

Chapitre 1

Potentiel de Woods-Saxon

L'approximation faite par le modèle à particules indépendantes consiste à admettre que l'interaction s'exerçant entre un nucléon et les $(A - 1)$ autres nucléons, peut être simulée par un puit de potentiel V . L'idée la plus simple consiste à prendre le même potentiel nucléaire pour les A nucléons d'un noyau donné.

Etant donné que ce potentiel représente la moyenne des interactions à deux corps sur toute la distribution de la matière nucléaire, on lui attribue alors une intensité proportionnelle à la densité de nucléons, en lui associant une profondeur V_0 et une allure caractérisée par une surface diffuse.

Dans le cas des noyaux sphériques ou faiblement déformés, la densité des nucléons a la forme d'une fonction de Fermi, soit :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a_0}}} \quad (1.1)$$

où :

ρ_0 : représente la densité centrale.

a_0 : est l'épaisseur de la surface.

$(r - R_0)$: représente la distance d'un nucléon à la surface effectif .

R_0 : est le rayon de surface.

Le potentiel moyen appelé potentiel de woods-saxon suit la même distribution que la

densité soit :

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a_0}}} \quad (1.2)$$

Pour étudier les noyaux déformés, l'expression (1.2) généralisée en remplaçant l'expression de la distance $(r - R_0)$ par $R_v(\ell(r))$ ou $\ell(r)$ le quasi-rayon qui exprime la distance entre un point de la surface et le point de coordonnée r à partir du centre du noyau. R_v est le rayon de la surface et a_0 est remplacé par a_v qui reste constant pendant de la déformation, l'expression (1.2) devient :

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\left(\frac{R_v \ell(r)}{a_v}\right)}} \quad (1.3)$$

et on définit le quasi-rayon par l'expression : $\ell(r) = \frac{\pi(r)}{|\nabla\pi(r)|}$.

et $\pi(r)$ est l'équation de la surface nucléaire.

Cependant cette déformation remonte une singularité pour $|\nabla\pi(r)| = 0$, difficulté qui peut être contournée en remplaçant la fonction $\pi(r)$ par $S(r)$:

$$S(r) = \sqrt{\pi - \pi_{\min}} - \sqrt{-\pi_{\min}} \quad (1.4)$$

Où π_{\min} est la valeur minimale de $\pi(r)$.

Ainsi le quasi-rayon s'écrit :

$$\ell(r) = \frac{S(r)}{|\nabla S(r)|} \quad (1.5)$$

Cette dernière expression peut définir un potentiel de woods-saxon qui décrit convenablement aussi bien les noyaux sphérique que les noyaux déformés.

1.1 Hamiltonien de Wood-Saxon

1.1.1 Potentiel de l'oscillateur harmonique

Pour les états liés, on utilise également le potentiel d'oscillateur harmonique.

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= V_0 + \frac{1}{2} \frac{mc^2}{(\hbar c)^2} (\hbar\omega)^2 r^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Avec :

$$V_0 \simeq -55 \text{Mev}, \hbar\omega \simeq 41 A^{\frac{1}{2}}, mc^2 \simeq 939 \text{Mev}, \hbar c \simeq 197 \text{Mev}.$$

Le potentiel harmonique possède des solutions analytiques, de plus de nombreux éléments de matrice de la forme :

$$I_{nlj,n'l'j'} [f] = \int R_{nlj}(r) f(r) R_{n'l'j'}(r) r^2 dr \quad (1.7)$$

Peuvent être calculés analytiquement.

1.1.2 Hamiltonien du modèle à particules indépendantes

L'hamiltonien total du noyau se scinde en hamiltonien individuels identiques correspondant chacun à un certain nucléon, soit l'équation de Schrödinger :

$$H\Psi_i = \varepsilon_i\Psi_i \quad (1.8)$$

où :

Ψ_i et ε_i représentent respectivement la fonction d'onde et l'énergie individuelle du $i^{\text{ème}}$ nucléon.

H étant l'hamiltonien du nucléon considéré, qui s'écrit :

$$H = T + V + V_{s.o} + V_c \quad (1.9)$$

où T représente l'opérateur énergie cinétique donné par :

$$T = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \quad (1.10)$$

V est l'opérateur potentiel central de woods-saxon.

V_c est l'opérateur potentiel colombien.

$V_{s.o}$ est l'opérateur de l'interaction spin-orbite donné par :

$$\begin{aligned} V_{s.o} &= \frac{-k}{\hbar^2} \left[\vec{\delta} V (\vec{\nabla} \wedge \vec{p}) \right] \\ &= \frac{-k}{\hbar^2} \left[\vec{\delta} (\vec{p} \wedge \vec{\nabla} V) \right] \\ &= \frac{-k}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar}{i} \right) \left[\vec{\delta} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V) \right] \\ &= \frac{-k}{i\hbar} \left[\vec{\delta} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V) \right] \\ &= \frac{ik}{\hbar} \vec{\delta} \cdot (\vec{\nabla} V \wedge \vec{\nabla}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad \text{et} \quad \vec{\delta} = 2\vec{s} \quad (1.12)$$

$\vec{\delta}$ et \vec{p} représentent respectivement des vecteurs spin de Pauli et d'impulsion, k étant une constante de couplage.

En tenant compte de la symétrie coaxial :

$$V_{s.o} = V_{s.o}^+ + V_{s.o}^- + V_{s.o}^z \quad (1.13)$$

où

$$V_{s.o}^- = \frac{k}{2\hbar} \delta^- e^{i\varphi} \left[\frac{-\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_z}{r} \right) \right] \quad (1.14)$$

$$V_{s.o}^+ = \frac{k}{2\hbar} \delta^+ e^{-i\varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L_z}{r} \right) \right] \quad (1.15)$$

$$V_{s.o}^z = \frac{k}{\hbar} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{L_z}{r} \quad (1.16)$$

Avec $\delta^\pm = \delta_x \pm i\delta_y$ et $L_z = i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

V_c et l'opérateur potentiel coulombien pour les protons s'écrit :

$$V_c = \frac{-\rho_{ch}}{2} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}' \quad (1.17)$$

ρ_{ch} étant la distribution de charge dans le noyau.

Bibliographie

- [1] Roger D. Woods et David S. Saxon, « Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering », *Physical Review*, vol. 95, juillet 1954, p. 577-578 (DOI 10.1103/PhysRev.95.577).
- [2] P. Ring and P. Schuck, *The NuclearMany-Body Problem*, Springer, New York (1980).
- [3] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure*, Cambridge University Press (1995).