Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques,
Commerciales et des Sciences de Gestion

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

COURS DE MATHEMATIQUES FINANCIERES

A l'usage des étudiants de deuxième année en sciences de gestion

Dr. MANCER ILYES
2015/2016

Table des matières

LES INTERETS SIMPLES

1. Définitions et justification de l'intérêt

1.1. Définition de l'intérêt

L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt d'argent. C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps.
Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt:

- La somme prêtée,
- La durée du prêt,
- et le taux auquel cette somme est prêtée.

Il y a deux types d'intérêt: l'intérêt simple et l'intérêt composé.

Exemple 1:
X prête Y 20 000 D pour six mois et après cette période, ce dernier remet à X le montant de 20 800 D. Donc l'intérêt versé à X par Y est de 800 D.

Exemple 2:
X emprunte 12 000 D à la banque pour l'achat d'un bien. Il rembourse ce prêt en faisant 36 paiements mensuels de 365 D. Donc l'intérêt versé est 36 × 365 D – 12000 D = 1140D.

1.2. Arguments Justificatifs sur l'existence de l'intérêt

Plusieurs raisons ont été avancées pour justifier l'existence et l'utilisation de l'intérêt, parmi lesquelles on peut citer :

- *La privation de consommation*: Lorsqu'une personne (le prêteur) prête une somme d'argent à une autre (l'emprunteur), elle se prive d'une consommation immédiate. Il est ainsi normal qu'elle reçoive en contrepartie une rémunération de la part de l'emprunteur pour se dédommager de cette privation provisoire.

- *La prise en compte du risque*: Une personne qui prête de l'argent, le fait pour une durée étalée dans le temps. Elle court, dès lors, un risque inhérent au futur. La réalisation de ce risque résulte au moins des éléments suivants :

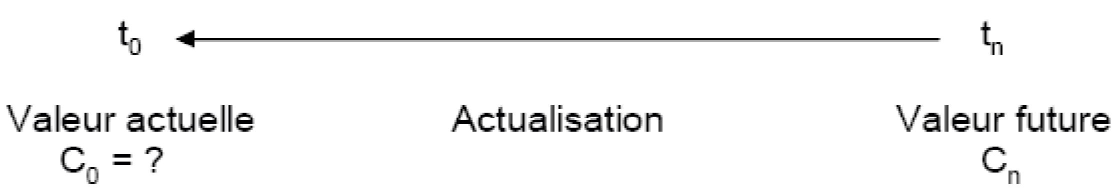
  - l'insolvabilité de l'emprunteur : dans le cas où l'emprunteur se trouve incapable de rembourser sa dette, lorsque celle-ci vient à échéance, le prêteur risque de perdre l'argent qu'il a déjà prêté. Il est alors normal qu'il exige une rémunération pour couvrir le risque encouru et dont l'importance sera appréciée en fonction de la probabilité de non remboursement.

  - l'inflation : entre la date de prêt et la date de remboursement, la valeur du prêt peut diminuer à la suite d'une érosion monétaire connue également sous le nom d'inflation. Le prêteur peut donc exiger une rémunération pour compenser cet effet.

1.3. Les notions : Actualisation et capitalisation

D'après ce qui précède, le taux d'intérêt apparaît comme le taux de transformation de l'argent dans le temps. Cette relation entre temps et taux d'intérêt signifie que deux sommes d'argent ne sont équivalentes que si elles sont égales à la même date. Dès lors, pour pouvoir comparer deux ou des sommes disponibles à différentes dates le passage par les techniques de calcul actuariel (capitalisation et actualisation) devient nécessaire.

Actualisation :
L'actualisation est une technique qui consiste à faire reculer dans le temps une valeur future pour calculer sa valeur présente appelée *Valeur Actuelle*.
La valeur actuelle C_0 d'une somme d'argent C_1 disponible dans une année et placée au taux t.
Dès lors, la valeur actuelle C_0 d'une somme d'argent C_n disponible dans n années d'intervalle et placée au taux t est égale à:



La capitalisation :

Contrairement à l’actualisation, la capitalisation consiste à faire avancer dans le temps une valeur présente pour calculer sa valeur future appelée aussi *Valeur Acquise*.
La valeur acquise C_1 d’une somme d’argent présente C_0 capitalisée au taux t pendant une année
Dès lors, la valeur future C_n d’une somme d’argent présente C_0 disponible après n années et placée au taux t est égale à:

2. Les intérêts simples : Définition et calculs

2.1. Définition de l’intérêt simple

L’intérêt simple se calcule toujours sur le principal. Il ne s’ajoute pas au capital pour porter lui-même intérêt. L’intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté. Il est d’autant plus élevé que le montant prêté ou emprunté est important et que l’argent est prêté ou emprunté pour longtemps. Il est versé en une seule fois au début de l’opération, c'est-à-dire lors de la remise du prêt, ou à la fin de l’opération c’est à dire lors du remboursement.
L’intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an).

Considérons un capital $\mathbf{C_0}$ placé sur un compte rémunéré de la date initiale 0 à une date future **n**. On doit le rembourser à cette date par le paiement d’un montant C_n.

C_0 et C_n font respectivement l’objet de diverses appellations équivalentes :

C_0	C_n
Capital ou montant investi, immobilisé, placé ou investi	Capital ou montant récupéré
Capital ou montant emprunté ou financé	Capital ou montant remboursé
Valeur présente	Valeur future
Valeur initiale	Valeur finale
Valeur actuelle	Valeur acquise

2.2. Calcul de l'intérêt simple

Si ***t*** désigne le taux de placement sur une période, l'intérêt à l'issue de ***n*** périodes est ***I*, la valeur acquise** à l'issue de ***n*** périodes est C_n, C_0 étant le capital initial.

$$\mathbf{I = C \times t \times n/100}$$

- Il est fonction de : $\begin{cases} t : \text{le taux d'intérêt} \\ ;n : \text{la durée du placement} \\ ;C : \text{le capital.} \end{cases}$
- Attention : Il faut toujours exprimer ***t*** et ***n*** en unité de temps comparable.
  Par exemple ***t*** annuel et ***n*** en année, ou ***t*** mensuel et ***n*** en mois.

Exemple:
Soit un capital C de 100 000 D placé durant 1 an au taux annuel de ***t*** = 4 %, le montant des intérêts perçus par l'investisseur au terme de l'année est de : I = 100 000 × 0,04 × 1 = 4 000 D.

2.3. Les éléments de l'intérêt simple

La valeur initiale :C_0
C'est le la somme du capital emprunté. Le montant de l'intérêt varie selon l'importance du capital.

Le taux d'intérêt : *t*
Le taux d'intérêt est l'intérêt payé (ou rapporté) par période de prêt (ou le placement) d'un capital.
Dans la pratique, ce taux est généralement exprimé en pourcentage (***t*** = 9%) et pour une période annuelle.

La durée : *n*
Cette donnée obéit à des conventions précises mais évolutives en fonction du type de prêt ou de placement. Il est donc nécessaire de toujours se faire préciser quelles sont les conventions adoptées si l'on veut avoir une idée précise de ce que représente véritablement le taux d'intérêt d'une opération.

Si nous prenons l'exemple de calcul en nombre de jour, la durée s'exprime en fraction d'année. La ***Base*** étant le nombre de jours conventionnels dans une année, elle s'écrit :

Error!

Les cas les plus fréquents sont :
Base =360 : on parle de base commerciale (année bancaire) ;
Base =365 ou 366 : on parle de base exacte (année civile).

Notes:

Selon l'unité utilisée pour caractériser *n* (nombre de périodes) cette formule générale $I = C \times t \times n/100$ devient :

En trimestre : $I=C \times t \times n/400$
En mois : $I= C \times t \times n/1200$;
En quinzaine : $I= C \times t \times n/2400$
En jours : $I=C \times t \times n/36000$.

Exemple:

Calculons l'intérêt à une banque dû par une entreprise qui a reçu un crédit de 250000 D du 20 juin au 15 août de la même année au taux de 11% (année de 360 j). Le nombre de jours de placement est déterminé mois par mois, soit : n= (30-20) +31+15=56 jours.

$I=250000 \times 11 \times 56/36000=4277,78$ D.

La valeur acquise :

La valeur acquise notée C_n, désigne la somme du capital initial (C) et des intérêts (I) qu'il génère au terme des n périodes de placement :

$$C_n= C_0 (1 + t \times n/100)$$

Exemple :

100 D sont placés à intérêt simple sur 47 jours (année de 365j) au taux annuel de 3,5%. La somme totale figurant sur le compte au bout de 47 jours est :
$100 \times (1 + 3,5\% \times 47/365) = 100,45$ D

Notion de nombre et de diviseur fixe :

La formule de I, peut s'écrire :
$I = C \times n \times (36000/t) =C \times n/D$
D est le diviseur fixe relatif au taux t.

2.4. Les Intérêts pré et post-comptés et le taux effectif

2.4.1. Intérêts pré et post-comptés

Les intérêts étant calculés par la formule précédente, deux modes de versement ou de paiement des intérêts sont possibles :

- ✓ Les intérêts post-comptés (ou terme échu)
  Les intérêts sont dits post-comptés quand ils sont comptés en fin de période. L'emprunteur dispose de C_0 en début d'emprunt et rembourse C_n en fin d'emprunt.

$$C_n=C_0\,(1+t\times n/100)$$

Quant à la valeur actuelle

$$C_0=C_n/\,(1+t\times n/100)$$

Exemple :
A- Monsieur X place pour neuf mois un montant de 2500 D au taux de 5%. La valeur acquise de cette opération à l'échéance est :

$$2500(1+5\times 9/1200)=2593{,}75D$$

b- la somme qu'il peut emprunter aujourd'hui au taux de 7% s'il ne peut rembourser que 5600 D dans onze mois est la valeur actuelle de 5600D :

$$5600/\,(1+7\times 11/1200)=5262{,}33D$$

- ✓ Les intérêts précomptés (ou terme échoir)
  Les intérêts sont dits précomptés quand ils sont comptés en début de période. C'est le cas notamment pour les agios et commission d'escompte qui sont décomptés au moment même de la remise de l'effet.

La valeur actuelle sera :

$$C_0 = C_n\,(1- t^*\times n/100)$$

La valeur acquise est :

$$C_n= C_0/\,(1- t^* \times n/100)$$

Exemple :

Considérons une opération d'emprunt d'un montant de 100 000 D, au taux d'intérêt précompté de 6%, débutant le 18.03.N pour terminer le 25.11.N ;
n= 252 jours
L'intérêt est : $100\,000 \times 6 \times 252/36000 = 4200$ D
La valeur actuelle de l'emprunt est : $100\,000 - 4200 = 95800$ D.

2.4.2. Taux d'intérêt effectif

L'intérêt simple est versé soit par avance, au moment du versement du capital, soit lors du remboursement du prêt. Ces deux modalités ne sont pas équivalentes du point de vue financier. Par convention, on appelle taux effectif d'intérêt simple, le taux d'intérêt simple avec règlement des intérêts lors du remboursement du prêt.

Le taux effectif (vu comme une opération à intérêt post compté) d'une opération à intérêt précompté est donc supérieur au taux d'intérêt annoncé.

$$\mathbf{t = t^* / (1 - \mathit{n} \times t^*/100)}$$

Démonstration :
On a : $C_n - C_0 = C_0 \times t \times n/100$
Et : $C_n - C_0 = C_n \times t^* \times n/100$
On déduit :
$C_n \times t^* \times n/100 = C_0 \times t \times n/100 = C_n (1 - t^* \times n/100)\, t \times n/100$
D'où :
$t = t^* / (1 - t^* n/100)$

Exemple :
Une personne place à intérêts précomptés la somme de 30000 dinars pour une durée de 6 mois au taux de 10 %. Quel est le taux effectif de ce placement ?
$t = t^* / (1 - t^* n/1200) = 10/(1 - 10.6/1200) = 10{,}526\%$

2.5. Les taux proportionnels

Deux taux sont **proportionnels** s'ils donnent la même valeur acquise à partir du même capital initial, au bout de la même durée de placement à intérêts simples. On dit que deux taux t et t_p sont proportionnels s'ils représentent le même système intérêt simple exprimé dans deux unités de temps différentes (par exemple, $t/12$ est le taux mensuel proportionnel au taux annuel t).
Envisageons deux opérations financières:

1) dans la première, le capital C_0 est placé pendant 1 an au taux d'intérêt annuel t_1. Au bout de 1 an, la valeur acquise est : $C_0 (1 + t_1)$.

2) dans la seconde, le capital C_0 est placé pendant 12 mois au taux d'intérêt mensuel t_{12}.

Au bout de 1 an, la valeur acquise est : $C_0 (1 + 12 \times t_{12})$.

Les 2 valeurs seront égales si :
$1 + 12 \times t_{12} = 1 + t_1$

Par conséquent, le taux d'intérêt annuel t_1 proportiennel au taux d'intérêt mensuel t_{12} est égal à $12 \times t_{12}$.
Plus généralement, le taux d'intérêt annuel t (on pose $t_1 = t$) proportionnel au taux d'intérêt t_p par période 1/m d'année est égal à $m \times t_p$.

$$\mathbf{1 + p \times t_p = 1 + t}$$

Les taux les plus utilisés :

t semestriel =1/2 *t* annuel
t trimestriel =1/4 *t* annuel
t mensuel =1/12*t* annuel
t journalier =1/360 *t* annuel (année financière)
t journalier =1/365 *t* annuel ou *t* journalier =1/366*t* annuel (année civile)

Exemple

On place au taux annuel 5,07%. On calcule le taux proportionnel mensuel. On a t=0,0507. La période est l'année, la sous -période est le mois donc m = 12. Le taux proportionnel mensuel est donc
t_{12} =0,0507/12=0,004225= 0,4225%.
Si on place 273D pendant sept mois à intérêts simples au taux annuel 5,07%, la somme à rembourser est donc :
C_7 =273 × (1+0,004225×7)=281,07D.

2.6. Taux moyen de placement

Trois placements sont faits par une même personne aux conditions suivantes:

Capitaux	Taux	durée
C_1	t_1	n_1
C_2	t_2	n_2
C_3	t_3	n_3

Le taux moyen de placement serait le taux unique « T» qui appliqué aux capitaux respectifs et pour leurs durées respectives, conduirait au même intérêt total.
$C_1 \times t_1 \times n_1/36000+ C_2 \times t_2 \times n_2/36000+ C_3 \times t_3 \times n_3/36000 = C_1 \times T \times n_1/36000+ C_2 \times T \times n_2/36000+ C_3 \times T \times n_3/36000$.
Donc pour k périodes:

$$\mathbf{T= \sum C_i \times t_i \times n_i / \sum C_i \times n_i}$$

Exemple :
1) déterminer le taux moyen placements suivants :
$C_{1=}$ 1000 D, n_1=20 jours, t_1=10%
C_2=2000 D, n_2=25 jours, t_2= 9%
C_3= 3000 D, n_3=30 jours, t_3=8%
C_4=4000 D, n_4=35 jours, t_4=7%
$T= \sum C_i \times t_i \times n_i / \sum C_i \times n_i$ = 2 350 000/300 000 = 7,83%.
2) Si on place 9000 D pendant 3 mois taux de 9% l’an et 12000 D pendant 6 mois au taux de 11 % l’an, quel est le taux moyen de placement?
T= 10,45%

2.7. Intérêt global de plusieurs capitaux

L’intérêt global fourni par plusieurs capitaux tous placés au même taux est donné par la formule :

$$\mathbf{I_{global} = \sum C_i \times n_i /D}$$

D étant le diviseur fixe attaché à t

Exercices

Exercice1 :

Une personne a en portefeuille des effets dont les valeurs nominales sont en progression arithmétique de raison 3000D. Sachant que la valeur du premier effet est de 8000 et la somme totale des effets 93000D.

Quel est le nombre des effets ? Quelle est la valeur nominale de chacun d'eux ?

Exercice 2:

Trois capitaux dont la somme est 180 000 D sont en progression arithmétique croissante de raison 5000 D. le taux de placement à intérêts simples du premier est 3/2 du taux du deuxième. Sachant que le revenu annuel du premier est supérieur de 900 D au revenu annuel du deuxième, calculer les deux taux ?

Exercice 2

Un capital de 10200 D est partagé en trois parts en progression arithmétique, la première part étant égale aux (7/10) de la troisième. Ces trois parts sont placées une année à intérêts simples respectivement à des taux en progression géométrique décroissante dont la somme est égale à 21%. Les revenus annuels des deux premières parts sont proportionnels à 28 et 17.

1. Calculer les trois parts et leurs taux respectifs de placement ;
2. A quel taux moyen le capital de 10200 D est-il placé ?

Exercice 3

Trois capitaux en progression arithmétique sont placés une année à des taux en progression géométrique. Sachant que :

- La somme des trois capitaux est égale à 22 500 D ;
- Le troisième capital est quadruple du premier ;
- La somme des trois taux d'intérêts est égale à 36,4% ;
- L'intérêt rapporté par le deuxième capital est triple de celui rapporté par le premier ;

Calculer les trois capitaux et les trois taux

Exercice 5:

Une machine qui a coûté 193750 D, doit être amortit en 5 ans. Les amortissements étant en progression géométrique décroissante de raison 0,5. Calculer les amortissements successifs.

Exercice 6:
Une somme de 80 000D est répartie entre 4 personnes, les parts de chacune d'elle étant en progression arithmétique. Calculer ces parts, sachant que la raison de la progression est de 5000. La première part est placée 7% l'an à intérêt simple. Au bout de combien de temps les intérêts produits par sa part seront égales à 6000 D.

Exercice 7:
Un matériel coûtant 95250D, doit être amortit en 7 ans. Les amortissements étant en progression géométrique décroissante. La somme des trois premières annuités est de 84 000D et la somme des trois dernières 5250D. Calculer la raison et les amortissements successifs.

Exercice 8:
Une personne repartit une somme entre ses 6 enfants de façons que leurs parts soient en progression géométrique. Sachant que la somme des parts des deux premiers est de 25200D et que la somme des parts des deux derniers est de 36 895,32 D, calculer la somme répartie, et la part de chacun ?

