الفصل الثاني: الدفعات بالفائدة المركبة

أولا: تعريف الدفعة.

هي مبلغ دوري يتم دفعه كل فترة دورية، على سبيل المثال كل سنة أو كل نصف سنة أو كل ربع سنة أو كل شهر، والدفعة المتساوية هي دفعة دورية ثابتة لا تتغير على سبيل المثال عند اقتراض مبلغ لشراء سيارة يطلب منك البنك تسديد هذا القرض بواسطة دفعات متساوية شهرية تقدر مبلغ 15000دج.

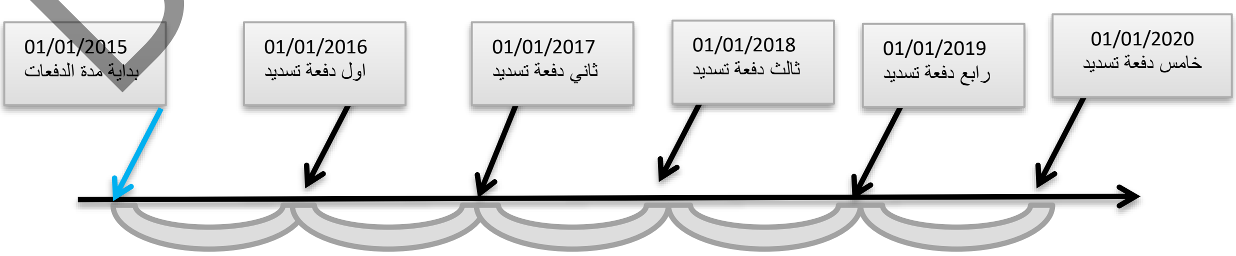
*الزمن بين تاريخ دفع دفعة معينة وتاريخ دفع الدفعة التي تلي مباشرة هذه الدفعة يطلق عليه فترة الدفعة الدورية أو فترة الدفع الدورية، وسنطلق عليها اختصاراً الفترة الدورية أو الفترة الزمنية على سبيل المثال كل سنة أو كل نصف سنة أو كل ربع سنة أو كل شهر.

يمكن تصنيف الدفعات حسب تاريخ بداية دفعها إلى ثلاثة أنواع هي:

