UDBKM Faculté de science technologique 2023-2024
S5 LMD Physique Statistique

TD 1

Exercice 1 :
Considérons un gaz parfait de $N = 100$ particules confine dans une boite en verre et partageons cette boite en deux parties égales.
Calculer la probabilité $P(n)$ d'avoir $n = 60$ dans la moitié gauche.
Montrer que la valeur moyenne de n est donné par $<n> = N/2$

Exercice 2 :
On considère un gaz parfait dans les conditions normales de température et de pression.
Déterminer : - le nombre de particules par unité de volume.
- La distance moyenne entre les particules. Comparer cette distance aux dimensions des atomes (quelquesA^0)

Exercice 3
Une entreprise possède de 50 ordinateurs.
La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est 0.01.
On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.
1- Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
2- Calculer la probabilité que 5 ordinateurs soit en panne.

Exercice 4 :
Comparer $Log(N!)$ $\quad et \ NLog(N) - N \ \ pour \ N = 10$, $\quad N = 50$, $N = 100$

Exercice 5 :
On donne la densité de la probabilité gaussienne :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{\frac{(x-a)^2}{2b}}$$

Monter que la probabilité $P(x)dx$ est normalisée. Calculer $\overline{x}$ (valeur moyenne de x)
Et $\Delta x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$ (écart quadratique moyen)

Exercice 6:
Démontrer que :
a- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x > 0$ b- $\Gamma(n) = n!$, $n \in N$
Evaluer chacune des expressions suivantes :
a- $\Gamma(6)/2\Gamma(3)$ b- $\Gamma(5/2)/\Gamma(1/2)$ c- $\Gamma(3)\Gamma(2.5)/\Gamma(5.5)$ d- $6\Gamma(8/3)/5\Gamma(2/3)$

Exercice 7 :
Calculer les intégrales suivantes :
a- $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$ b- $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$ c- $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} dx$

Exercice 8 :
Considérons un système A constitué de deux sous-systèmes $A_1 \ et \ A_2$. $A_1(A_2)$ a la probabilité P_r (P_s) d'accéder à l'état r (s). L'entropie des sous-systemes est donnée par :

$$S_1 = - k_B \sum_r P_r \ \ln P_r \quad et \quad S_2 = - k_B \sum_s P_s \ \ln P_s$$

Pour le système total, le micro-état considéré est caractérisé par le couple d'indices (r,s) et dans le cas général l'entropie de A est donnée par : $S =- k_B \sum_{r,s} P_{r,s} \ln P_{r,s}$ où $P_{r,s}$ est la probabilité pour A d'accéder au micro-état (r,s) considéré.

1- Montrer que si $A_1\, et\, A_2$ interagissent tres faiblement, i.e. s'ils sont statistiquement indépendants, on a : $S = S_1 + S_2$
2- Dans cette question, les deux systèmes ne sont plus statistiquement indépendants. Dans ce cas là, on a les relations générales :

$$P_r = \sum_s P_{r,s} \qquad et \qquad P_s = \sum_r P_{r,s}$$

Et les conditions de normalisation $\sum_r P_r = 1$ et $\sum_s P_s = 1$.

Montrer que :

$$S - (S_1 + S_2) = k_B \sum_{r,s} P_{r,s}\, ln \frac{P_r\, P_s}{P_{r,s}}$$

Exercice 9 :

1- Montrer que l'entropie S définie dans le formalisme statistique, est toujours positive :

$$S =- \lambda \sum_m P_m \ln P_m \;\; avec\; \lambda > 0\; et \sum_{m=1}^{N} P_m = 1$$

2- Si S admet un maximum, sachant que la probabilité P_m vérifie la contrainte de normalisation, monter en utilisant les multiplicateurs de Lagrange, que le maximum de S est atteint lorsqu'il s'agit d'un système ou les états sont équiprobables : $P_m = \frac{1}{\Omega}$

Ou **Ω** est le nombre total des états possibles du système.

3- Déduire que dans ce dernier cas, l'entropie s'écrit : $s^{max} = \lambda\, ln\Omega$

Exercice 10 :

1- Ecrire le hamiltonien d'un oscillateur classique à une dimension, puis les equations du mouvement.
2- Même question pour une particule de masse m dans le champ de pesanteur.

Exercice 11 :

1- Soit une particule ponctuelle classique de masse m qui se déplace librement dans une boite a une dimension de longueur L, en rebondissant élastiquement a extrémité. Quelle est trajectoire dans l'espace des phases ?
2- Même question pour un oscillateur harmonique (classique) a une dimension (masse m).
3- Même question pour un objet de masse m soumis au champ de pesanteur uniforme mg et lâché sans vitesse initiale d'une hauteur $h$et qui rebondit élastiquement sur le sol.