Exercice 9:
Un capital est partagé en trois parts dont les montants sont en progression arithmétique, la première part étant égale à 70% de la troisième. On place ces trois parts à des taux respectifs t_1, t_2, t_3 en progression géométrique dont la somme est de 36,4%. Les revenus annuels des deux premières parts sont respectivement égaux à 84 dinars et 85 dinars.

1- Calculer les trois taux de placement et les trois capitaux.
2- Calculer le taux moyen de placement.

Exercice 10:
Une entreprise s'acquitte d'une dette en effectuant à la fin de chaque année pendant 5 ans des remboursements en progressions géométriques de raison 1,2. Le dernier remboursement s'élève à 20 736 D.
1/ Quel était le montant de la dette ?
2/ Elle paye, en outre, à la fin de chaque année, les intérêts de la somme restant due au début de l'année. A quel taux sont calculés les intérêts, sachant que le montant total versé s'élève à 15000D ?

Exercice 11:
Le 1.1.2002, une personne place 2000 D à intérêts simples, au taux annuel de 8 %, ensuite le 1er février, puis tous les mois jusqu'au 1.12.2002 inclus. Cette personne

verse sur ce même compte 500 D. Calculer la valeur acquise par tous les versements le 31.12.2002 au soir.

Exercice 12:

Une personne emprunte 100 000 D à intérêts simples. Au terme d'un an elle rembourse 58 000D. Le montant dont elle est encore redevable doit porter intérêt au taux initial majoré de 1,5%. Au terme d'une nouvelle année, la dette s'élève à 54 750 D. Déterminer la valeur des deux taux.

Exercice 13:

Les placements effectués par une personne au cours d'une année ont été les suivants :

- 38 500 D, rémunérés au taux de 8,25% du 2 janvier au 16 mars ;
- 72 400 D, rémunérés au taux de 6,85% du 17 mars au 12 août ;
- 64 000 D, rémunérés au taux de 11,25% du 10 septembre au 9 décembre.

1- Quel est le taux moyen de rendement réalisés par cette personne dans ses placements ?
2- L'investisseur envisage de placer, au taux moyen, un capital égal à la somme des placements effectués précédemment. Au terme des combien de temps obtiendra –t-il un intérêt global égal à celui obtenu dans le cas précédent ?

Exercice 14:

Deux capitaux dont la somme est de 630000 D sont placés au taux t_1 pour le premier et un taux $t_2 = t_1+1$. Le revenu annuel du premier est 15000D, alors que celui du deuxième est de 11400 D.

1- Déterminer les deux taux t_1 et t_2, et calculer la valeur des deux capitaux ?
2- Au bout de combien de temps les deux valeurs acquises seraient elles égales ?

Exercice 15:

Une personne place à intérêt simple, au taux t, au début de chaque mois, et partir de 1er janvier, une somme constante S.

1- De quelle somme totale, capitaux et intérêts réunis, disposera –t- elle le 31 décembre de cette année ?
2- De quelle somme totale disposerait-elle à la fin du n^{e} mois (donc après n versements) ?
3- Pour S=2000D et t=9%, répondre aux questions précédentes.
4- En conservant ces mêmes données numériques, calculer la durée de l'opération qui conduirait à une valeur acquise totale égale à 66 975 D. (on admettra que tous les mois ont la même durée)

Exercice 16:

Y déposé 50000 D dans un compte de banque. Durant la première année, la banque crédite ce compte au taux d'intérêt t. Durant la deuxième année, la banque crédite ce compte au taux d'intérêt t +1%. Après deux ans, le solde du compte est de 55123, 75 D. Si pour les trois années suivantes, la banque crédite ce compte au taux d'intérêt t − 0, 5% par année, quel sera le montant accumulé dans le compte à la fin de ces trois années?

Exercice 17:

X doit emprunter 7000 D pour une année. Il a deux options: soit qu'il emprunte 7000 D au taux d'intérêt de 6 %, soit qu'il emprunte 15000 D à un taux d'intérêt inférieur et dans ce dernier cas, il peut investir le 8000 D en surplus pour une année à un taux d'intérêt de 4 %. Quel doit être le taux d'intérêt sur le prêt de 15000 D pour qu' X préfère cette option à celle du prêt de 7000 D ?

Exercice 18

Une personne investit 250000 D dans un certificat garanti de six mois à une banque, rémunéré sur une base d'intérêt simple à un taux annuel de 8 %. Après quatre mois, les taux d'intérêt sur de tels placements sont maintenant rendus à 9 % annuellement. Cette personne veut profiter de cette augmentation en vendant son certificat et en réinvestissant le montant accumulé pour les deux derniers mois au taux de 9 %. Quelle doit être la prime demandée par la banque à titre de condition de résiliation du certificat (à partir de la valeur accumulée par le certificat après 4 mois) pour qu'il n'y ait pas d'avantage pour cette personne de faire une telle démarche?

Exercice 19:

Deux capitaux dont la somme est de 10 000 D sont placés à intérêts simples :

- le premier au taux t% ;
- le second au taux (t-1) % ;

Le revenu annuel du premier est de 240 D, celui du deuxième est de 300 D.

1- Exprimer les deux capitaux en fonction de « t » ;
2- Calculer les deux taux, puis les deux capitaux ;
3- Exprimer les deux valeurs acquises, à intérêts simples, des deux capitaux en fonction du nombre d'années de placement et représenter graphiquement ces fonctions sur un même système d'axe ;
4- Dans combien d'années la différence des valeurs acquises sera-t-elle égale à 2600 D ;

Exercice 20

Une personne obtient un prêt de x dinars remboursable en quatre versements trimestriels en progression arithmétique. Le premier versement d'un montant de 5600 dinars aura lieu dans trois mois.

Sachant que le total des versements effectués s'élève à 21500 dinars et que chaque versement se compose :

- Du quart du montant prêté ;
- Et, de l'intérêt simple relatif au trimestre en question, calculé sur la base du capital restant du au début du trimestre.

1. Calculer le montant de chaque versement.
2. Calculer le montant du prêt (x) et le taux d'intérêt (t)

L’ESCOMPTE

1. Origine et définition

Le paiement d’une dette s’effectue par le remise immédiate ou différée : d’espèces, d’un chèque bancaire ou postal ; ou encore par l’établissement d’un effet de commerce, qu’il s’agisse d’une lettre de change ou d’un billet à ordre.
Il existe deux grands types d’effets de commerce :

La lettre de change (ou traite) : est une document émis par une personne appelée tireur (le créancier, c'est-à-dire le fournisseur) qui donne mandat à une autre personne appelée tiré (le débiteur, c'est-à-dire le client) de payé à une date donnée, une personne appelée bénéficiaire (généralement le tireur ou une tierce personne). Le tiré reconnaît se dette vis-à-vis du tireur en acceptant le lettre de change. L’acceptation se traduit par l’apposition d’une signature au recto du document.

Le billet à ordre : est un document émis par une personne appelée souscripteur (le débiteur) qui s’engage à payer, à une date donnée, une somme d’argent à une autre personne, appelée le bénéficiaire (le créancier).
Deux possibilités s’offrent au bénéficiaire d’un effet de commerce.
Il peut le conserver jusqu’à l’échéance, puis le remettre à sa banque pour encaissement. Dans ce cas, l’effet n’est qu’un simple moyen de paiement.
Il peut également le remettre à sa banque avant l’échéance et en demander l’escompte. Si l’établissement de crédit accepte, il paie au bénéficiaire le montant de l’effet diminué des intérêts et commissions constituant la rémunération de la banque. L’escompte ne comporte pas le transfert du risque de défaillance du tiré ou du souscripteur, car en cas d’incident de paiement, la banque débitera le compte du bénéficiaire du montant refusé.
L’escompte est généralement une opération à intérêt précompté, puisque en contrepartie de l’apport de la créance, le banquier paie immédiatement le montant de l’effet appelée valeur nominale diminué des intérêts et des commissions.

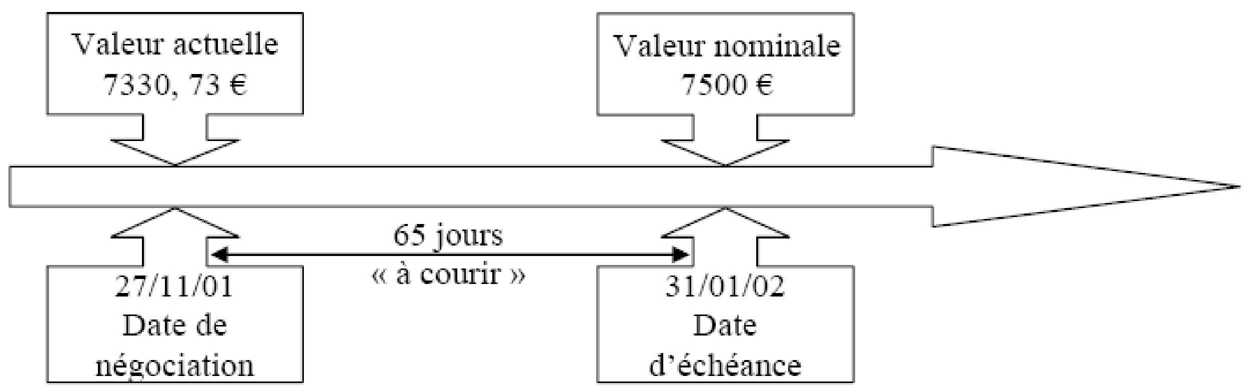
Exemple :
On a réglé à X une facture par le moyen d’un effet de commerce d’une valeur de 7500 D dont la date d’échéance est le 31 janvier 2002, X, ayant besoin d’argent, négocie l’effet avec sa banque le 27 novembre 2001. Celle-ci lui remet 7500 D moins l’intérêt produit par cette somme entre le 27 novembre et le 31 janvier au taux annuel de 12,5 %.

Il y a 65 jours du 27 novembre exclu au 31 janvier inclus (on compte le jour d'échéance, mais on ne compte pas le jour de négociation).
On appelle escompte et on désigne par *e*, l'intérêt retenu par la banque :

$$E = 7500 \times 12{,}5 \times 65/36000 = 169{,}27 \text{ D}$$

- 7500 € est la valeur nominale de l'effet ;
- le 31 janvier 2002 est la date d'échéance ;
- le 27 novembre 2001 est la date de négociation ;
- 7330,73 D (= 7500 D – 169,27 D) est la valeur actuelle de l'effet.

Il peut être commode de représenter la situation par le schéma suivant :



Selon le principe de calcul appliqué, l'escompte est commercial ou rationnel.

2. L'escompte commercial et la valeur commerciale

L'escompte commercial est l'intérêt de la valeur nominale de l'effet, calculé au taux d'escompte en fonction de la durée qui sépare le jour de la négociation (remise de l'effet à la banque) du jour de l'échéance.
Désignons par :
V, la valeur nominale de l'effet escompté
t, le taux de l'escompte
n, la durée en jours (jours de négociation exclu et jour de l'échéance inclus)
E_c, le montant de l'escompte.

$$\mathbf{E_c = V \times t \times n/36000}$$

Cette expression est peut être simplifiée en divisant le numérateur et le dénominateur par t :
$E_c = V \times n/ (36000/t)$

Posons : D= 36000/t   donc

$$\mathbf{E_c = V\times n/D}$$

La valeur actuelle commerciale d'un effet, notée, V_c est la différence entre la valeur nominale et l'escompte commercial.

$$V_c = V - E_c$$

Remplaçons E_c par l'expression établie précédemment en fonction de D :

$$V_c = V - (V\times n/D)$$

D'où

$$\mathbf{V_c = V\ (D - n/D)}$$

Exemple :

Déterminer les montants de la valeur actuelle et de l'escompte commercial d'un effet de 5000D de valeur nominale, cédé le 12 juin et dont l'échéance est le 10 juillet. Le taux d'escompte est 10%.

Calcul du montant de l'escompte :

E_c= 5000×10×28/36000= 38,89 D ou E_c=5000×28/3600=38,98D (avec D=36000/10)

Calcul de la valeur actuelle commerciale

V_c=5000 – 38,89= 4961,11D

Cette valeur peut être obtenue avec l'expression établie avec le diviseur D :

V_c=5000 (3600 – 28/3600)=4961,11D

En fait, l'escompte commercial n'est pas logique, puisque l'intérêt n'est pas calculé sur la somme réellement versée par le banquier escompteur (la valeur actuelle commerciale), mais sur la valeur nominale de l'effet, c'est-à-dire sur la somme qui est remboursée à l'échéance. D'où une méthode conforme aux principes de calcul de l'intérêt simple, celle de l'escompte rationnel.

3. L'escompte rationnel et la valeur rationnelle

La valeur actuelle rationnelle est la somme qui, augmentée de ses propres intérêts calculés au taux d'escompte en fonction du nombre de jours d'escompte, devient égale à la valeur nominale de l'effet.

L'escompte rationnel, différence entre la valeur nominale et la valeur actuelle rationnelle, est l'intérêt de la valeur actuelle rationnelle.

Désignons par E_r l'escompte rationnel. Par définition, la valeur de l'escompte rationnel s'obtient avec l'expression suivante :

$$\mathbf{E_r= V_r \times t \times n/36000}$$

La valeur actuelle rationnelle d'un effet, notée V_r, est la différence entre la valeur nominale et l'escompte rationnel.

$$\mathbf{V_r=V - E_r}$$

Remarques

L'escompte et la valeur actuelle rationnels peuvent également être exprimés par rapport à la valeur nominale.

De l'expression précédente l'on déduit : $V=V_r+ E_r$

Or : $E_r = V_r \times t \times n/36000$

D'où : $V = V_r + [V_r \times t \times n/36000] \rightarrow V= V_r [(36000+t \times n)/36000]$

$$\rightarrow \mathbf{V_r = 36000 \times V/ (36000+t \times n)}$$

Cette expression peut être également simplifiée à l'aide du diviseur D. si l'on divise le numérateur et le dénominateur par t, il vient :

$V_r = [(36000 \times V/t)]/ [(36000/t + t \times n/t)]$

A présent remplaçons 36000/t

$$\mathbf{V_r = D \times V/ (D+n)}$$

La démarche est la même pour exprimer l'escompte rationnel par référence à la valeur nominale. De l'expression initiale de V_r l'on déduit : $E_r= V – V_r$

$$\text{Or, } V_r=36000 \times V/ (36000+t \times n) \rightarrow E_r = V- [36000 \times V/ (36000+t \times n)]$$

$$\rightarrow \mathbf{E_r= V \times t \times n/ (36000+t \times n)}$$

Comme pour les cas précédents, l'introduction du diviseur D permet de simplifier cette expression. Si l'on divise le numérateur et le dénominateur par t et que l'on remplace 36 000/t par D, l'expression devient :

$$\mathbf{E_r = V \times n/ (D+n)}$$

Exemple :
Considérons de nouveau les données de l'exemple précédent :
$V=5000D$, $n= 28$ jours, $t=10\%$ et $D =36000/10=3600$
$E_r= (5000\times10\times28)/[36000+(10\times28)]=38{,}59D$ ou $E_r= 5000\times28/(3600+28)=38{,}59D$
$V_r = (36000\times5000)/[36000+(10\times28)]=4961{,}41$ D
De la même façon que dans l'exemple précédents, cette valeur peut être déterminée à l'aide de l'expression établie D :
$V_r=3600\times5000/ (3600+28)=4961{,}41D$

Remarque
La valeur de l'escompte rationnel (38,59D) est toujours inférieure à celle de l'escompte commercial (38,89D). Ce résultat est logique, car les valeurs de t et n sont les mêmes dans les deux cas, la différence résulte du fait que la valeur rationnelle V_r est toujours inférieure à la valeur nominale V.
La somme V_r et E_r vérifie l'égalité $V= V_r +E_r$ $4961{,}41+38{,}59=5000D$
Sachant que $E_c>E_r$, calculons $E_c - E_r$:

$E_c = V\times n/D$
$E_r = V\times n/ (D+n)$

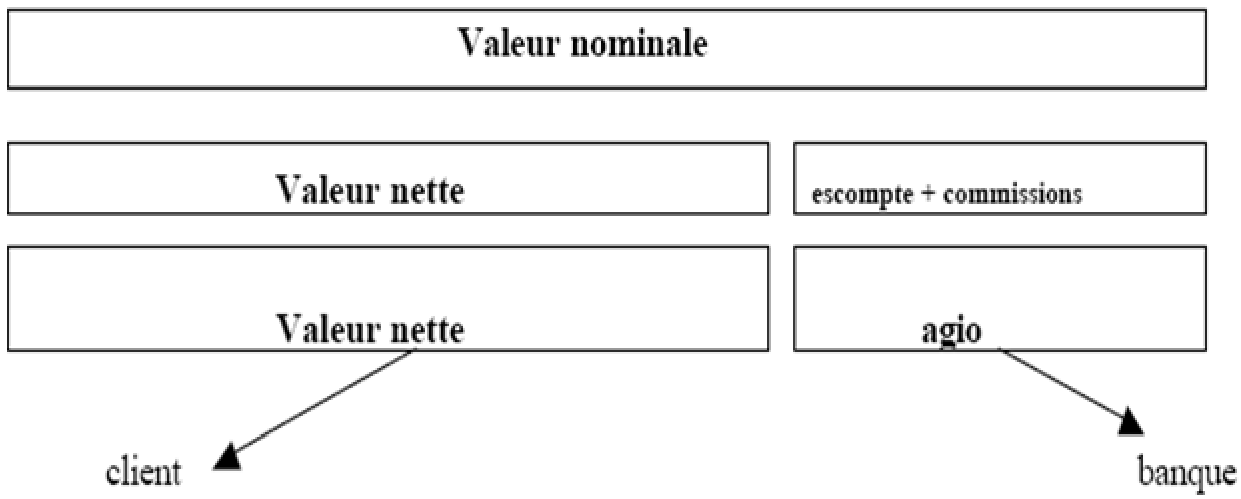
$E_c - E_r = [V\times n/D] - [V\times n/ (D+n)] = V\times n^2/ (D (D+n)) = [V\times n/D+n] \times (n/D) = E_r \times n/D$.