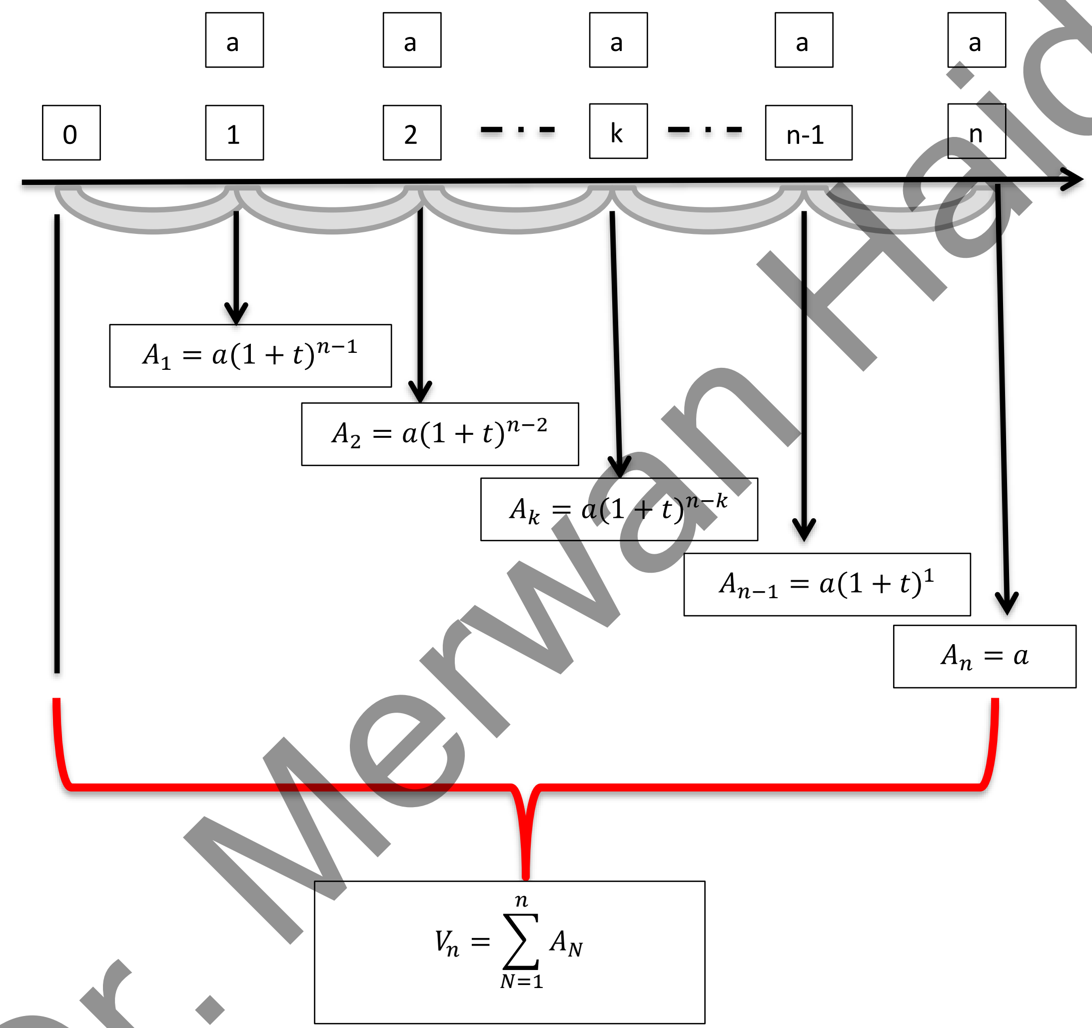
- ❖ الدفعة العادية،
- ❖ والدفعة المقدمة،
- ❖ والدفعة المؤجلة.

ثانيا: الدفعة العادية (دفعة آخر المدة أو دفعة التسديد).

عندما يكون دفع الدفعات في نهاية كل فترة دورية (يعني أول دفعة يتم دفعها بعد فترة دورية واحدة) فإن هذه الدفعات يطلق عليها الدفعة العادية، على سبيل المثال مدة الدفعة العادية خمسة سنوات تبدأ من 01 جانفي 2015، وتنتهي في 01 جانفي 2020، ومكونة من خمسة دفعات سنوية، وأول دفعة يتم دفعها بعد سنة في 01 جانفي سنة 2016 وهو نهاية السنة الأولى والدفعة الخامسة والأخيرة يتم دفعها في 01 جانفي 2020 وهو نهاية السنة الخامسة ...وهكذا.



❖ **حساب مجموع جملة الدفعات العادية (V_n)**: وهي ما تجمع للشخص المودع أو المسدد للمبالغ المالية في نهاية عدد من الفترات (n)، وبالتالي يكون قد قدم (n) دفعة متساوية، حيث إذا رمزنا لقيمة الدفعة بـ (a) والقيمة المكتسبة من كل دفعة بالفائدة المركبة (A_N) بعد كل فترة (n) بمعدل فائدة (t)، يكمن حساب مجموع القيم المكتسبة للدفعات (V_n) كمايلي:



من العلاقة المبينة أعلاه نلاحظ أن (V_n) عبارة عن متتالية هندسية متزايدة حدها الأول (a) وأساسها (1+t)، ومنه فإن مجموع هذه المتتالية يساوي:

$$V_n = \sum_{N=1}^{n} A_N = \text{الحد الاول} * \frac{\text{الاساس}^n - 1}{\text{الاساس} - 1} = a * \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1} = a * \frac{(1+t)^n - 1}{(t)}$$

مثال01: تاجر يودع في نهاية كل سنة مبلغ مالي قدرة 40000دج في البنك لمدة 10 سنوات بمعدل فائدة 8%.

