$
2. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$