4. Eléments complémentaires de l'escompte

Lorsque le banquier escompte un effet de commerce, il retranche l'escompte de la valeur nominale. Il retranche également diverses commissions pour rétribuer ses services et la T.V.A. L'agio est l'ensemble de ces retenues :

Agio = escompte + commissions

La valeur nette est la valeur effectivement reçue par le vendeur de l'effet.



Les commissions :

Les commissions peuvent être proportionnelles ou fixes, elles permettent à la banque de se rémunérée. Ces commissions sont multiples (commissions d'endos, de services, d'acceptation,..), proportionnelles à la valeur nominale de l'effet ou fixes.

- **Les commissions d'endossement :** c'est un pourcentage calculé sur la valeur nominale de l'effet (elles couvrent une éventuelle opération de réescompte auprès de la banque centrale).

$$C_e = V \times t' \times n / 36000$$

- Les commissions fixes (exemple : la commission indépendante du temps, elles peuvent êtres exprimées en pourcentage ou en pour millage de la valeur nominale ou en K da)

- Autres commissions (exemple : commissions d'acceptation et de manipulation, elles peuvent être exprimées en pourcentage ou en pour millage de la valeur nominale ou en K da)

$$\textbf{Agio = escompte} + \sum \textbf{commissions}$$

Taux de réel de l'escompte :
On appelle taux de réel de l'escompte, le taux unique qu'il faut appliquer à la valeur nominale de l'effet pour obtenir l'agio.

$$\text{Agio}= V\times t_r\times n/36000 \;\rightarrow\; \mathbf{t_r = agio\times 36000/V\times n}$$

Taux de revient
Ce taux se calcule sur la valeur nette de l'effet

$$\mathbf{t_r' = agio\times 36000/V_{nette}\times n}$$

Exemple :
Le 8 juillet, on porte à l'escompte un effet de 5400 D dont l'échéance est le 31 août :
Constitution de l'escompte : taux d'escompte 4,5%, commission d'endossement 0,4%, commission indépendante du temps 1/8 %,

1) E_c =Vtn/36000= 5400. 54 .4, 5/36000=36,45D

2) Commission d'endossement : C_e = Vtn/36000= 5400. 54. 0,4/36000=3,24D (ou 36,45. 0,4/4,5=3,24 D)

3) Commission indépendante de temps : 1/8%×V=5400/800= 6,75D
   Agio= E_c +∑ commissions= 36,45+3,24+6,75=46,44D

4) taux réel : t_r = agio. 36000/Vn =46,44. 36000/5400. 54=5,73

Vérification /

$$\text{Agio total}= V.t_r.n/36000 = [V.t.n/36000 + V.t'.n/36000 + kV/100]$$
$$\rightarrow t_r = (nt/n) + (nt'/n) + (360k/n) = t + t' + 360k/n = 4{,}5 + 0{,}4 + 360\times 1/8\times 54 = 5{,}73$$

Exercices

<u>Exercice 1 :</u>

1. Un effet de 1 530D escompté à 13% le 13 octobre 2000 a une valeur actuelle de 1 463,70D. Déterminer la date d'échéance de cet effet
2. Un banquier octroie 9% d'escompte commercial sur des effets de commerce remis à l'escompte. Calculer les valeurs nominales de ces effets si le client reçoit :
   a. 3500000 dinars pour 45 jours ;
   b. 2274000 dinars pour 7 mois ;
   c. 2200000 dinars pour la période allant du 06 septembre au 30 décembre.
3. Un banquier remet une valeur de 4875 D à un client suite à l'escompte d'un effet de 5000 D ayant 75 jours à courir ; quel est le taux d'escompte ?

<u>Exercice 2 :</u>

Un effet de 1 000D dont l'échéance est le 30 juin est escompté le 20 avril à 15%

1. Calculer l'escompte commercial et la valeur actuelle commerciale de cet effet;
2. Calculer l'escompte rationnel et la valeur actuelle rationnelle de cet effet;

<u>Exercice 3</u>:

Monsieur X prête 15000 dinars à monsieur Y pour une période de 7 mois, à un taux annuel de 8%. Après trois mois, monsieur X a besoin de liquidité et décide d'escompter l'effet de commerce à la banque au taux de 11%.

1- Déterminer le montant de l'escompte commercial et le montant remis à monsieur X par la banque.

2- Déterminer la valeur actuelle rationnelle et le montant de l'escompte rationnel. Comparer les résultats obtenus à ceux de (1). Commenter

<u>Exercice 4:</u>

Un effet de valeur nominale 4100D, échéant le 2 Août est escompté le 15 juin aux conditions suivantes : taux d'escompte 9%, taux d'endos 0,5 %, taux de la commission indépendante du temps 0,2% ;

1- Calculer l'agio et la valeur nette de l'effet.

2- Calculer le taux réel d'escompte.

3- Calculer le taux de revient de l'opération d'escompte.

<u>Exercice 5:</u>

Deux effets sont escomptés, le 15 mars dans deux banques différentes, le premier dans une banque A, aux conditions t=9,7, t'=0,6, k=1/2 ; le second auprès d'une banque B, aux conditions t=10,7, t'=0,6, k=1/4 (les taux sont donnés en %, les commissions calculées aux taux k sont indépendantes de la durée). Le second effet a 15 jours de moins à courir que le premier. Dans ces conditions il se trouve que les deux effets ont supporté des taux réels d'escompte égaux entre eux.

1- Déterminer l'échéance des chacun des deux effets ;
2- Vérifier que les taux réels d'escompte sont égaux entre eux.

Exercice 6:

On escompte un effet de 16000 Dinars échéant dans 60 jours aux conditions suivantes : taux d'escompte 4,5% ; commission d'endossement 0,9% ; commission fixe 15 Dinars.

a) Calculer le net de la négociation (la valeur nette) ;
b) Exprimer l'Agio si l'effet avait « n » jours à courir ; les autres conditions restant inchangées ;
c) Représenter graphiquement la fonction de l'Agio, « n » variant « 0 » à « 90 » ;
d) Déterminer dans combien de jours, aurait lieu l'échéance si l'Agio s'élevait à 135 Dinars.

Exercice 7: Deux établissements bancaires proposent les conditions d'escompte suivantes :

	Taux d'escompte(*t*)	Taux de la commission d'endossement (*t'*)	taux de la commission indépendante du temps(*k*)
Banque A	9,3	0,6	0,5
Banque B	9,9	0,6	0,4

Un effet de valeur nominale V et échéant dans n jours est remis à l'escompte.

1) Déterminer l'expression du taux réel d'escompte en fonction de *t, t', k* et *n*.
2) Calculer le taux réel d'escompte des deux banques.
3) Indiquer, suivant les valeurs de n, laquelle des deux banques consent les conditions d'escompte les plus favorables.

Exercice 8:

Deux effets sont escomptés, le 15 mars dans deux banques différentes, le premier dans une banque A, aux conditions t=9,7, t'=0,6, k=1/2 ; le second auprès d'une banque B, aux conditions t=10,7, t'=0,6, k=1/4 (les taux sont donnés en %, les commissions calculées aux taux k sont indépendantes de la durée). Le second effet a 15 jours de moins à courir que le premier. Dans ces conditions il se trouve que les deux effets ont supporté des taux réels d'escompte égaux entre eux.

3- Déterminer l'échéance des chacun des deux effets ;

4- Vérifier que les taux réels d'escompte sont égaux entre eux.

Exercice 9 :

On escompte un effet de 16000 Dinars échéant dans 60 jours aux conditions suivantes : taux d'escompte 4,5% ; commission d'endossement 0,9% ; commission fixe 15 Dinars.

a) Calculer le net de la négociation (la valeur nette) ;
b) Exprimer l'Agio si l'effet avait « n » jours à courir ; les autres conditions restant inchangées ;
c) Représenter graphiquement la fonction de l'Agio, « n » variant « 0 » à « 90 » ;
d) Déterminer dans combien de jours, aurait lieu l'échéance si l'Agio s'élevait à 135 Dinars.

Exercice 10:

La valeur actuelle au 25 août d'un effet escompté commercialement à 9% s'élève à 7868 D. si l'effet avait été escompté 30 jours avant son échéance l'escompte aurait été inférieur de 72 D à l'escompte supporté dans la première hypothèse. Retrouver la valeur de l'effet et son échéance.

Exercice 11 :

Un effet de 2 040D est escompté pendant 90 jours. Par erreur cet effet est escompté rationnellement et, de ce fait, sa valeur actuelle est supérieure de 0,13D à ce qu'elle aurait dû être en escompte commercial. Déterminer le taux d'escompte.

Exercice 12:

Une personne emprunte pour 1 an un capital de 75000D, à intérêts simples précomptés. Le taux étant de 10%. Calculer : l'intérêt I, la somme S effectivement perçue par l'emprunteur et le taux d'intérêt effectif.

Exercice 13:

Un organisme financier vous propose pour trois mois, les deux types de placement suivants :

- Placement A : Intérêt simple post-compté au taux annuel de 5%.
- Placement B : Intérêt simple précompté au taux annuel de 4,9%.

Quel type de placement est à choisir ?

Exercice 14:

On envisage trois dettes de montants S, 2S, 3S, venant à échéance respectivement dans 1, 2, 5 mois.

1- Calculer leur valeur actuelle, A_0, en fonction de S et du taux mensuel, i ;

2- Calculer A_0 pour S =100 et i =1,5% et calculer S pour A_0 = 600 et i = 1%.

On utilisera les deux systèmes d'actualisation : actualisation commerciale et actualisation rationnelle.

Exercice 15 : Un créancier doit encaisser 140D dans un mois, 280D dans deux mois et 420D dans cinq mois. Un banquier consent à escompter les trois billets : l'escompte global est 40D. Calculer le taux mensuel, *i*, dans les trois hypothèses suivantes :

1- Actualisation commerciale ;
2- Actualisation rationnelle ;
3- Le banquier a utilisé la formule suivante d'actualisation : $A_0 = A_n\,(1-ni+n^2i^2)$ où A_0 représente la valeur actuelle au taux *i* d'un versement de montant A_n dans n périodes.

Exercice 16: On envisage 5 versements égaux (de valeur S chacun) effectués aux périodes 1,2,…,5. Le taux par période i.

1- Exprimer la valeur actuelle V_0 en fonction de S et de i ;
2- Calculer la valeur actuelle V_0 pour S=1000, i=0,005 ;
3- Calculer les escomptes commercial et rationnel et les comparer ;

(Utiliser les deux systèmes d'actualisation : commerciale et rationnelle)

EQUIVALENCE DES CAPITAUX

La notion d'équivalence s'impose dès lors qu'il est question de substituer un effet, un capital ou de façon générale un paiement à un ou plusieurs autres. L'application de ce principe permet de simplifier la gestion de la dette du débiteur ou, de manière équivalente celle des créances d'un bailleur de fonds.

1. Equivalence de deux effets ou de capitaux

1.1. Définition

Deux effets (ou capitaux) sont équivalents à une date donnée si, à cette date, leurs valeurs actuelles commerciales sont égales. A intérêts simples, cette date, dite date d'équivalence, est unique.

Désignons par :
V_1, V_2 : les valeurs nominales respectives des effets 1 et 2.
n_1, n_2 : le nombre de jours à courir entre la date d'équivalence cherchée et les échéances respectives des effets 1 et 2.
t : le taux d'escompte,
V_{c1}, V_{c2} : les valeurs actuelles commerciales des effets 1 et 2.
A la date d'équivalence, les deux valeurs actuelles commerciales sont égales :

$$V_{c1} = V_{c2} \leftrightarrow V_1 - (V_1.t.\ n_1/36000) = V_2 - (V_2.\ t.\ n_2/36000)$$

Divisons les numérateurs et dénominateurs par t et remplaçons le rapport 36000/t ; par D le diviseur du taux :

$\rightarrow V_1 - (V_1.\ n_1/D) = V_2 - (V_2.\ n_2/D)$
$\rightarrow V_1\ (D - n_1/D) = V_2\ (D - n_2/D)$

D'où l'équation d'équivalence :

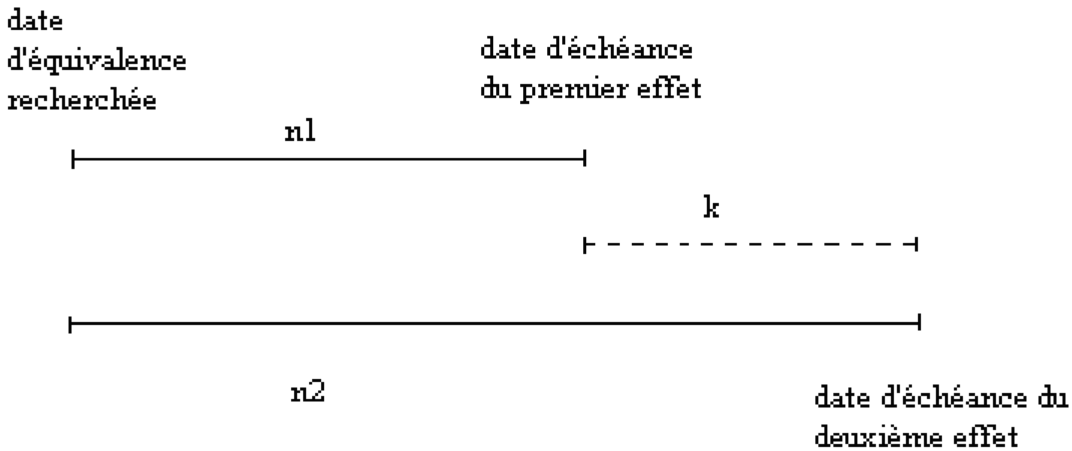
$$\mathbf{V_1.\ (D - n_1) = V_2.\ (D - n_2)}$$

1.2. Détermination de la date d'équivalence

Cette détermination implique que soit considérée le nombre de jours qui séparent les échéances du premier et du second effet.

Posons que $n_2 = n_1 + k$, où k est la distance en jours entre les échéances qui séparent les échéances du premier et du second effet. En d'autres termes, l'échéance du second effet est supposée plus éloignée de k jours de la date d'équivalence que celle du premier.

Représentation des données du problème :



Considérons à présent l'expression de l'équivalence établie précédemment :

$V_1. (D - n_1) = V_2. (D – n_2)$

Remplaçons n_2 par $n_1 +k$:

$V_1. (D - n_1) = V_2. (D – (n_1 + k))$

$V_1. (D - n_1) - V_2. (D – n_1)= -V_2.k$

L'expression obtenue à partir de $(D - n_1)$ en facteur, s'écrit :

$(D - n_1). (V_1 – V_2)= -V_2.k$

La distance en jours, de l'échéance du premier effet à la date d'équivalence, est donnée par :

$$\mathbf{n_1 = D+ k. [V_2/ (V_1 – V_2)]}$$

Remarques :

Les distance de l'échéance du second effet à la date d'équivalence (n_2) s'obtient à partir des valeurs de n_1 et k : $n_2 = n_1+ k$.

Ou directement par l'expression :

$$\mathbf{n_2 = D + k. [V_1/ (V_1 - V_2)]}$$

Le problème de la date d'équivalence n'a de sens que si celle-ci est à la fois postérieure aux dates de création des effets et antérieure à l'échéance de chacun d'eux. Le problème n'a aucune solution si les valeurs nominales sont égales et les échéances sont identiques.

Exemple :
Quelle est, au taux d'escompte de 10%, la date d'équivalence de deux effets de valeurs nominales 980,06 D et 1000D échéant respectivement le 20 juillet et le 28 septembre?
Posons : V_1=980,06D ; V_2=1000D
n_1 = la distance en jours entre la date d'équivalence recherchée et le 20 juillet, échéance de l'effet 980,06 D de valeur nominale.
n_2 = la distance en jours entre la date d'équivalence recherchée et le 28 septembre, échéance de l'effet 1000 D de valeur nominale.
La valeur de k est la différence entre les dates d'échéances des deux effets : k= 70 jours.
Détermination de la valeur de n_1 :

$n_1 = D + k. [V_2/ (V_1 - V_2)] = (36000/10)+(70).[1000/(980,06-1000)]=89,47$ soit 89 jours.

La date d'équivalence est antérieure de 89 jours au 20 juillets, ce qui correspond au 22 avril.

2. Equivalence d'un effet (capital) avec le somme de plusieurs autres

2.1. Définition

Un effet (capital) est équivalent à la somme de plusieurs à une date donnée si, à cette date, la valeur actuelle commerciale de cet effet (capital) unique est égale à la somme des valeurs actuelles commerciales des autres effets (capitaux). Cette date est appelée date d'équivalence.
Soit un effet de valeur nominale V et p effets de valeurs nominales $V_1,\ldots.V_p$ ayant leurs échéances distantes de la date d'équivalence recherchée respectivement de $n_1,\ldots.n_p$ jours. L'équivalence au taux d'escompte t s'écrit :

$V - (V.t.n/36000) = [V_1 - (V_1.t.n_1/36000)] + \ldots + [Vp - (V_p.t.n_P/36000)]$

Avec le diviseur du taux D= 36000/t, cette égalité devient :

$V - (V.n/D) = [V_1 - (V_1.n_1/D)] + \ldots + [Vp - (V_p.n_P/D)]$

$\leftrightarrow V - (V.n/D) = \sum (V_i - V_i.n_i/D)$ (de i=1 à p)

$$\rightarrow \mathbf{V - (V.n/D) = \sum V_i - (1/D) \sum V_i.n_i} \quad \text{(de i=1 à p)}$$

***Exemple* :**
Un débiteur envisage de s'acquitter d'une dette matérialisée par trois effets de : 1000D, 1500D et de 2000D, dont les échéances respectives sont distantes de ce jour de 30, 35 et 40 jours, par un paiement unique sous la forme d'un effet échéant dans 38 jours. Quelle doit être, au taux de 10%, la valeur nominale de cet effet ?