المطلوب: حساب جملة ما تم جمعة لهذا الشخص في نهاية السنة العاشرة والفائدة المتحصل عليها.

الحل:

$$V_n = a * \frac{(1+t)^n - 1}{(t)} = 40000 * \frac{(1.08)^{10} - 1}{0.08} = 579462,5$$

ومنه جملة الفائدة المتحصل عليها في نهاية المدة:

$$I_{total} = V_n - (n * a) = 579462,5 - (10 * 40000) = 179462.5$$

❖ **حساب قيمة الدفعة العادية:**

$$V_n = a * \frac{(1+t)^n - 1}{(t)} \Leftrightarrow a = V_n * \frac{(t)}{(1+t)^n - 1}$$

مثال02: من أجل تسديد دين في نهاية مدة 8 سنوات، بمبلغ 238727,72 دج، أحسب قيمة الدفعة السنوية التي تسمح بذلك، والمودعة في نهاية كل سنة، بمعدل فائدة مركبة 5%.

الحل:

$$V_n = a * \frac{(1+t)^n - 1}{(t)} \Leftrightarrow a = V_n * \frac{(t)}{(1+t)^n - 1} = \frac{314447.31 * 0.05}{(1.05)^8 - 1} = 25000$$

❖ **حساب المدة أو عدد الدفعات (n).**

$$V_n = a * \frac{(1+t)^n - 1}{(t)} \Leftrightarrow (1+t)^n = \left(\frac{V_n * t}{a}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow ln((1+t)^n) = ln\left(\left(\frac{V_n * t}{a}\right) + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow n * ln(1+t) = ln\left(\left(\frac{V_n * t}{a}\right) + 1\right) \Leftrightarrow n = \frac{ln\left(\left(\frac{V_n * t}{a}\right) + 1\right)}{ln(1+t)}$$

مثال03: احسب المدة التي من أجلها يمكن تكوين راس مال يقدر بـ 87999,0144دج بدفعات العادية مبلغ كل منها 15000دج وبمعدل 8%.

الحل:

$$n = \frac{ln\left(\left(\frac{V_n * t}{a}\right) + 1\right)}{ln(1+t)} = \frac{ln\left(\left(\frac{87999{,}0144 * 0.08}{15000}\right) + 1\right)}{ln(1.08)} = 5$$

❖ **حساب المعدل الفائدة** (**t**).

$$V_n = a * \frac{(1+t)^n - 1}{(t)} \Rightarrow \frac{V_n}{a} = \frac{(1+t)^n - 1}{(t)}$$

$$\left(\frac{V_n}{a}\right) t = (1+t)^n - 1 \Rightarrow (1+t)^n - \left(\frac{V_n}{a}\right) t - 1 = 0$$

لصعوبة حل مثل هذا النوع من المعادلات خاصة من أجل (n) أكبر من 3، يمكن استخدام الالة الحسابية المتخصصة أو الاستعانة بالمواقع الإلكترونية وأشهرها موقع: (www.wolframalpha.com)

مثال04: **أحسب** المعدل الذي يسمح بتكوين رأس مال قدره 506023,90دج بدفعات عادية قدرها 55000 لمدة 7 سنوات.

الحل:

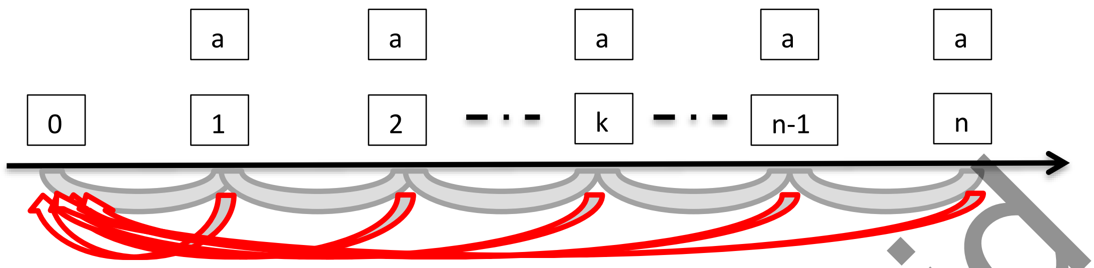
$$\frac{506023{,}90}{55000} = \frac{(1+t)^7 - 1}{(t)} \Rightarrow 0 = (1+t)^7 - (9.2t) - 1$$

