Chapitre 1

Introduction à l'optimisation

Introduction

L'optimisation est une branche des mathématiques. Dans la pratique, on part d'un problème concret, on le modélise et on le résoud mathématiquement (analytiquement : problème d'optimisation, numériquement : programme mathématique).

1.1 Problématique

1.1.1 Cadre

Un problème d'optimisation consiste, étant donnée une fonction $f : S \to \mathbb{R}$ à trouver :

1) Son minimum v (resp. son maximum) dans S.

2) Un point $x_0 \in S$ qui réalise ce minimum (resp. maximum) i.e. $f(x_0) = v$.

Vocabulaire

- f est la fonction objectif
- v est la valeur optimale
- x_0 est la solution optimale
- $S = \{$solutions réalisables du problème$\}$

–Ecriture du problème : $\min_{x\in S} f(x)$ resp.$\max_{x\in S} f(x)$

Remarque : Lien minimum/maximum : soit f une fonction dont on veut trouver le maximum. Le problème $\max_{x\in S} f(x)$ renvoit (x_0, v) alors que le problème $\min_{x\in S} f(x)$ renvoit $(x_0, -v)$. D'où ce lien. Ainsi la recherche d'un maximum peut toujours se ramener 'a la recherche d'un minimum.

Applications

L'optimisation intervient dans de nombreux domaines :

•en recherche opérationnelle (problème de transport, économie, gestion de stocks...)

•en analyse numérique (approximation/résolution de systèmes linéaires, non linéaires...)

•en automatique (modélisation de systèmes, filtrage...)

1.1.2 Différents types d'optimisation

Classification des problèmes d'optimisation

-optimisation linéaire

f est une fonction linéaire : $f(x) =< c, x >$,

S est défini par des fonctions affines : $ax + b \geq 0$.

-optimisation quadratique

f est une fonction convexe quadratique : $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x >$,

A est une matrice symétrique semi-définie positive

S est défini par des fonctions affines : $ax + b \geq 0$,

-optimisation convexe

f est une fonction convexe et S un domaine convexe

– **optimisation différentiable**

f est une fonction différentiable

S est défini par des fonction (=contraintes) différentiables

– **optimisation non différentiable**

exemple : $f(x) = \max\{f_1(x), .., f_m(x)\}$.

-optimisation en dimension infinie

exemple : problèmes variationnels J (x)=$\int_0^T L(t, x(t), x'(t))dt$ avec x est dans un ensemble de fonctions $X, x(0) = x_0$ et $x(T) = x_T$.

Optimisation nonlinéaire On distingue trois types de problèmes :

–problème sans contraintes : $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$,

–problème avec contraintes de type égalité : $\min_{x\in S} f(x)$ avec S de la forme $S = \{x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $g_i(x) = 0$ pour $i = 1..l\}$avec $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

–problème avec contraintes de type inégalité :$\min_{x\in S} f(x)$ avec S de la forme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } h_i(x) \geq 0 \text{ pour } i = 1..l\}\text{avec } h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

1.2 Exemples de problèmes d'optimisation non linéaire

Un problème de production

Une usine a besoin de n produits a_1,..,a_n en quantité $x_1, .., x_n$ pour fabriquer un produit fini M en quantité $h(x_1, .., x_n)$.

Soit p_i le prix unitaire du produit i et p le prix de vente du produit fini M.

On désire calculer la production optimale. Il s'agit donc de maximiser la fonction $ph(x_1, .., x_n) - \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$.

Un problème avec contrainte de type inégalité

Une firme fabrique des objets A et des objets B en utilisant des matières premières $m_1$et m_2.Pour fabriquer une unité de A, il faut 2 unités de m_1 et de m_2. Et pour fabriquer une unité de B, il faut 1 unité de $m_1$et 2 de m_2. On dispose de 8 unités de $m_1$et 7 de m_2.

Enfin, le bénéfice est de 4 euros par unité de A et de 5 euros par unité de B.

La patron de la firme voudrait optimiser son bénéfice.

Il s'agit donc de maximiser sur S la fonction $4a + 5b$ où a (resp. b) représente la quantité de produit A (resp.B) fabriquée avec S défini par

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } 2x_1 \ + x_2 \leq 8,\ x_1 \ + x_2 \leq 7\}$.