Le diviseur a pour valeur : D=36000/10=3600.
L'équivalence s'écrit dans ce cas :
$V - (V.n/D)= (V_1 + V_2 + V_3) - [(1/D)(V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3)$
L'expression numérique de cette équivalence s'écrit :
$V - (V.\ 38/3600) = (1000+1500+2000) - 1/3600[(1000\times30) + (1500\times35) + (2000\times40)]$
$V.\ (1 - 0{,}010556) = 4500- 1/3600(162500)$
$V = 4454{,}86/0{,}98944 = 4502{,}40D$

2.2. <u>Echéance commune</u>

Dans l'exemple précédent, l'interrogation portait sur le montant de l'effet unique (V). Si l'on déplace cette interrogation à échéance de l'effet unique (n), le problème consiste alors à déterminer l'échéance commune des effets remplacés.

***Exemple* :**
Considérons de nouveau les données de l'application précédente. Quelle est l'échéance d'un effet unique de 4502,40 D destiné à remplacer des trois effets ?

$4502{,}40 - (4502{,}40\times n/3600) = (1000+1500+2000) - 1/3600[(1000\times30) + (1500\times35) + (2000\times40)]$

4502,40 [1-(n/3600)] = 4454,86
n= 3600.(4502,40 -4454,86)/4502,40 = 38,01 jours

2.3. Cas particulier de l'échéance moyenne

Les exemples précédents indiquent que la valeur nominale de l'effet unique (4502,40D) est proche de la somme des valeurs nominales des effets remplacés (4500D) ; il peut donc apparaître plus commode de définir la valeur nominale de l'effets unique comme résultant simplement de la somme de celles des effets remplacés :
La valeur nominale de l'effet unique définie, il reste à en déterminer l'échéance. Ecrivons de nouveau l'expression de l'équivalence :

$V - (V.n^*/D) = \sum V_i - (1/D) \sum V_i.n_i$ (de i=1 à p)

Où n^* est l'échéance moyenne. Compte tenu de $V = \sum V_i$ (de i=1 à p), cette expression peut être réduite à :

$V.n^*/D = \sum V_i - (1/D) \sum V_i.n_i \rightarrow V.n^* = \sum V_i.n_i$ (de i=1 à p),
D'où :

$$\mathbf{n^* = \sum V_i.n_i / V} \quad \text{(de i=1 à p),}$$

ou

$$\mathbf{n^* = \sum V_i.n_i / \sum V_i} \quad \text{(de i=1 à p),}$$

Remarque :
La valeur de n* correspond à la distance en jours entre la date d'équivalence et l'échéance de l'effet unique. Cette distance est la moyenne arithmétique des distances en jours, entre la date d'équivalence et les échéances des effets remplacés, pondérées par leurs valeurs nominales.
La valeur de n* est indépendante du taux d'escompte. En effet, la résolution de l'équation entraîne la disparition du diviseur D, dans lequel figure le taux d'escompte.

Exemple :
Déterminer l'échéance moyenne des effets suivants :
V_1 = 1000 D, échéant le 10 mars ; V_2 = 1500D, échéant de 26 mars ;
V_3 = 2000 D, échéant le 11 avril ; V_4 = 2500D, échéant de 25 avril ;

Considérons deux dates d'équivalence différentes : le 28 février et le 10 mars.

- *Détermination de l'échéance moyenne à partir de l'équivalence située au 28 février :*

n_1= (10 mars - 28 février) = 10 jours, n_2 = (26 mars – 28 février) = 26 jours ;
n_3 = (11 avril – 28 février) = 42 jours, n_4 = (24 avril – 28 février) = 55 jours.
Lorsqu'il est mentionné de façon explicite qu'il s'agit d'un problème d'échéance moyenne, cela implique que la valeur nominale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés. Dans le cas contraire, il convient en premier lieu de confronter la valeur nominale de l'effet unique avec celles des effets remplacés. S'il y a une différence, il s'agit alors d'un problème classique d'échéance commune.
$V= \sum V_i$ $_{\text{(de1 à 4)}}$ = 1000+1500+2000+2500 =7000D

n* = [(1000×10) +(1500×26)+(2000×42)+(2500×55)]/7000 = 38,64 jours soit 39 jours.

L'échéance moyenne est donc distante de la date d'équivalence de 39 jours, elle correspond à la date de 8 avril.

- *Détermination de l'échéance moyenne à partir de l'équivalence située au 10 mars*

n_1= (10 mars – 10 mars) = 0 jours, n_2 = (26 mars –10 mars) = 16 jours ;
n_3 = (11 avril –10 mars) = 32 jours, n_4 = (24 avril –10 mars)= 45 jours.
n* = [(1000×0) +(1500×16)+(2000×32)+(2500×45)]/7000 = 28,64 soit 29 jours.

La distance de la date d'équivalence à l'échéance moyenne est égale à 29 jours, elle correspond à la date de 8 avril.

Remarque :
Ces applications démontrent que l'échéance moyenne ne dépend pas ni du taux d'escompte, ni de la date d'équivalence.

Exercices

Exercice 1:

Trois effets sont escomptés le 20 juin à 12% : le premier de 1400D au 30 juillet ; le deuxième de 1200D au 15 Août ; le troisième de 1000 D au 20 septembre ;
Le jour de négociation, ces trois effets sont remplacés par un effet unique. Déterminer la date d'échéance de cet effet unique si son nominal est égal à 3350D.

Exercice 2:

Sachant qu'au 14/06, la valeur actuelle rationnelle d'un effet de valeur nominale V_1 est de 2448,6D échéant le 16/08, la valeur actuelle commerciale d'un deuxième de valeur nominale V_2 est de 3311,6 D échéant le 31/08, et le taux d'escompte 12%.
1. Trouver V_1 et V_2.
2. Déterminer l'échéance moyenne des deux effets.
3. On remplace les deux effets par un effet unique d'échéance le 09/09. Trouver la valeur nominale de cet effet.

Exercice 3:

L'échéance moyenne des deux effets suivants est le 21 juillet :
- Le premier effet a pour valeur 8000D et échoit le 15 juillet
- Le second effet a pour valeur 2530D et échoit à une date à déterminer

Exercice 4:

On remplace le 24 juin un effet de commerce de nominal V payable le 23 septembre, par deux effets V_1et V_2 d'égale valeur nominale ($V_1= V_2$), payables respectivement le 06 Août et le 05 septembre. Sachant que le somme de l'escompte commercial et l'escompte rationnel de l'effet remplaçant V est 180,90D, tandis que le produit des deux escomptes est 8181D.
1. Calculer la valeur nominale de l'effet remplaçant V (On vous donne $[(E_c\times E_r)/(E_c - E_r)] =V$)
2. Calculer le taux d'escompte ;
3. Calculer la valeur nominale commune des deux effets remplaçants.

Exercice 5:

Une personne escompte au taux de 10% deux effets qui échoient dans l'année. La somme des valeurs nominales des deux effets est de 10800 D. Le banquier lui remet 4500 D pour le premier effet et 5500 D pour le deuxième. L'échéance du premier effet est antérieure de 90 jours à celle du second.
1- Déterminer les échéances en jours des deux effets ;

2- Calculer les valeurs nominales ;

Exercice 6:

Une entreprise de travaux publics acquière une grue pelleteuse au prix de 900000 D. il est convenu avec le concessionnaire d'acquitter cet achat au moyen de 84 billets à ordres mensuels de même valeur nominale, le premier échéant dans un mois.

1- Calculer la valeur nominale des traites sachant que le taux du financement obtenu est de 10%.
2- Déterminer l'échéance moyenne des 84 billets à ordres.

Exercice 7:

Le 15 avril, trois effets de commerce sont présentés à l'escompte, chez le même banquier, au même taux. La banque remet la même somme nette pour chacun des trois effets.

Sachant que le premier effet a pour nominal V_1 = 600 dinars, que le deuxième effet a pour nominal V_2 = 596 dinars et une échéance le 26 juin et que le troisième effet a pour nominal V_3 = 591,150 dinars et échéant dans 13 jours, on vous demande de déterminer :

1-Le taux d'escompte t et la somme remise par la banque pour chacun des trois effets (arrondir vos résultats à l'unité la plus proche).
2-La date d'échéance du premier effet.
3-La date d'échéance moyenne.
4-La date d'échéance d'un effet unique de remplacement de nominal V = 1791,650 dinars.

Exercice 8:

Une entreprise est dans l'incapacité d'honorer le paiement d'un effet de 28 000 D qui doit échoir le 31 juillet. Le bénéficiaire de cet effet lui propose l'alternative suivante :

- Un nouvel effet échéant le 30 septembre, dont l'escompte le 31 juillet doit permettre le recouvrement d'un montant de 28 000 D compte tenu du taux d'escompte pratiqué par la banque 6%.
- Trois nouveaux effets dont la valeur nominale unitaire est de 9425 D, échéant le 31 août pour le premier et le 30 septembre pour le deuxième.

1- Calculer la valeur nominale de l'effet de la première proposition ;
2- Déterminer l'échéance du troisième effet de la seconde proposition, sachant que le taux d'évaluation appliqué est le même : 6%.

Exercice 9 : La somme des valeurs nominales de deux effets est égale à 48000 D, l'échéance moyenne de ces deux effets a eu lieu dans 45jours. La somme des escomptes supportés par ces deux effets s'élève à 305 D.

1- Calculer le taux d'escompte ;
2- L'un des deux effets a pour valeur nominale 36 600 D et son échéance aura lieu dans 30jours, calculer le nombre à courir de jours, pour l'autre effet ?

Exercice 10:

Monsieur Z s'adresse à un concessionnaire de voitures pour acheter un véhicule d'une valeur de 9420 dinars. Le concessionnaire lui propose la modalité de règlement suivante : versement de 3000 dinars le jour de l'achat et le reste en douze effets de commerce mensuels de 600 dinars chacun, le premier venant à échéance un mois après l'achat.

1) Déterminer le taux de crédit accordé à l'acheteur par le concessionnaire.
2) Monsieur Z propose de verser 3000 dinars le jour de l'achat et de remplacer les douze effets par un règlement unique de 7200 dinars. En considérant les mêmes conditions de taux, déterminer quant est-ce que ce règlement devrait avoir lieu.
3) Finalement, la modalité suivante est retenue : versement de 4740 dinars le jour de l'achat et paiement du solde par trois règlements dont les montants seront en progression géométrique de raison 2 et tel que le premier règlement interviendra dans 4 mois, le deuxième dans 8 mois et le troisième dans 12 mois. En considérant un taux de 12%. Calculer le montant de chacun de ces trois règlements.

Exercice 11:

L'entreprise X a contracté le 1er mars, une dette à court terme V_0 de 600 000 D. Pour rembourser cette dette, l'entreprise a émis au bénéfice du prêteur trois billets à ordre V_1, V_2, et V_3 de montants respectifs égaux à 204 750 D, 209 750 D et 215 700 D remboursables respectivement aux échéances suivantes : 30 avril, 30 juin et 30 septembre.

1- Vérifier que les intérêts sont calculés au taux précompté de 13 % ;
2- Si le 1er avril, l'entreprise demande à son préteur de remplacer les trois effets de commerce par deux effets d'égal montant, payables au 15 novembre et au 15 décembre (le taux demeure le même).
   a- Calculer la valeur de la dette de l'entreprise au 1er avril ;
   b- Calculer les valeurs nominales des deux billets à ordre que devra émettre l'entreprise pour rééchelonner sa dette.

LES INTERETS COMPOSES

1. Principe et champ d'application

Un capital est dit placé à intérêt composé, lorsqu'à l'issue de chaque période de placement, les intérêts simples produits sont ajoutés au capital pour porter eux même intérêts à la période suivante au taux convenu. On parle alors d'une capitalisation des intérêts. Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an.
La distinction fondamentale entre intérêts composés et intérêts simples réside dons dans la capitalisation. A la fin de chaque période, les intérêts acquis au cours de cette période ne sont pas exigibles par le bénéficiaire.

Exemple :
Calcul des intérêts produits par un capital de 1 000 DA placé pendant 3 ans au taux de 5%.

	Capital placé à intérêts simples			Capital placé à intérêts composés		
années	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de la période	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de la période
1	1000	50	1050	1000	50	1050
2	1000	50	1050	1050	52,50	1102,50
3	1000	50	1050	1102,50	55,125	1157,625
		150			157,625	

2. Valeur acquise par un capital placé pendant un nombre entier de périodes

Soit :
C_0 : le capital initial, i : le taux d'intérêt par période pour une durée d'un an, n : nombre de périodes de placement, C_n : Valeur acquise par le capital C_0 pendant n périodes

Le tableau qui suit présente la méthode de calcul des intérêts et de valeur acquise à la fin de chaque période:

Période	Capital début de la période	L'intérêt de La période	Valeur acquise eu terme de la période
1	C_0	$C_0.i$	$C_1 = C_0 + C_0.i = C_0 (1+i)$
2	C_1	$C_1.i$	$C_2 = C_1 + C_1.i = C_1 (1+i) = C_0 (1+i)^2$
3	C_2	$C_2.i$	$C_3 = C_2 + C_2.i = C_2 (1+i)= C_0 (1+i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
n	C_{n-1}	$C_{n-1}.i$	$C_n= C_{n-1} + C_{n-1}.i = C_{n-1} (1+i) = C_{n-1} (1+i)^n$

La valeur acquise par le capital C_0 à la fin de n périodes au taux i est donc donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{C_n = C_0 (1 + i)^n}$$

Remarques:

- La formule $C_n = C_0 (1 + i)^n$ n'est applicable que si le taux d'intérêt i et la durée n sont homogènes, c'est à dire exprimés dans la même unité de temps que la période de capitalisation. Si par exemple, il est convenu entre le prêteur et l'emprunteur que les intérêts doivent être capitalisés à la fin de chaque mois, la formule ne sera applicable que si le taux d'intérêt est mensuel et que la durée de placement est exprimée en mois.
- Le tableau précédent montre que les valeurs acquises successives constatées à la fin des périodes 1,2,…,n, après capitalisation des intérêts sont en progression géométrique de raison (1+i), le premier terme de cette progression étant d'ailleurs le capital initial C.

Exemple:

Une somme de 10000 dinars est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.
1/ Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement ?
2/ Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 20000 dinars, quelle somme doit-on placer aujourd'hui ?
3/ Si la somme placée aujourd'hui est de 10000 dinars, après combien de temps disposera-t-on d'une somme égale à 23580 dinars ?
4/ Si au bout de 5 ans la valeur acquise du placement est de 17821 dinars à quel taux le placement a été effectué ?

Solution :

1/ Valeur acquise :
$C_n = C_0 (1 + i)^n$

$C_5 = 10000\ (1 + 0{,}1)^5 = 16105{,}100$ dinars

2/ Valeur actuelle correspondante à une valeur acquise de 20000 dinars.
$C_n = C_0\ (1 + i)^{n} \rightarrow C_0 = C_n\ (1 + i)^{-n}$
$C0 = 20000\ (1 + 0{,}1\ )^{-5} = 12418{,}426$ dinars.

3/ Durée de placement :
$C_n = C_0\ (1 + i)^n \rightarrow \log C_n = \log C_0 + n.\ \log(1+i) \rightarrow n= [\log C_n - \log C_0/ \log(1+i)]$
$n= [\log 23580 - \log 10000/\log (1+0{,}1)] = 9 \ \rightarrow \quad n=9$ans

4/ Taux de placement
$C_n = C_0\ (1 + i)^n \rightarrow (1+i)^n = C_n/C_0 \rightarrow i= (C_n/C_0\ )^{n/1} - 1 \rightarrow i = (17821/10000)^{1/5} - 1 = 0{,}1225.$
i= 12, 25%

3. <u>Calculs de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de périodes non entier</u>

Dans la construction de la formule générale $C_n = C_0\ (1 + i)^n$, nous avons considéré n comme un entier de période.
Dans le pratique n peut être un nombre fractionnaire (par exemple : 5 ans et 4 mois, n = 5 + 4/12). Dans le cas où n est fractionnaire, il est envisagé deux solutions possibles :

1- utiliser la formule générale $C_n = C_0\ (1 + i)^n$ pour la partie entière, et utiliser les intérêts simples pour la partie fractionnaire. Cette solution est appelée solution rationnelle.
2- Utiliser la formule générale $C_n = C_0\ (1 + i)^n$ de la manière que si n était entier. C'est la solution commerciale.

La solution rationnelle : on pose n = k+ p/q

Pour la partie entière de n, la valeur acquise est $C_k = C_0\ (1 + i)^k$
$C_k \times i \times p/q = C_0\,(1+i)^k \times i \times p/q$
$C_n = C_0\ (1 + i)^k + C_0\,(1+i)^k \times i \times p/q = C_0\,(1+i)^k \times [1+ (i \times p/q)]$

<u>Exemple:</u>
Calculer en utilisant la solution rationnelle, la valeur acquise par capital de 40 000 DA placé à intérêts composés au taux de 6% pendant 5 ans et 7 mois.
La valeur acquise est :

C_5 = 40 000 $(1{,}06)^5$. (1+ 0,06. 7/12)= 55402,53 DA.

La solution commerciale :
$C_n = C_0\,(1+i)^n\,(1+i)^{p/q}$
Il s'agit d'étendre l'utilisation de la formule générale au cas où n est fractionnaire.