عند ادخال المعادلة في الموقع (www.wolframalpha.com) كان الحل على النحو التالي:

الحل الأول (0) مرفوض/ الحل الثاني (-2.56074) سالب مرفوض/ الحل الثالث (0.08998) مقبول.

إذا معدل الفائدة (9%=t)

مجموع القيم الحالية للدفعات العادية ($\grave{V}_0$).



$a(1+t)^{-1}$

$a(1+t)^{-2}$

$a(1+t)^{-k}$

$a(1+t)^{1-n}$

$a(1+t)^{-n}$

$$\grave{V}_0 = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \cdots +$$
$$+a(1+t)^{-k} + \cdots + a(1+t)^{1-n} + a(1+t)^{-n}$$

بإخراج ($a(1+t)^{-n}$) عامل مشترك

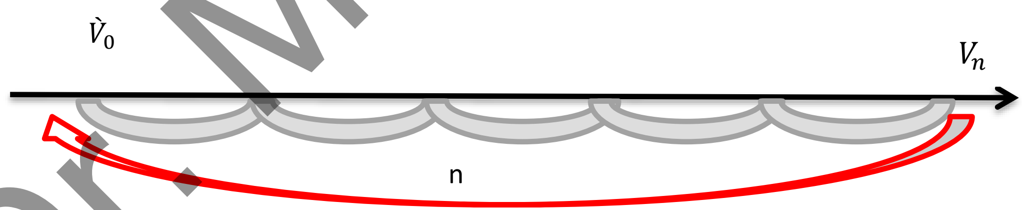
$$\Leftrightarrow \grave{V}_0 = a(1+t)^{-n} * (1 + a(1+t) + \cdots +$$
$$+a(1+t)^{n-k} + \cdots + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1})$$

المجموع اعلاه عبارة عن متتالية هندسية حدها الاول =1 وأساسها= $a(1+t)$

$$\Leftrightarrow \grave{V}_0 = a(1+t)^{-n} * (1 * \frac{(1+t)^n - 1}{(\cancel{1}+t) - \cancel{1}})$$

$$\grave{V}_0 = a * (\frac{1-(1+t)^{-n}}{(t)})$$

أو بطريقة أخرى فإن مجموع القيم الحالية للدفعات العادية ($\grave{V}_0$) ما هي إلا القيمة الحالية لـ (V_n) للفترة (n):



$$V_n = \grave{V}_0(1+t)^n \Rightarrow \grave{V}_0 = V_n(1+t)^{-n} = a * \frac{(1+t)^n - 1}{(t)} * ((1+t)^{-n})$$

$$\Rightarrow \grave{V}_0 = a * (\frac{1-(1+t)^{-n}}{(t)})$$

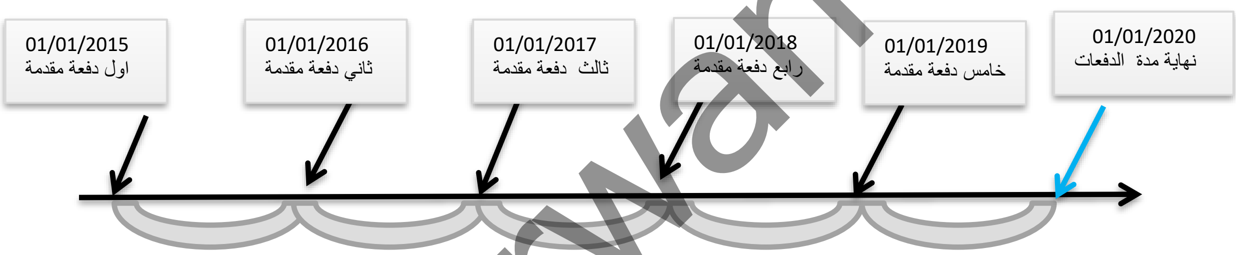
مثال04:

يقوم شخص بإيداع بصفة دورية مبلغ 60000 دج، في نهاية كل سنة، ما هي القيمة الحالية لهذه الدفعات لمدة 5 سنوات وبمعدل فائدة مركبة سنوي 10%.