Exemple : (reprise de l'exemple précédent)
C_5 = 40 000 $(1{,}06)^5\,(1{,}06)^{7/12}$= (1,338225)(1,034574) = 55 379,71 DA

4. Les taux équivalents

Les taux d'intérêt sont généralement exprimés en taux annuels. Mais, on peut considérer une période plus courte que l'année, par exemple, le semestre, le trimestre le mois ou le jour. De même, les intérêts peuvent être capitalisés chaque semestre, chaque trimestre, chaque mois ou chaque jour. Ainsi, lorsque le taux d'intérêt est annuel et l'on considère une période inférieure à l'année, le taux d'intérêt prévalant pour cette période devra être calculé.
Un taux i_k, correspond à une période k fois plus petite que l'année, est équivalent à un taux annuel i si, pour un même capital placé, la valeur acquise au terme des k.n périodes est égale à celle obtenue au taux i à la fin de n années de placement.
Soit :

C_0 : le capital initialement placé ; i : le taux annuel d'intérêt ;
i_k : le taux d'intérêt relatif à une subdivision périodique k fois plus petite que l'année avec : k=2 (si la subdivision est le trimestre) ; k=4 (si la subdivision est le trimestre) ;
k=12 (si la subdivision est le mois).
Ainsi:

$$C_n = C_0\,(1+i)^n = (1+i_k)^{kn} \rightarrow i = (1+i_k)^k - 1$$
$$\rightarrow i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

Exemple :
Calculer le taux mensuel ; trimestriel et semestriel équivalents au taux annuel de 5%.
Taux mensuel équivalent (k=12):
$i_{12} = (1{,}05)^{1/12} - 1$=0,004074, soit 0,407%.
Taux trimestriel équivalent (k=4)
$i_4 = (1{,}05)^{1/12} - 1$ = 0,02272 soit 1,23% ;
Taux semestriel (k=2) :

$i_2 = (1,05)^{1/2} - 1 = 0,024695$ soit 2,47%.

5. Capitalisation fractionnée et taux nominal

Le taux nominal est un taux d'intérêt qui est toujours exprimé sur une base annuelle mais qui ne prends pas en considération l'ajout des intérêts composés.
Considérons une capitalisation par 1/k d'année.
On pose: $j_k = k \times i_k$
Le taux j_k est le taux annuel proportionnel au taux im par période 1/k d'année.
Contrairement au taux $i = (1 + i_k)^k - 1$ qui est un taux annuel effectif, le taux j_k est un taux annuel purement nominal. j_k est le taux annuel nominal en cas de capitalisation par k-ième, correspondant au taux annuel effectif i.
L'appellation de taux nominal se réfère au fait qu'il s'agit d'une valeur théorique qui correspond à une définition donnée a priori, mais non toujours à la réalité économique.
On a:
$j_k = k[(1 + i)^{1/k} - 1]$
Soit:
$i = (1 + j_k/k)^k - 1$

Exemple.
1- Si $i_{12} = 1\%$ alors $j_{12} = 12 \times 1\% = 12\%$. j_{12} est le taux annuel nominal en cas de capitalisation mensuelle. Le taux annuel effectif équivalent est :
$i = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12,68\%$
2- Dans un acte de prêt hypothécaire, on lit que « l'intérêt est de 10% payable par trimestre ».
Quel est le taux d'intérêt annuel effectif ?
Quel est le taux d'intérêt nominal ?
Quel est le taux d'intérêt trimestriel ?
La clause signifie que le taux d'intérêt est de 2,5% par trimestre : $i_4 = 2,5\%$.
10% est donc un taux nominal : $j_4 = 10\%$.
Le taux d'intérêt annuel effectif est donc : $i = (1 + 2,5\%)^4 = 10,38\%$ et non de 10%.
Le taux effectif est donc supérieur au taux nominal (sauf si $m < 1$, en cas de capitalisation biennale par exemple).

Récapitulation des différents taux d'intérêts selon un taux de 12%.

fréquence	Répétition par année (m)	Taux d'intérêt nominal J_m	Taux proportionnel	Taux d'intérêts effectif annuel
Annuelle	1	12%	12 ,000%	12,000%
Semestrielle	2	12%	6,000%	12,360%
Trimestrielle	4	12%	3,000%	12,550%
mensuelle	12	12%	1,000%	12,683%
Quotidienne	365	12%	0,033%	12,747%

Si le taux nominal est 12%, le taux annuel effectif est : 12% avec capitalisation annuelle 12,36% avec capitalisation semestrielle, etc.

6. Valeur actuelle d'un capital placé pendant un nombre entier de périodes

L'actualisation est l'opération inverse de la capitalisation. Elle permet de déterminer la valeur acquise d'un capital C_n à une période quelconque, antérieure à la date n ou ce capital doit être payé.

$$\mathbf{C_0 = C_n (1+i)^{-n}}$$

Exemple :

Quelle est la valeur actuelle au taux de 9%, d'une somme de 60 000 DA payable dans 12 ans.

$C_0 = C_{12} (1+i)^{-12}$ =60 000 $(1,09)^{-12}$ =60 000 (0,355534)= 21 332,04 DA

L'actualisation connaît une grande application dans le calcul de la rentabilité des investissements. En effet un investissement est généralement décidé à la suite d'une étude technico-économique faisant ressortir, face à la somme décaissée au moment de l'investissement, les flux monétaires que rapporte cet investissement dans le temps.

Exemple :

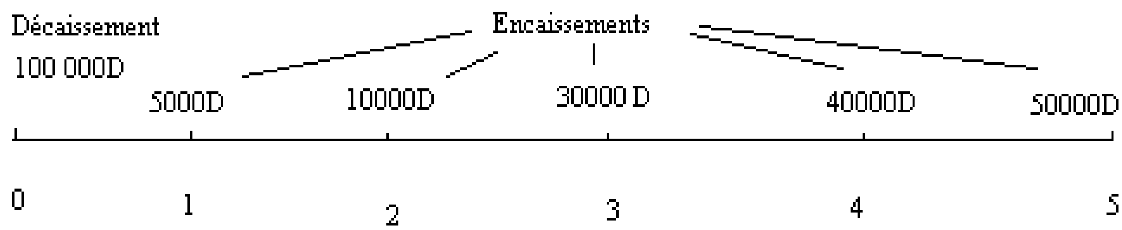
Montant décaissé pour l'investissement en 2000= 100 000 DA.

Calendrier des flux monétaires récupérés à la suite de l'activité.

2001	2002	2003	2004	2005
5000	10000	20000	40000	50000

A la fin de la $5^{ème}$ année, il est supposé que l'investissement prend une valeur nulle et qu'il n'y a pas plus de flux encaissé.

La question posée, est de savoir si au taux de 8% cet investissement est financièrement rentable.



L'actualisation permet d'additionner les flux encaissés chaque année et de comparer la somme obtenue au décaissement réalisé au moment d l'investissement. Elle permet à un taux bien choisi de comparables des sommes encaissées en des périodes différentes.

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5
Valeur initiale	5000	10000	30000	40000	50000
Taux d'actualisation	$(1,09)^{-1}$	$(1,09)^{-2}$	$(1,09)^{-3}$	$(1,09)^{-4}$	$(1,09)^{-5}$
Valeur actualisée	4587,15	8416,79	15443,66	28337	32496,55
Somme actualisée cumulée	-	13003,94	280447,60	56784,60	89281,15

Au taux d'actualisation de 9% cette opération d'investissement n'est pas intéressante financièrement, puisqu'en contrepartie d'un décaissement initial de 100000, il n'est espéré de récupérer que 89281,15 D.

7. L'escompte à intérêts composés

L'escompte à intérêts composés s'applique aux effets dont l'échéance est supérieure à un an. Dans le cas des intérêts simples, l'escompte est obtenu par la différence entre les valeurs nominale et actuelle. Ce principe demeure valable dans le cas des intérêts composés, seul change le mode de calcul de la valeur actuelle.

L'escompte est la différence entre la valeur nominale de l'effet et la valeur actuelle à intérêts composés.

La différence entre les valeurs des escomptes commercial et rationnel est faible dans le cas de l'intérêt simple. L'escompte à intérêts composés est fondé sur des durées très nettement supérieures, de sorte que cette différence est notablement accrue. Dans le cas présent, l'application du principe de l'escompte commercial pénaliserait excessivement le vendeur de l'effet, aussi a-t-on préféré de lui substituer celui de l'escompte rationnel.
Soit :

V : la valeur nominale de l'effet,
E : le montant de l'escompte à intérêts composés,
a : la valeur actuelle de l'effet ; i : le taux de l'escompte,
n : la durée de l'escompte exprimée en année.
Par définition l'escompte est égal à :

$$\mathbf{E = V - a}$$

On a :
$a = V/(1+i)^n = V(1+i)^{-n} \rightarrow$ $\mathbf{E = V[1-(1+i)^{-n}]}$

Exemple:
Déterminer, au taux de 6%, l'escompte et la valeur actuelle d'un billet de fonds payable dans 4 ans et de valeur nominale égale à 500 000 D.
Valeur actuelle : $a = V(1+i)^{-n} = 500000(1+0,06)^{-4} = 396046,83$ D
$E = V - a = 500\,000 - 396046,83 = 103\,953,17$ D

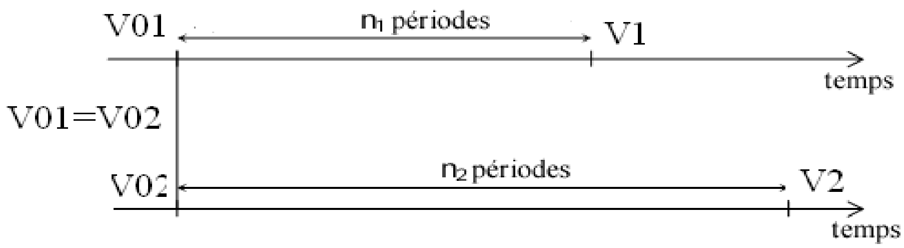
8. Equivalence de capitaux à intérêts composés

Contrairement aux intérêts simples, l'équivalence à intérêts composés se vérifie quelle que soit la date à la quelle elle est établie. En effet, si deux ou plusieurs valeurs actuelles s'égalisent à une date donnée, cette égalité sera de nouveau effective à une date quelconque, pour des valeurs différentes des précédentes.

8.1. Equivalence de deux capitaux

Deux capitaux évalués au même taux sont équivalents si, à une quelconque date, leurs valeurs actuelles à intérêts composés sont égales.
Désignons par :
V_1 et V_2 : les valeurs nominales respectives des capitaux 1 et 2.
n_1 et n_2 : le nombre de périodes au terme desquelles les deux capitaux sont payables ;
i : le taux d'évaluation,
Si l'équivalence s'établie à l'origine, l'instant zéro, l'égalité des valeurs actuelles s'écrit :

$$\mathbf{V_1 (1+i)^{-n1} = V_2 (1+i)^{-n2}}$$



Les problèmes d'équivalence portent généralement sur la recherche des valeurs V_1 ou V_2, n_1 ou n_2.

Exemple :

1- Un débiteur désire rembourser par anticipation dans trois ans, une dette de 50000 D payable dans 6 ans. Déterminer la somme qu'il devra débourser au taux de 10%.

$50000\,(1,1)^{-6} = V_2\,(1,1)^{-3}$

$V_2 = 50000\,(1,1)^{-6} / (1,1)^{-3} = 50000\,(1,1)^{-3} = 37565,74$ D.

2- Un débiteur décide de s'acquitter d'une dette de 20 000D, payable dans 6 ans par un règlement de 16528,93 D. déterminer au taux de 10%, la date à laquelle doit être opéré ce paiement.

$20000(1,1)^{-6} = 16528,93(1,1)^{-n2}$

$-n_2 \log(1,1) = \log 20000 - 6\log(1,1) - \log 16528,93$

$n_2 = [6\log(1,1) + \log 16528,93 - \log 20000]/\log(1,1) = 4$

8.2. Equivalence d'un capital avec la somme de plusieurs autres

Un capital est équivalent à la somme de plusieurs autres si, à une date quelconque, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux.

Désignons :

V : la valeur nominale du capital unique ;

n : le nombre de périodes du terme desquelles le capital unique est payé ;

V_k : la valeur nominale de $k^{ième}$ capital du groupe avec k=1,….,p

n_k : le nombre de périodes au terme desquelles le capital k est payé, avec k=1,…,p

i : le taux d'évaluation

L'équivalence à l'instant zéro entre le capital unique et le groupe de capitaux s'écrit :

$$\mathbf{V\,(1+i)^{-n} = \sum V_k\,(1+i)^{-nk}} \quad \text{(de k=1 jusqu'à p)}$$

Remarque:
Les problèmes fondés sur l'égalité de la valeur actuelle d'un capital unique avec la somme des valeurs actuelles d'un groupe de capitaux, impliquent généralement la recherche de la valeur nominale de ce capital unique, ou parfois de son échéance. Dans ces deux cas de figures, l'échéance, donnée ou à déterminer, est une échéance commune.

Exemple :
Déterminer, au taux de 10%, la valeur nominale d'un paiement unique, échéant dans 7 ans, destiné à remplacer les dettes suivantes :
V_1 = 1000 D n_1 =2 ans ;
V_2 = 2000 D n_2 =4 ans ;
V_3 = 3000 D n_3 =6 ans ;
L'équivalence à l'instant zéro s'écrit :
$V (1,1)^{-7} = 1000(1,1)^{-2} + 2000(1,1)^{-4} + 3000(1,1)^{-6}$
Pour réduire les transformations nécessaires à la résolution de cette équation, cette équivalence peut être exprimée à la date ou l'inconnue n'est ni actualisée, c'est-à-dire à l'instant 7. Les durées doivent être transformées en conséquence.
$V = 1000(1,1)^5 + 2000(1,1)^3 + 3000(1,1) = 7572{,}51$D.

8.3. Cas particulier de l'échéance moyenne

A l'instar du cas similaire développé dans le cadre des équivalences à l'intérêt simple, l'échéance moyenne constitue un cas particulier des problèmes d'échéances communes.

Il s'agit de l'échéance du capital unique dont la valeur nominale est constituée par la somme de celles des capitaux remplacés.
Par définition la valeur nominale du capital unique est égale à : $V = \sum V_k$ (de k=1 à p)

L'équivalence à l'instant zéro s'écrit :

$V (1+i)^{-n^*} = \sum V_k (1+i)^{-nk} \rightarrow$ $\boldsymbol{(1+i)^{-n^*} = \sum V_k (1+i)^{-nk} / V}$

La valeur de n* peut être obtenue à l'aide de l'expression du logarithme:
$-n^* \log(1+i) = \log\sum V_k (1+i)^{-nk} - \log V$

$$\rightarrow \boldsymbol{n^* = [\log V - \log \sum V_k (1+i)^{-nk}]/\log(1+i)}$$

Exemple:
Calculer, au taux de 10%, l'échéance moyenne des capitaux suivants:
V_1= 1000D, n_1 = 2ans, V_2=3107D, n_2 =3ans,
V3= 2000D, n_3= 4ans, V_4 = 3000D, n_4 = 6ans,
$V = \sum V_{k\ (k=1\ à\ 4)} = 1000+3107+2000+3000 = 9107D$
$(1,1)^{-n} = [1000(1,1)^{-2} + 3107(1,1)^{-3} + 2000(1,1)^{-4} + 3000(1,1)^{-6}]/9107 = 6222,23/9107 = 0,683016.$
$n^* = (\log 9107 - \log 6222,23)/\log(1,1) = 3,999$ soit 4 ans.
La distance moyenne entre l'échéance (qui est la moyenne) et la date d'équivalence (l'instant zéro) est 4ans.

8.4. Equivalence de deux groupes de capitaux

Le principe de l'équivalence est ici étendu au cas de deux groupes de capitaux. Le traitement de cet aspect ne présente pas de difficultés formelles majeures. Il semble donc plus indiqué de l'illustrer par un exemple, après avoir rappeler que les interrogations en l'espèce portent généralement sur la valeur nominale ou l'échéance de l'un des capitaux appartenant à l'un ou l'autre des deux groupes. L'exemple développé ci-après est fondé sur la recherche de la valeur nominale.

Exemple :
Un débiteur et son créancier s'entendent pour liquider les dettes suivantes :
V_1= 1000D, n_1 = 2ans, V_2=3107D, n_2 =3ans,
V3= 2000D, n_3= 4ans, V_4 = 3000D, n_4 = 6ans,
Il est convenu que le débiteur procédera à un premier paiement de 5000D dans 3 ans et soldera définitivement cet encours par un second paiement qui doit intervenir deux ans après le premier. Quel doit en être le montant si le taux appliqué est de 6%.
$5000(1,06)^{-3} + V_2(1,06)^{-5} = 1000(1,06)^{-2} + 3107(1,06)^{-3} + 2000(1,06)^{-4} + 3000(1,06)^{-6}$
Ou pour faire l'économie des transformations, l'expression de l'équivalence à l'instant 5, moment auquel V_2 n'est ni capitalisé ni actualisé :
$5000(1,06)^{2} + V_2 = 1000(1,06)^{3} + 3107(1,06)^{2} + 2000(1,06) + 3000(1,06)^{-1}$
V_2 = 4014,23 D.

Exercices

Exercice 1:

1- Calculer la valeur acquise par un capital de 170000 D placé à un taux annuel i =7%, (capitalisation annuelle des intérêts) pendant :
   a- 7 ans,
   b- 6ans et 8 mois.

2- Calculer la valeur acquise par un capital de 12000D placé à intérêts composés pendant 5ans au taux de 8,3%.

3- Une personne souhaite multiplier par 5 le capital de 145000D qu'elle possède, en la plaçant à la CNEP au taux de 10% à intérêts composés. Combien va durer le dépôt ?

Exercice 2:

Deux capitaux dont le total est de 10000 D sont placés : l'un à intérêt simple au taux de 10% et l'autre à intérêt composé au taux de 8%.
Au bout de 9 ans, ils ont la même valeur acquise, calculer les montants respectifs des deux capitaux.

Exercice 3:

Deux capitaux placés pendant trois ans, le premier à intérêt simple au taux de 7% et le second à intérêt composé au taux de 10%. Le premier capital étant supérieur au second de 500 dinars, a acquis la même valeur que celle du second capital.
Calculer les montants des deux capitaux.

Exercice 4:

Comparer le temps nécessaire pour qu'un capital de 20000 D placé à 5% l'an, d'abord à :

- intérêt simple,
- puis à intérêt composé, rapporterai 8142 D.

Exercice 5:

1- Calculer la valeur acquise (A) par un capital de 10000D placé pendant 10 ans, i=5% ;
2- Même question à intérêt simple ;
3- Déterminer en combien de temps la valeur acquise de l'intérêt simple (B) sera égale à celle de A ;
4- Représenter sur un même graphe A et B pour n=20 ans ;
5- Au bout de combien de temps la valeur acquise à intérêt composé sera égale à B.

6- A quel taux un capital de 10000D placé à intérêt simple atteindra –t-il en 10 ans la valeur de A ;

Exercice 6:

Une personne place à intérêt composé une somme de 20000 D au taux i et une somme de 50000 D à un taux i'. Elle dispose après 4 ans (les taux sont annuels et la capitalisation est annuelle), capitaux et intérêts réunis, d'une somme de 109199,13 D. Si le capital de 20000D a été placé au taux i' et le capital de 50000D au taux i, le total des deux valeurs acquises aurait été de 112159,56D. Calculer les deux taux i et i'.

Exercice 7:

Un capital de 100 000 D placé à intérêts composés, à un certain taux, a produit pendant la 5ème année de placement un intérêt égal à celui qu'il aurait produit à intérêts simples, au même taux en 427 jours (année de 365 jours)

1- Trouver le taux de placement ;
2- Calculer les intérêts produits au bout de 10 ans de placement ;
3- A quel taux aurait-il fallu placer ce capital à intérêts simples pour rapporter ces mêmes intérêts pendant le même laps de temps ?

Exercice 8 :

Une personne place 100000D, le 1er janvier d'une année. Deux ans après la date du placement, elle retire 20000D. Quatre ans après le placement, elle retire le solde ; à celui elle ajoute 11,875D. Elle dispose alors de 94000D.
Calculer le taux annuel du placement à intérêts composés.

Exercice 9:

Un épargnant dépose dans une banque 500D la 1er janvier 2000, 1000 D la 1er janvier 2001, et enfin 1300D le 1er janvier 2002. Les calculs sont fait à intérêts composés au taux annuel i=4%. Si le dépôt dure au moins 4 ans, l'épargnant a droit à une prime en fin de la période, nette de tous impôts, égale à l'intérêt acquis. Le compte est liquidé six ans après le premier dépôt.

1- Calculer le montant des intérêts acquis ;
2- Calculer la valeur acquise à la date 6 ;
3- Définir et calculer un taux réel de rendement.

Exercice 10:

Une somme a été placée à intérêts composés au taux de 4%, puis au cours de ce placement le taux est passé à 5%. Au bout de 10 ans de placements, le capital s'est accru de 50% de sa valeur nominale. Déterminer en combien de temps le taux a été modifié ?

Exercice 11:

Un investissement de 300 000D est prévu pour le 1er mars 2007. Cette dépense est susceptible d'engendrer une récolte de 200 000D qui serait perçue à la date de 1er mars 2010, et une recette de 200 000 D qui serait encaissée de 1er mars 2011.

1- compte tenu du taux d'actualisation de 9%, la dépense envisagée est-elle opportune ?
2- même question si le taux d'actualisation était de 8,5%.
3- en utilisant les résultats des deux questions précédentes, déterminer le taux d'intérêt pour lequel on n'aurait pas plus de raison d'envisager l'investissement que de l'écarter.

Exercice 12:

Une personne place au 1/1/N, une somme de 12000D à intérêts composés, 2ans après, elle retire 8000D, 2 ans après ce retrait, elle dispose d'un avoir de 6160,92D.

1- A quel taux les intérêts ont-ils été calculés ?
2- Quel est le taux semestriel proportionnel ?
3- Quel est le taux équivalent ?
4- A quel taux à intérêts simples, cette personne devrait –elle placer la somme de 12000D pour obtenir 4 ans après, sans retrait la somme de 15000D ?

Exercice 13:

Un capital de 300 000 dinars placé dans une banque rapporte des intérêts semestriels de 12000 dinars.

1) Quel est le taux annuel équivalent de ce placement ?
2) Si ce capital a été placé au taux annuel de 7 %, quel est le montant des intérêts trimestriels versés ?
3) Si le taux annuel annoncé par la banque est de 9 % et qu'en réalité les intérêts sont versés mensuellement au taux proportionnel, quel est le taux annuel équivalent ?

Exercice 14:

Deux capitaux C_1 et C_2 dont le montant total s'élève à 80 000 dinars sont placés le même jour pour une durée de 6 ans, à intérêt composé.

Le capital C_1 est placé au taux annuel de 8 %, capitalisation annuelle des intérêts.
Le capital C_2 est placé au taux semestriel de 3,75 %, capitalisation semestrielle des intérêts. Au bout des 6 ans, le total des intérêts produits s'élève à 46 007,320 dinars. Calculer C_1 et C_2

Exercice 15:

Une personne qui doit régler une dette par deux versements l'un de 2000 D dans 6 ans et l'autre de 2000 D dans 12 ans, propose de se libérer immédiatement par un versement unique de 2606,104 D, à quel taux les calculs sont-ils faits ?

Exercice 16:

Une personne place 50000D, le 1er janvier d'une année. Deux ans après la date du placement, elle retire 40000D. Quatre ans après le placement, elle retire le solde ; à celui elle ajoute 631,55D. Elle dispose alors de 22000. Calculer le taux annuel du placement à intérêts composés.

Exercice 17:

Deux capitaux dont le total est de 10000 D sont placés : l'un à intérêt simple au taux de 10% et l'autre à intérêt composé au taux de 8%. Au bout de 9 ans, ils ont la même valeur acquise, calculer les montants respectifs des deux capitaux.

Exercice 18:

Une personne place en banque le 31/12/N, une somme de 5000D, puis le 31/12/N+1 une somme de 2500D. Ces placements sont effectués à intérêts composés. A la fin de cette seconde année, le solde de son compte bancaire s'élève à 8137,5D, compte tenu des intérêts capitalisés annuellement.

Quel est le taux d'intérêt utilisé. Cette personne prélèvera la totalité de son solde et le partage entre ses trois enfants de sorte que les parts soient en progression géométrique décroissante de raison 0,8. Calculer la part de chaque enfant.

Exercice 19:

On place aujourd'hui 4000 dinars à intérêt composé au taux annuel de 5,2%. Au terme du placement, on dispose de 6000 dinars.

1) Déterminer la durée du placement, n.
2) Calculer l'intérêt de l'année (n–2).
3) Calculer l'intérêt total produit au bout de (n –2) années de placement.
4) Déterminer la valeur acquise par ce capital au bout de (n–2) années de placement

Exercice 20:

Un capital de 20000D est placé pendant 8 ans au taux effectif de 9%.

1- Quelle est sa valeur acquise au bout des 8 ans.
2- Quels sont les intérêts produits pendant cette période.
3- Calculer les intérêts de la 8ème année.

4- Au bout de combien de temps le capital initial aura-t-il doublé sa valeur.
5- Calculer le taux équivalent semestriel du taux effectif 9% puis le taux trimestriel proportionnel.

Exercice 21:
un capital C est placé à intérêts composés au taux annuel i, pendant n années. Sachant que :
- les intérêts produits au cours de la 3eme année s'élèvent à 2205 D.
- les intérêts produits au cours de la 4eme année s'élèvent à 2315,25 D.
- les intérêts produits au cours des n années s'élèvent à 2515,30 D.

Calculer : C, i et n.

Exercice 22:
Un père de famille dispose d'une somme de 100 000 D. il la partage actuellement entre ses trois enfants âgés de 5ans, 9ans et 11ans. Ces parts sont placés dans une caisse d'épargne qui sert un intérêt annuel de 6,5%. Calculer ces trois parts de manière que les trois enfants disposent du même capital à leur majorité. Calculer ce capital.

Exercice 23 :
Une banque déclare dans un prospectus publicitaire, « *votre capital placé pendant 6 ans augmente de 60,9% et placé pendant 12 ans, il augmente de 222,5%* ». Ces deux informations, vous paraissent –elles compatibles ?

Exercice 24:
On place un capital initial V_o à la date zéro à intérêts composés pendant 10 ans. Le taux d'intérêt est progressif : il est égal à i_1 = 4% pendant les 3 premières années, à i_2 = 5% pendant les 3 années suivantes, à i_3= 6% pendant les quatre dernières années.
1- calculer, en fonction de V_o, la valeur acquise V_{10}.
2- Définir et calculer un taux moyen t ;
3- Répondre aux questions précédentes sachant qu'il y a, en fin de période, un prélèvement fiscal sur les intérêts acquis de 33,33%.

Exercice 25: Un épargnant effectue différents placements. Il place 1000D au taux i_1=4%, 2000D au taux i_2=4,75% et 5000D au taux de i3=6%. Tous ces placements durent six ans.
- Calculer les valeurs acquises à la date 6.
- Définir et calculer un taux moyen de rendement ;

- Répondre aux mêmes questions dans le cas où chacun des trois placements bénéficie d'une prime supplémentaire égale à 5% du placement initial.

Exercice 26:

Un individu achète un fonds de commerce estimé à 150 000 D, il paye 30000 D a comptant et s'engage a payer le reste par 8 versements annuels égaux, le premier ayant lieu dans deux ans après l'acquisition.

- le taux annuel étant de 5%, calculer le montant de chacun de ces versements ;
- après avoir payer le troisième versement, le commerçant obtient de s'acquitter par 6 versements à terme échu (chaque fin d'année), mais à un taux supérieur, sachant que chaque versement est égal à 17093,2 D, calculer le nouveau taux.

Exercice 27

- Une personne dépose aujourd'hui une certaine somme dans un compte rémunéré au taux i = 8% par année. Deux ans après, il dépose une autre somme double de la première. Dans 5 ans, les sommes ont acquis un intérêt global de 3000 D. Déterminer le montant des sommes placées.
- Sachant que la valeur actuelle de 1500D D payable dans 5 ans au taux nominal d'intérêt j capitalisé à tous les semestres est égale à la valeur actuelle de 1800D payable dans 7 ans au taux nominal d'intérêt j capitalisé à tous les semestres, déterminer la valeur accumulée si nous plaçons 5000D pendant 9 ans au taux effectif d'intérêt 1,2 fois le taux effectif d'intérêt équivalent au taux nominal d'intérêt j.

Exercice 28:

Une personne doit rembourser un prêt auprès d'une banque en faisant 4 versements: 1000 D dans un an, 1500 D dans 2 ans, 2000 D dans 3 ans et 2000 D dans 3,5 ans.

- Si le taux nominal d'intérêt est i = 5% capitalisé tous les trimestres, quel est le montant qu'il a emprunte à la banque?
- S'il a emprunté 5500 D, déterminer le taux nominal i d'intérêt capitalisé tous les six mois pour ce prêt.
- Si le taux nominal d'intérêt est i= 4,5% capitalisé tous les mois et que deux mois après son deuxième versement, cette personne veut complètement rembourser son prêt, quel doit être le montant à verser à la banque?

Exercice 29: Une personne a contracté un prêt auprès d'une banque. Il rembourse son prêt en faisant 3 paiements : Le premier au montant de 5000D fait un an après le prêt, 7000D fait un an et demi après le prêt et 3000D fait trois ans après le prêt. Le taux d'intérêt annuel effectif pour ce prêt est i = 10,25% capitalisé à tous les six mois.

1- Déterminer le montant que la banque a prêté à cette personne.
2- Si après avoir fait son premier paiement de 5000D, cette personne renégocie son prêt avec la banque de façon à n'avoir plus qu'un seul paiement de X D à faire 4 ans après le prêt. Le taux d'intérêt demeure inchangé. Quel doit être ce dernier paiement X?

Exercice 30:

Une personne doit encaisser, le 15 janvier 2020, une créance de 1000 000 D, le 15 janvier 2004 elle vend son titre de créance contre une somme payable au comptant et représentant une valeur actuelle, à intérêt composés, et au taux annuel de 9%, de la créance qu'elle devait encaisser le 15 janvier 2020. la somme ainsi obtenue est investie immédiatement dans un placement à intérêt composés à 10% l'an jusqu'au 15 janvier 2020.

a- quel capital la personne obtiendra-t-elle le 15 janvier 2020 ?
b- déterminer à quelle date elle disposerait 1000 000 D ?
c- quel prélèvement pourrait-elle effectuer sur la somme encaissée le 15 janvier 2004 pour que le solde, placé dans les conditions indiquées, lui procure 1000 000 D le 15 janvier 2020 ?
d- en utilisant les résultats des trois questions précédentes, apprécier l'opportunité de l'opération effectuée le 15 janvier 2004.

Exercice 31:

X a bénéficié d'un prêt auprès d'une banque au taux nominal de 8% capitalisé semestriellement. Il rembourse son prêt en faisant 4 paiements: le premier au montant de 30 000D fait deux ans après le prêt; le second au montant de 20 000D fait un an après le premier paiement, le troisième au montant de 10 000D fait un an après le deuxième paiement et le dernier au montant de 5 000D fait un an après le troisième paiement.

1- Déterminer le montant que la banque a prêté à X.
2- Si après avoir fait son $2^{ème}$ paiement, X renégocie son prêt avec la banque de façon à n'avoir plus qu'un seul paiement à faire dans trois ans, quel doit être ce dernier paiement?

3- Si au lieu de faire quatre versements totalisant 65 000D comme ci-dessus, X faisait un seul paiement de 65 000D, à quel moment doit-il faire ce paiement pour rembourser son prêt?

Exercice 32:

Trois capitaux égaux et placés à intérêts composés pendant 3 ans, aux conditions suivantes :

- 1^{er} capital : taux annuel 10% (capitalisation annuelle)
- $2^{ème}$ capital : taux semestriel 5% (capitalisation semestrielle)
- $3^{ème}$ capital : taux trimestriel 2,5% (capitalisation trimestrielle)

1- A u bout de 3 années de placement, les intérêts produits par les deux premiers capitaux présentent une différence de 272,87D. calculer la valeur commune des trois capitaux.
2- Calculer la différence entre intérêts produits par les placements, des deuxième et troisième capitaux.
3- A quel taux d'intérêts simple, le premier capital devrait –il être placé pour avoir, après 3 années de placements, la valeur acquise à intérêt composés ;
4- Au bout de combien de temps le premier capital placé à intérêts simple au taux annuel de 10% donnerait une valeur acquise du même capital, placé à intérêts composés au même taux annuel de 10% pendant 4 ans.

Exercice 33:

Une personne « A » emprunte une somme V_0 de « B ». « A » remboursera ce prêt en versant V_1=10000 dinars à la fin de la $1^{ème}$ année, V_2=30000 dinars à la fin de la $2^{ème}$ année et V_3=20000 dinars à la fin $3^{ème}$ année. Le taux d'intérêt composé de ce prêt est 8% par année.

1- Déterminer le montant de V_0.

2- Si pour rembourser ce prêt « A » faisait un seul paiement de 60000 dinars, a quel moment doit-il faire ce paiement (pour que le taux d'intérêt reste inchangé)?

3- Si le taux d'intérêt du prêt est le taux nominal d'intérêt J = 8% capitalisé à tous les trimestres et « A » rembourse ce prêt en faisant un paiement de 2X dinars 2 ans après le prêt et X dinars 3 ans après le prêt. Déterminer X.

4- Si après le versement de V_1, « A » envisage de s'acquitté immédiatement de V_2 et V_3 par un paiement unique. Quel doit être le montant de ce paiement.

LES ANNUITES

1. Définitions et caractéristiques

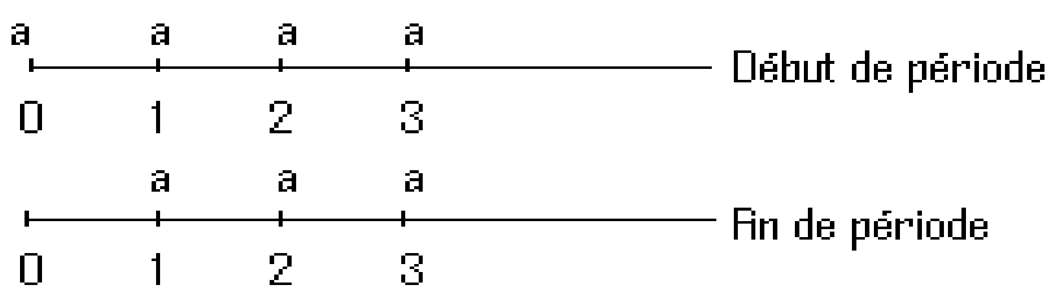
On appelle annuités une suite de versements perçus ou réglés à intervalles de temps réguliers.
Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».
Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période. Les versements effectués ont pour but :

- constituer un capital, il s'agit d'annuités de placement (versement en début de période) ou de capitalisation (versements en fin de période) ;
- rembourser une dette, c'est le cas des annuités de remboursements ou d'amortissements.

L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.
Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.
Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

2. Les annuités constantes

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.



2.1. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de fin de période désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.