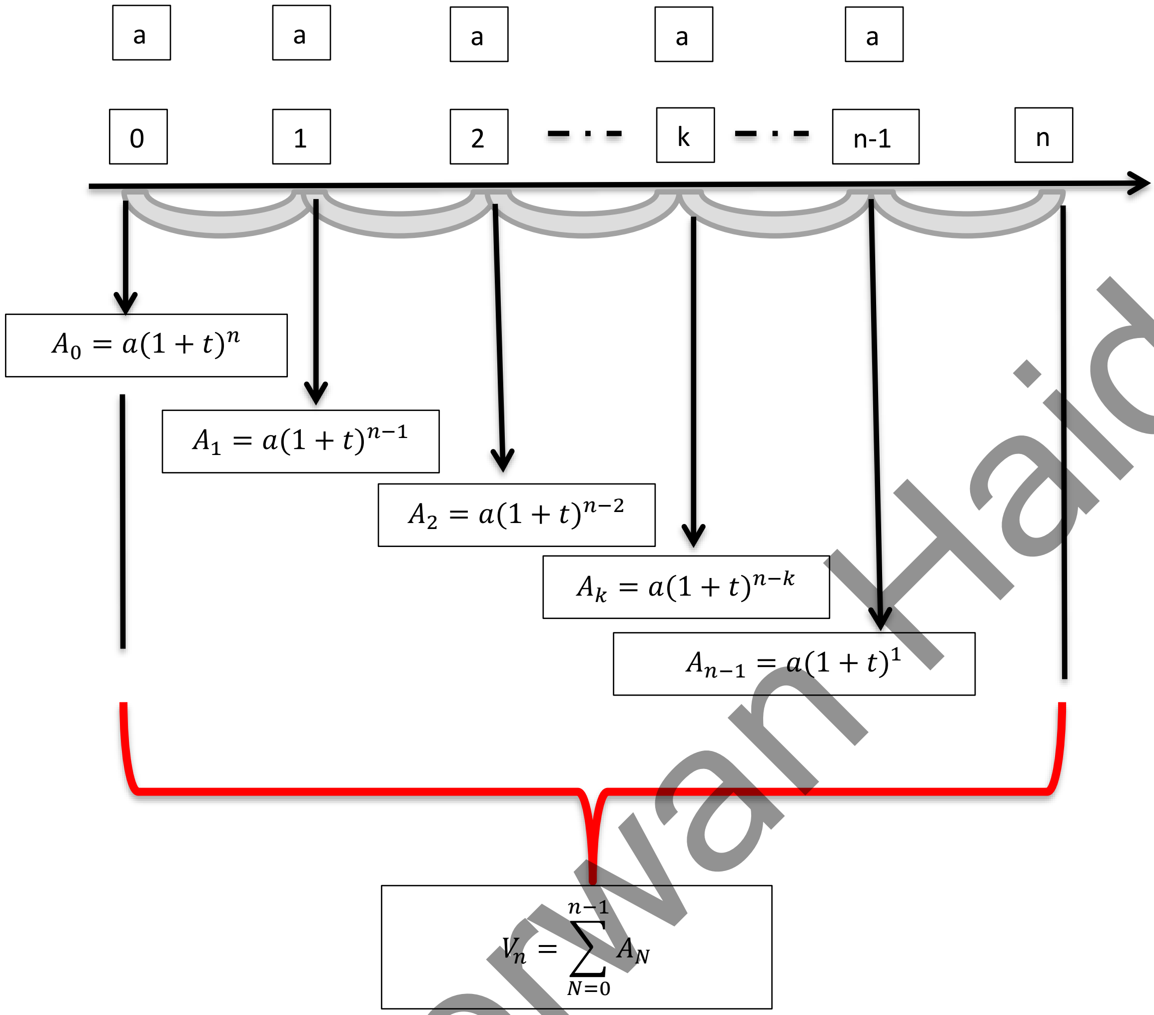
$$\grave{V}_0 = a * \left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{(t)}\right) = 60000 * \left(\frac{1-(1.1)^{-5}}{0.1}\right) = 227447{,}20$$