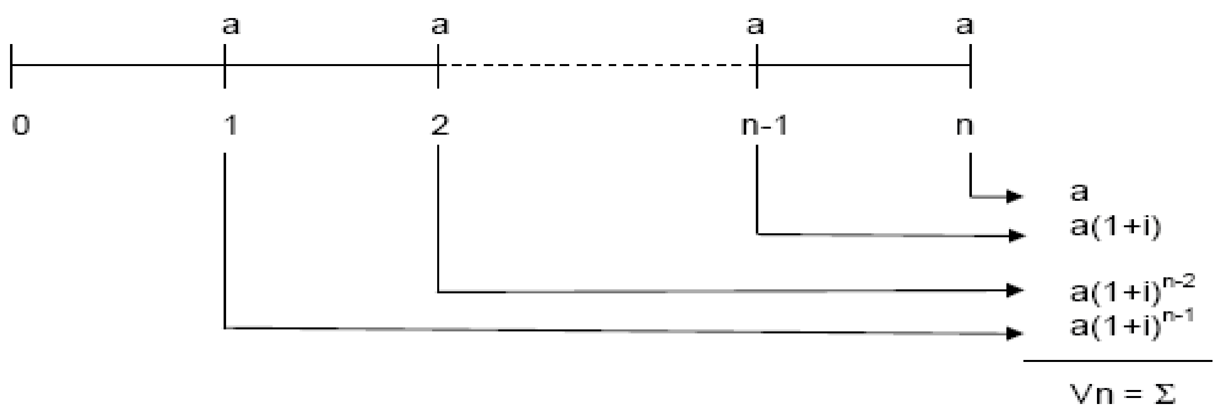
Désignons par :

a: le montant constant de l'annuité ;

n : le nombre d'annuités(de périodes) ;

i : le taux d'intérêt ;

V_n : la valeur acquise par la suite d'annuités au terme de la dernière ;



On a alors:

$V_n = a + a\,(1+i) + a\,(1+i)^2 + \ldots + a\,(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$

$V_n = a\,[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\,]$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$V_n = a\,[((1+i)^n -1)/(1+i) -1]$

$$\mathbf{V_n = a\,[(1+i)^n -1/i]}$$

Le terme $(1+i)^n -1/i$ est fourni par la table financière n°3.

Exemple :

Une personne place 5000 D chaque année pendant 8 ans. Ces versements sont capitalisés au taux de 7%. Déterminer le capital constitué au terme du dernier versement.

$V_8 = 5000[(1,07)^8 -1/0,07]= 51299,01D.$

2.2. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période est la somme des annuités actualisées exprimée à la date origine (une période avant le premier versement).

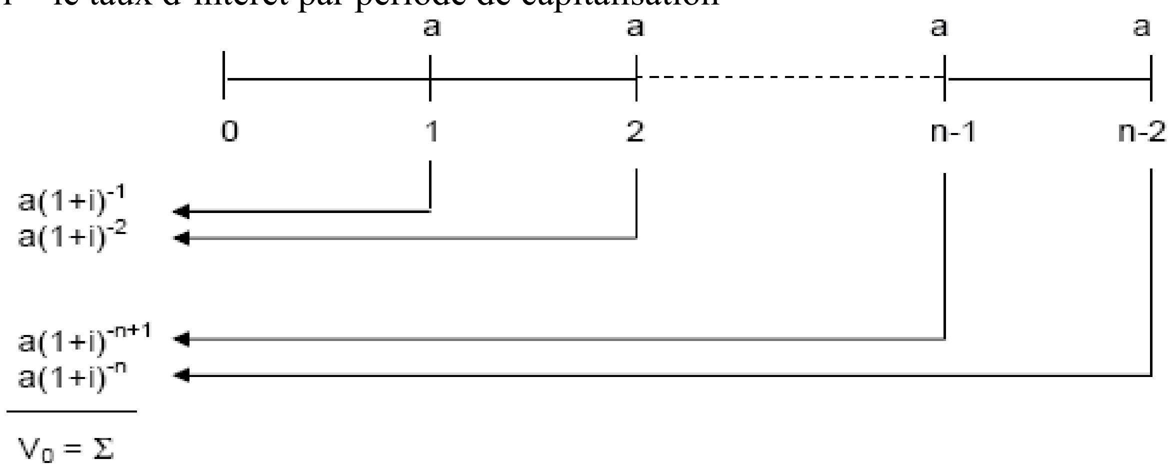
Soit :

V_0 = la valeur actuelle par la suite des annuités

a = l'annuité constante de fin de période

n = le nombre de périodes (d'annuités)

i = le taux d'intérêt par période de capitalisation



Alors:

$V_0 = a\ (1+i)^{-1} + a\ (1+i)^{-2} + \ldots + a\ (1+i)^{-n+1} + a\ (1+i)^{-n}$

On a donc une suite géométrique de premier terme a $(1+i)^{-1}$, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$V_0 = a\ (1+i)^{-1}\ [(1+i)^{-n}-1/\ (1+i)^{-1} - 1]$

$$\mathbf{V_0 = a\ [1-(1+i)^{-n}\ /i]}$$

Le terme $1-(1+i)^{-n}/i$ est fourni par la table n°4.

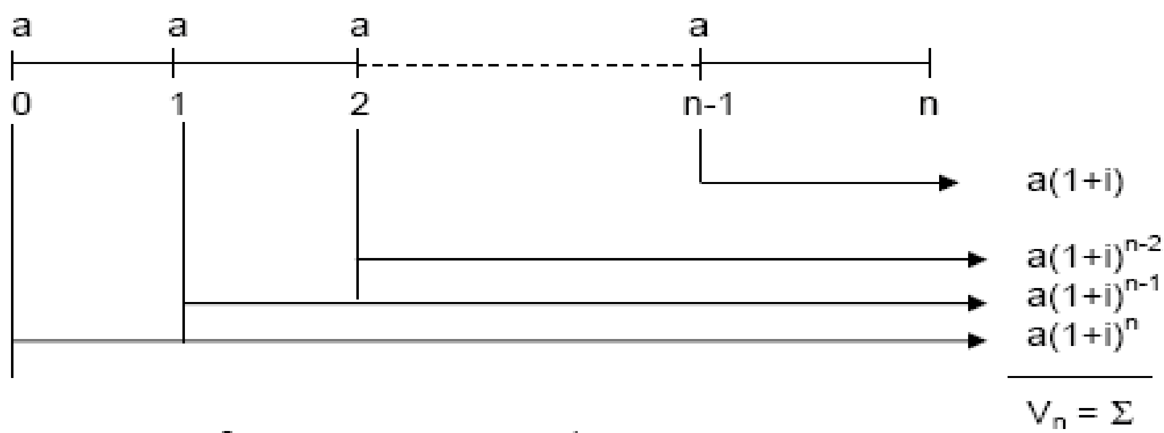
Exemple :

Le bénéficiaire d'une créance représentée par 10 annuités, égales chacune à 1500D, a besoin de trésorerie immédiate. Il escompte au taux de 12%. Quelle somme recevra-t-il en échange ?

V_0 =1500[1-(1,12)$^{-12}$ /0,12]=1500 ×5, 650223=8475,33D.

2.3. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de placement

La valeur acquise par la suite d'annuités est égale à la somme des valeurs acquises par les versements successifs.



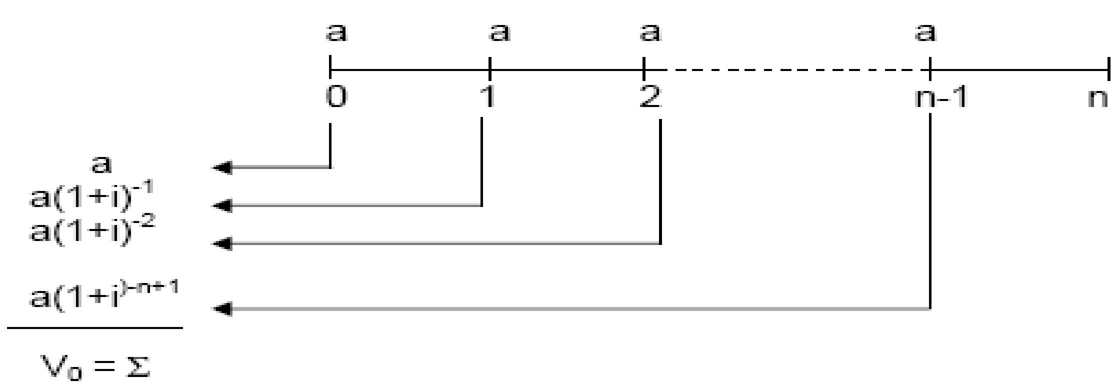
$V_n = a\,(1+i) + a\,(1+i)^{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a\,(1+i)^{n-1} + a\,(1+i)^{n}$

On a donc une suite géométrique de premier terme a(1+i), de raison géométrique q= (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$\mathbf{V_n = a(1+i)[\,(1+i)^n - 1\,/i]}$$

2.4. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de placement

Pour actualiser une suite d'annuités constantes de fin de période, on s'est placé à l'époque zéro, c'est- à –dire au moment de la signature du contrat, c'est- à dire aussi, une période avant le premier versement. Pour actualiser les annuités de début de période, on se place à l'époque zéro, celle qui correspond au premier versement.



$V_0 = a + a\,(1+i)^{-1} + a\,(1+i)^{-2} + \ldots + a\,(1+i)^{-n+1}$

On a donc une suite géométrique de premier terme a, de raison géométrique q= $(1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$V_0 = a\,[(1+i)^{-n} -1 / (1+i)^{-1} -1]$

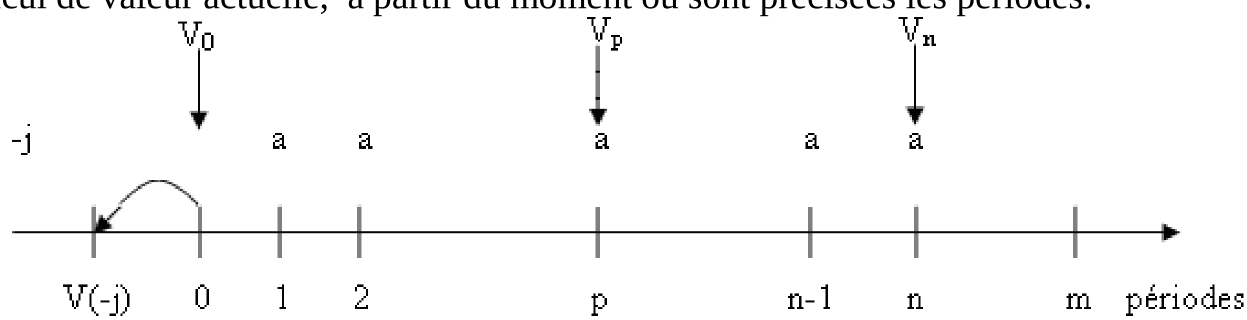
$$\mathbf{V_0 = a\,(1+i)\,[1- (1+i)^{-n} /i]}$$

2.5. Evaluation d'une suite d'annuités constantes à une date quelconque

La notion d'équivalence s'applique également aux suites d'annuités. L'évaluation à une date quelconque implique là encore le recours aux principes d'actualisation et de capitalisation.

2.5.1. Représentation graphique du problème

Il est possible d'évaluer une suite d'annuités constantes à n'importe quelle époque. Le problème se résumant soit à une opération de calcul de valeur acquise, ou de calcul de valeur actuelle, à partir du moment où sont précisées les périodes.



2.5.2. Formalisation

a) Evaluation à l'époque m (m>n) :

La valeur acquise à l'époque (m) serait :

$V_m= V_n\,(1+i)^{m-n}$ ou $V_m = V_0\,(1+i)^m$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbf{V_m = a\ [1-(1+i)^{-n}/i]\ (1+i)^m}$$

b) Evaluation à l'époque p (o<p<n) :

En partant de V_0, V_0 sera capitalisé pendant p périodes :

$$\mathbf{V_p = V_0\ (1+i)^p = a\ [1-(1+i)^{-n}/i]\ (1+i)^p}$$

En partant de V_n , V_n sera actualise pendant (n-p) périodes:

$$V_p = V_n\ (1+i)^{-(n-p)} = a\ [(1+i)^n -1/i](1+i)^{-(n-p)}$$

$$\mathbf{V_p = a\ [1-(1+i)^{-n}/i]\ (1+i)^p}$$

c) Evaluation à l'époque (j); (j<0) :

A partir de V_0 :

$$\mathbf{V_{-j} = V_0\ (1+i)^{-j} = a\ [1-(1+i)^{-n}/i]\ (1+i)^{-j}}$$

A partir de V_n:

$$V_{-j} = V_n\ (1+i)^{-(n+j)} = a\ [(1+i)^n -1/i]\ (1+i)^{-n}\ (1+i)^{-j}$$

$$\mathbf{V_{-j} = a\ [1-(1+i)^{-n}/i]\ (1+i)^{-j}}$$

L'évaluation peut avoir lieu à n'importe quelle époque; connaissant le point de départ, et le point d'arrivée, en utilisant soit le calcul de la valeur acquise, soit le calcul de la valeur actuelle, soit les deux à la fois.

Exemple :

Une suite comporte 8 annuités de fin de période de 4000D chacune. Evaluer sa valeur au taux de 10% :

- 4 périodes avant le premier versement ;
- Au terme de la 5ème annuités ;
- 3 périodes après le dernier versement ;

Détermination des valeurs actuelle et acquise :

$V_0 =$ a $[1-(1+i)^{-n}/i] = 4000\ [1-(1,10)^{-8}/0,10] = 21\ 339,70$ D;
$V_n =$ a $[(1+i)^n -1/i] = 4000[(1,10)^{-8} – 1/0,10] = 45\ 743,55$ D;

Evaluation de la suite d'annuités:

Dates d'évaluation	Evaluation fondée sur la valeur actuelle	Evaluation fondée sur la valeur acquise
4 périodes avant le 1er versement	Soit 3 périodes avant l'origine. $V_{-3} = V_0\ (1+i)^{-3}$ =21 339,70(1,10) $^{-3}$ =16 032,83D	Soit 11 périodes avant le terme. $V_{-3} = V_8\ (1+i)^{-11}$ = 45742,55(1,10) $^{-11}$ =16032,83D
Au terme de la 5ème annuité	Soit 5 périodes après l'origine. $V_5 = V_0\ (1+i)^{5}$ = 21339,70(1,10) ^{5} = 34367,80D	Soit 3 périodes avant le terme. $V_5 = V_8\ (1+i)^{-3}$ = 45743,55(1,10) $^{-3}$ =34367,80D.
3 périodes après le dernier versement	Soit 11 périodes après l'origine. $V_{11} = V_0\ (1+i)^{11}$ = 21339,70(1,10) ^{11} = 60884,65D	Soit 3 périodes après V_8. $V_{11} = V_0\ (1+i)^{3}$=45743,55(1,10)^{3} =60884,66D.

Remarque :
Evaluation de la suite d'annuités 4 périodes avant le premier versement : si l'on procède à l'évaluation à partir de la valeur actuelle, cela signifie que la valeur à déterminer précède de 3 périodes seulement la date originale, celle-ci étant par définition antérieure d'une période au premier versement.

Qu'elle soit fondée sur la valeur actuelle ou la valeur acquise, l'évaluation produit le même terme (au centième près) dans les deux cas.

2.6. Remplacement d'une suite d'annuités constantes

2.6.1. Remplacement d'une suite d'annuités constantes par une autre

Une suite d'annuités constantes peut être remplacée par une autre si, pour un taux d'intérêt donné et à une date quelconque, leur équivalence est établie. A l'époque zéro, l'équivalence est exprimée par l'égalité des valeurs actuelles des deux suites.
$V_0 = V'$

$$\mathbf{a[1-(1+i)^{-n} /i] = a'\ [1-(1+i)^{-m} /i]}$$

Les applications relatives au remplacement d'une suite d'annuités posent généralement le problème de la détermination des valeurs a' et m.

2.6.2. Remplacement d'une suite d'annuités par un versement unique : cas général de l'échéance commune

Dans le cas présent, la nouvelle suite d'annuités constantes est réduite à un seul terme, qui sera désigné par *U*. Le nombre de périodes au terme desquelles *U* est payé sera noté *u*.

$$U\ (1+i)^{-u} = a\ [1-(1+i)^{-n} / i]$$

Les applications traitant de ce cas impliquent la détermination de la valeur de *U*. si celui –ci est connu, **la valeur de u cherchée correspond à l'échéance commune des annuités constantes de la suite initiale.**

2.6.3. Cas particulier de l'échéance moyenne d'une suite d'annuités constantes

A l'instar du cas précédent, la nouvelle suite ne comporte qu'un seul terme. Dans le cas présent, ce terme est constitué par la somme des annuités constantes de la suite initiale.
L'équivalence à l'époque zéro s'écrit :

$U\ (1+i)^{-u} = a\ [1-(1+i)^{-n} / i]$

Avec : $U = n.a$
D'où:

$n.a\ (1+i)^{-u} = a\ [1-(1+i)^{-n} / i] \rightarrow n\ (1+i)^{-u} = [1-(1+i)^{-n} / i]$

L'échéance moyenne u s'obtient à partir de:

$$(1+i)^{u} = n\ [i/1-(1+i)^{-n}\ ]$$

La valeur de *u* est indépendante de celle de l'annuité constante de la suite initiale (a).
La valeur de $i/1-(1+i)^{-n}$ est donnée par la table financière n°5.

Exemple :
Un débiteur engagé initialement par le remboursement de 10 annuités constantes de 8000 D envisage d'acquitter sa dette soit par :

- le versement de 12 trimestrialités constantes,

- un versement unique de 80000D,

Déterminer, au taux annuel de 10% :

- le montant de chaque trimestrialité,
- l'échéance du versement unique
-

Montant constant des trimestrialités.

La détermination de ce montant nécessite le recours à un taux trimestriel équivalent au taux annuel de 10%

$i= (1+i)^{1/4} -1= (1,10)^{1/4} -1 = 0.0241137.$

Egalisons à présent les valeurs à l'instant zéro de la suite initiale de 10 annuités constantes de 8000 D et de la nouvelle suite de 12 trimestrialités de T dinars chacune.

$T[1-(1,0241137)^{-12} / 0,021137]= 8000[1- (1,10)^{-10} /0,10] = 4766,45D$

Echéance du versement unique de 80000 D :

Le montant de ce versement est égal à la somme des annuités constantes de la suite initiale. L'échéance à déterminer est donc l'échéance moyenne.

$(1+i)^{-u} = n [i/1-(1+i)^{-n}] \rightarrow (1,10)^{u} = 10[0,10 / 1- (1,10)^{-10}] = 1,627454$

u= log 1, 627454/log (1, 10) =5, 11

Le versement unique de 80000D doit être intervenir au terme de 5 ans, 1 mois et 10 jours. Cette date correspond à l'échéance moyenne des annuités de la suite initiale.