ثانيا: الدفعة المقدمة (دفعة أول المدة أو دفعة الاستثمار).

عندما يكون تسديد الدفعات في بداية كل فترة دفع دورية (يعني أول دفعة يتم دفعها في بداية مدة الدفعة)، فإن هذه الدفعات يطلق عليها الدفعة المقدمة، على سبيل المثال مدة دفعة مقدمة خمسة سنوات تبدأ من 01 جانفي سنة 2015، وتنتهي في 01 جانفي سنة 2020، ومكونة من خمسة دفعات سنوية، وأول دفعة يتم دفعها في 01 جانفي سنة 2015 وهو بداية السنة الأولى، والدفعة الخامسة والأخيرة يتم دفعها في 01 جانفي سنة 2019 وهو بداية السنة الخامسة...وهكذا.



حساب مجموع جملة الدفعات المقدمة (V_N): وهي ما تجمع للشخص المودع أو المسدد للمبالغ المالية في نهاية عدد من الفترات (n)، وبالتالي يكون قد قدم (n) دفعة متساوية، حيث إذا رمزنا لقيمة الدفعة بـ (a) و القيمة المكتسبة من كل دفعة بالفائدة المركبة (An) بعد كل فترة (n) بمعدل فائدة (t)، يمكن حساب مجموع القيم المكتسبة للدفعات المقدمة (V_N) كمايلي:



من العلاقة المبينة اعلاه نلاحظ ان (V_n) عبارة عن متتالية هندسية متزايدة حدها الاول ($a(1+t)$) وأساسها ($1+t$)، ومنه فإن مجموع هذه المتتالية يساوي:

$$Vn = \sum_{N=1}^{n} A_N = \text{الحد الاول} * \frac{\text{الاساس}^n - 1}{\text{الاساس} - 1} = a(1+t) * \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$= a(1+t) * \frac{(1+t)^n - 1}{(t)}$$

ثالثا: الدفعة المؤجلة.

وهي الدفعة التي يبدأ دفعها بعد مرور أكثر من فترة دورية واحدة، ومن الأسهل عند حل المسائل أن ننظر إلى الدفعة المؤجلة على إنها دفعة عادية مؤجلة، يعني الدفعة التي يتم دفعها في نهاية كل فترة دفع دورية (في نهاية كل فترة دورية) ولكن مدة الدفعة لا تبدأ إلا بعد مرور مدة زمنية من تاريخ العقد، على سبيل المثال رجل أقترض بمعدل فائدة 3% مبلغ 100000دج في (01 جانفي سنة 2015) وقد وافق على أن يسدد القرض على ثلاث دفعات سنوية متساوية ولكن أول دفعة يبدأ دفعها بعد ثلاثة سنوات من تاريخ حصوله على القرض، والمدة ما بين تاريخ حصوله على القرض الآن (01 جانفي سنة 2015) وتاريخ بداية مدة الدفعة العادية (01 جانفي سنة 2017) تسمى مدة التأجيل وهي تساوي سنتين.

تصبح القيمة الحالية الجديدة للقرض هي: $100000 * (1 + 0.03)^2 = 106\ 090$

ومنه تحتسب قيمة الدفعة عن طريق قانون القيمة الحالية:

$$\grave{V}_0 = a * \left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{(t)}\right) \Rightarrow 106090 = a * \left(\frac{1-(1+0.03)^{-3}}{(0.03)}\right)$$