3. Les annuités variables

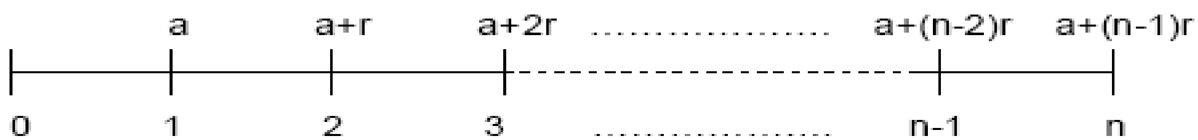
La variation de ces annuités est fondée sur une loi donnée. Il convient de distinguer deux types d'annuités variables :

- les annuités en progression arithmétique : quel que soit le terme de cette suite d'annuités, il s'obtient en ajoutant au précédent une valeur constante, notée r et appelée raison de la progression ;
- les annuités en progression géométrique : chaque terme de cette suite s'obtient en multipliant le précédent par une valeur, notée q, qui constitue la raison de la progression.

3.1. Les annuités en progression arithmétique

3.1.1. La valeur acquise

La valeur acquise V_n au taux d'intérêt i d'une suite de n annuités de fin de période en progression arithmétique désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, déterminée immédiatement après le versement de la dernière.



$V_n = a(1+i)^{n-1} + (a+r)(1+i)^{n-2} + (a+2r)(1+i)^{n-3} + \ldots + (a+(n-2)r)(1+i) + (a+(n-1)r).$

$V_n = a\,\underline{[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + (1+i) + 1]} + \underline{r[(1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \ldots +}$

$\underline{(n-2)(1+i) + (n-1)]}$

La première partie du membre à droite représente la somme de n termes en progression géométrique de raison (1+i), de premier terme : 1. Si l'on désigne la somme des termes en r par S, V_n devient :

$V_n = a[(1+i)^n - 1\ /i] + r.S$ (1)

Avec $S = (1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \ldots + (n-2)(1+i) + (n-1)$ (2)

Multiplions les deux membres de cette égalité par (1+i):

$S(1+i) = (1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \ldots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)$ (3)

La différence, membre à membre et terme à terme de même ordre, entre les égalités (2) et (3) s'écrit :

$S(1+i) - S = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)$

$Si = \underline{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i)} - n$

Les termes de la somme délimitée par la ligne forment une progression géométrique de n termes, de raison : (1+i), de premier terme : 1.

$Si = [(1+i)^n - 1\ /i] - n \rightarrow S = 1/i[((1+i)^n - 1\ /i) - n]$

Transposons à présent la valeur de S dans l'égalité (1):

V_n = a[(1+i)^n -1 /i] + r/i [((1+i)^n -1 /i) - n].

$$\mathbf{V_n = [(1+i)^n -1 /i] [a + (r/i)] – (nr/i)}$$

3.1.2. <u>La valeur actuelle</u>

La valeur actuelle V_0 au taux d'intérêt i d'une suite de n annuités de fin de période en progression arithmétique désigne la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités, exprimée une période avant le premier versement.
La valeur actuelle résulte de l'actualisation de la valeur acquise :
$V_0 = V_n (1+i)^{-n}$
Remplaçons par V_n par l'expression établie précédemment :

V_0 = [[(1+i) ^{n} -1 /i] [a + (r/i)] – (nr/i)](1+i)$^{-n}$
= [1-(1+i)$^{-n}$ /i [a+r/i] - (nr/i)(1+i)$^{-n}$]

Ajoutons et retranchons nr/i, il vient :

V_0 = [1-(1+i)$^{-n}$ /i [a + (r/i)] – (nr/i) (1+i)$^{-n}$ + (nr/i) - (nr/i)]

V_0 = [1-(1+i)$^{-n}$ /i [a + (r/i)] + nr[1-(1+i)$^{-n}$ /i] – (nr/i)]

$$\mathbf{V_0 = [1-(1+i)^{-n} /i [a + (r/i) + nr] – (nr/i)]}$$

<u>Exemple:</u>
Calculer les valeurs acquise et actuelle d'une suite d'annuités dont les caractéristiques sont les suivantes :
a= 12000, r = 1200, i= 0,08, n = 10 ;

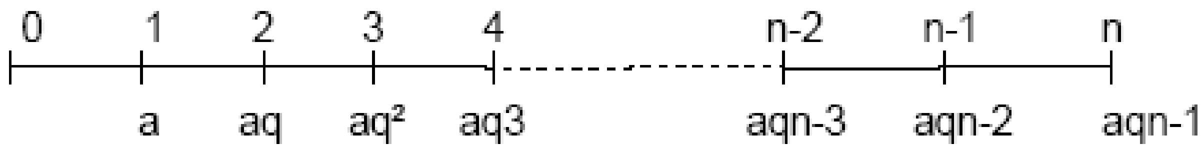
V_{10} = (1,08)^{10} -1 /0,0 8 [12000 + (1200/0,08)] – (10. 1200 /0,08) = 241137,19 D

$V_0 = V_n (1+i)^{-n}$ = 241137,19 (1,08)$^{-10}$ = 111 693,13 D
ou
V_0 =1-(1,08)$^{-10}$/0,08[12000+(1200/0,08)+(10.1200)]–(10.1200 /0,08) = 111683,13D

3.2. Les annuités en progression géométrique

3.2.1. L a valeur acquise

La valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période en progression géométrique désigne la somme des valeurs acquises de chacune de ces anuités, déterminées immédiatement après le versement de la dernière.



Les termes de cette somme sont donc les suivants:

$V_n = a(1+i)^{n-1} + aq\,(1+i)^{n-2} + aq^2\,(1+i)^{n-3} + \ldots + aq^{n-2}\,(1+i) + aq^{n-1}$

Les termes du membre de droite forment une progression géométrique dont $a(1+i)^{n-1}$ est le premier terme, n est le nombre de termes, $q/(1+i)$ est la raison.
La somme de ces termes s'obtient directement par :

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{1+i}\right) - 1}\right]$$

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\frac{q^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{1+i}}\right]$$

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{1+i}{(1+i)^n}\right]$$

$$V_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]$$

$$V_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]$$

3.2.2. La valeur actuelle

On sait que:
$V_0 = V_n (1+i)^{-n}$
Alors:

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times \left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}\right]$$

Remarque:
Ces formules permettent de calculer les valeurs acquise et actuelle par une suite d'annuités dont les termes sont en progression géométrique et si la raison q est différente de (1+i).
Dans le cas où q= 1+i, les formules deviennent ainsi :
La valeur acquise : $V_n = na (1+i)^{n-1}$
La valeur actuelle : $V_0 = na (1+i)^{-1} = na/(1+i) = na/q$.

Exemple :
Déterminer les valeurs acquises et actuelle au taux de 8% d'une suite de 10 annuités qui progressent au rythme de 5% et dont le premier versement est égal à 6000 D. Même question avec un taux de croissance de 8%.

- *Le taux de croissance de 5%, donc q= 1,05*

Valeur acquise :
$V_{10} = 6000[((1,05)^{10} – (1,08)^{10})/(0,05 – 0,08)]$= 106006,07D
Valeur actuelle :
$V_0 = (6000/ (1,08)^{10}) [((1,05)^{10} – (1,08)^{10})/ (0,05- 0,08)]$= 49101,32D ou
$V_0 = 106006,70(1,08)^{-10}$ = 49101,32D

- *Le taux de croissance de 8%, donc q=i+1=1,08.*

Valeur acquise :
$V_{10} = (10)(6000)(1,08)^{10-1}$ = 119940,28D
Valeur actuelle :
$V_0 = (10)(6000)(1,08)^{-1}$= 55555,56D.

Exercices

Exercice1 :

•Un capital de 150 000D a été constitué par une série de 20 versements annuels en fin de période, effectués au taux de 8%. Quelle est la valeur de chaque versement.

•Une personne place chaque moi une somme de 2000 D au taux de 5% pendant 12 mois. Quelle la valeur acquise des versements : 1/ au 7ème versement ; 2/ une période après le dernier versement ; 3/ 4 périodes après le dernier versement.

•Un crédit de 100000 D est remboursé par des annuités de valeur de 8800 D au taux de 6%. Quel est le nombre d'annuités ?

•Dix annuités de 1000D chacune ont une valeur acquise de 15800D. Calculer le taux de capitalisation (On vous donne : $[(1{,}0975^{10}-1)/0{,}0975]=15{,}747621$; $[(1{,}1^{10}-1)/0{,}1]=15{,}937425$).

•Une personne verse pendant 10 ans, 9000D par semestre pour acquérir un logement. La maison est finalement vendue au prix de 310 000D au paiement du dernier versement. Quel est le taux annuel d'intérêts composés du placement ainsi réalisé ?

Exercice 2:

Un individu achète un fonds de commerce estimé à 150 000 D, il paye 30000 D a comptant et s'engage à payer le reste par 8 versements annuels égaux, le premier ayant lieu dans deux ans après l'acquisition.

- le taux annuel étant de 5%, calculer le montant de chacun de ces versements ;
- après avoir payé le troisième versement, le commerçant obtient de s'acquitter par 6 versements à terme échu (chaque fin d'année), mais à un taux supérieur, sachant que chaque versement est égal à 17093,2 D, calculer le nouveau taux.

Exercice3:

Y fait l'achat d'un appareil électroménager et finance son achat en empruntant 20000D. Il a le choix entre deux options pour le remboursement de ce prêt. Dans la première option, il fera 36 paiements mensuels égaux et le taux nominal d'intérêt capitalisé mensuellement sera i = 14%. Dans la seconde option, il fera 48 paiements mensuels égaux et le taux nominal d'intérêt capitalisé mensuellement sera i' = 16%. Dans les deux options, les paiements débuteront un mois après l'achat de la voiture. Déterminer pour chacune de ces options, le paiement mensuel ainsi que la somme de tous les paiements du prêt. Quel est le montant de l'intérêt global à payer dans chacune des options.

Exercice 4 :

Une suite de 15 annuités est ainsi constitué : 5 annuités de 1000D chacune, puis annuités 1500D chacune, puis 5 annuités de 2000 D chacune. Calculer la valeur acquise et la valeur ce cette série d'annuités. Taux =11,5% ;

Exercice 5 :

Une entreprise emprunte auprès d'une banque 2 000 000D. Remboursable en 10 ans par annuités constantes de fin de période.

1- calculer le taux de l'emprunt sachant que l'annuité est de 290 707D ;
2- mais au moment de paiement de la 5ème année, la banque avise l'entreprise que le taux pour les paiements avenir passe à 10%, trois modes de paiements sont proposés :
    a- paiement du solde restant dû immédiatement. Calculer ce solde.
    b- Paiement par 5 annuités restantes, calculer le montant de la nouvelle annuité ;
    c- Paiement à l'aide de X annuités de 200 000 D. calculer le nombre d'annuités.

Exercice 6:

Un couple désire investir. Le mari dépose 250 dinars par mois pendant 3 ans à un taux d'intérêt annuel de 8,5% capitalisé mensuellement et son épouse, 900 dinars par semestre pendant la même durée à un taux annuel de 10% capitalisé semestriellement.

1- Lequel des deux placements est plus avantageux que l'autre ?
2- Lequel des deux placements aura accumulé le plus de capital ?
3- Calculer le capital accumulé par le couple.

N.B : Les versements sont de début de période.

Exercice 7:

Un fonds de commerce est mis en vente au pris de 400 000 D. un commerçant s'engage à l'acheter et propose de payer 200000 D au comptant et le reste par 5 versements égaux, le premier ayant lieu dans deux ans après l'acquisition.

- le taux annuel étant de 6%, calculer le montant de chacun de ces versements ;
- après avoir payer le troisième versement, le commerçant obtient de s'acquitter par 4 versements à terme échu au taux 8%, calculer la valeur de chaque versement.

Exercice 9 :

- Un industriel doit versé à une société de prêt-bail 4 annuités de 40000D, la première payable dans 1an, etc. l'industriel propose de s'acquitter en deux paiements d'égale valeur, le premier dans un an, le second dans 2ans.

Quelle est la valeur de la nouvelle annuité au taux de 5%.

- Un particulier doit 10000 dinars, 20000 dinars et 30000 dinars respectivement dans un, deux et trois ans. Il désire se libérer de sa dette en deux versements égaux dans quatre et cinq ans. En supposant un taux de 7%, calculer le montant des versements à effectuer.

Exercice 10 :

Une personne souhaite se constituer un capital de 200 000D pour le 1er janvier 2010. Pour cela elle verse sur son compte chaque début d'année, à partir du 1er janvier 2000 et jusqu'au 1er janvier 2009 une somme S constante.

- quel doit être le montant de cette somme si le taux d'intérêt servi sur ce compte est de 8% ?
- même question, en supposant cette fois que les versements annuels sont en progression géométrique de raison de 1,2.

Exercice 11 :

Lors de la vente d'un lot de matériel, une société a reçu sous plis cachetés trois offres :

- 58800D payables comptant ;
- 70000D payables dans 3ans ;
- Versement de 10 annuités de 5000D, la première versée dès la signature du contrat.

Si l'on suppose que le taux d'intérêt est de 5%, évaluer l'offre la plus avantageuse pour la société.

Exercice 12 :

Une personne verse dans une banque, une somme de 6000D par an, le 1er janvier de chaque année pendant 10 ans, la première a été versée le 1er janvier 1987, la dernière le 1er janvier 1996. Puis, pendant, 10 ans elle retiré la même somme de 6000D, la première a été retirée le 1er janvier 1997, la dernière le 1er janvier 2006.

Calculer l'avoir de cette personne dans la banque au 31 décembre 2006, en tenant compte des intérêts composés au taux de 5%.

Exercice 13 :

Une personne place chaque 31/12 ses économies de l'année soit 2000D à intérêts composés à 5% l'an.

1- elle pensait réaliser ces versements pendant 20ans. Quelle eut été la valeur acquise au dernier versement ?

En fait à partir de onzième versement, elle a pu placer chaque année une somme de 3000D.

2- de combien augmentera la valeur acquise au moment du dernier versement ?

3- quelle est cette valeur ?

4- Vérifier le résultat trouvé.

Le capital ainsi constitué sert à l'achat d'une maison, mais il est insuffisant ; l'acheteur s'engage à verser pendant 5ans en fin d'année 5100D au taux de 6%.

5- combien manquait-il au moment au moment de l'achat ? (arrondir le résultat)

6- quel eut été le taux si l'acheteur s'était libéré en 10ans au lieu de 5 par un versement annuel de 2900D ?

Exercice 14 :

X a consentit un prêt d'une valeur 150 000 D. Il remboursera ce prêt en faisant des versements égaux à tous les trimestres pour les prochaines dix années. Il fera ces versements à la fin de chaque trimestre et le premier versement aura lieu trois mois après le prêt. Le taux d'intérêt pour ce prêt est le taux nominal i = 12% capitalisé à tous les trois mois.

a- Déterminer le montant versé à la fin de chaque trimestre par X à sa banque et le total de ses versements.

b- Si, au lieu de rembourser son prêt par des versements égaux, il remboursait le principal et les intérêts dans un seul paiement à la fin des dix années, comparer ce paiement avec le total des versements obtenu en (a).

c- Si à la fin de la $6^{ème}$ année, il veut rembourser plus rapidement son prêt en faisant toujours des paiements égaux à la fin de chaque trimestre. Quel doit être son versement trimestriel s'il veut rembourser son prêt à la fin de la $8^{ème}$ année?

d- S'il n'a pu faire son $8^{ème}$ paiement trimestriel et la banque lui offre deux choix après avoir renégocié, soit d'augmenter son versement trimestriel ou soit de faire un versement supplémentaire au trimestre suivant la $8^{ème}$ année. Dans tous les cas, le taux d'intérêt sera toujours i = 12% et les versements seront égaux. Déterminer le montant des versements trimestriels après le $8^{ème}$ trimestre pour chacune de ces options.

Exercice 15:

Une personne a contracté un prêt auprès d'une banque. Il rembourse son prêt en faisant 3 paiements:

Le premier au montant de 5000D fait un an après le prêt, 7000D fait un an et demi après le prêt et 3000D fait trois ans après le prêt. Le taux d'intérêt nominal pour ce prêt est i = 10% capitalisé à tous les six mois.

(a) Déterminer le montant que la banque a prêté à cette personne.

(b) Si après avoir fait son premier paiement de 5000D, cette personne renégocie son prêt avec la banque de façon à n'avoir plus qu'un seul paiement de X dinars à faire 4 ans après le prêt. Le taux d'intérêt demeure inchangé. Quel doit être ce dernier paiement X?

(c) Dans ce dernier cas pour accumuler ce montant X, il fait 36 versements mensuels au montant de P dinars dans un compte de banque rémunéré au taux nominal d'intérêt i = 6% capitalisé mensuellement. Ce premier versement aura lieu un mois après son paiement de 5000D. Déterminer P.

Exercice 16:

Une personne X a fait un prêt avec une banque. Elle rembourse son prêt en faisant 32 paiements trimestriels de 2 500D, le premier paiement étant fait trois mois après le prêt. Le taux d'intérêt pour ce prêt est le taux nominal J = 1 2% capitalisé à tous les trois mois.

1- Déterminer le montant que la banque a prêté à X.
2- Si après avoir fait son 12ème paiement, X renégocie son prêt avec la banque. Quatre modes de paiements sont proposés de façon à avoir :
   a- Paiement du solde restant immédiatement ;
   b- Paiement par 10 versements. Calculer le montant du nouveau versement.
   c- Un seul paiement à faire cinq ans plus tard, quel doit être ce dernier paiement?
   d- Paiement à l'aide de m versements de 2 200D. Calculer le nombre de versements.
3- Si au lieu de faire 32 paiements trimestriels de 2 500D pour un total totalisant 80 000D comme ci-dessus, X faisait un seul paiement de 80 000D. A quel moment doit-elle faire ce paiement pour rembourser son prêt?
4- S'il n'a pu faire son 8ème paiement trimestriel et la banque lui offre deux choix après avoir renégocie, soit d'augmenter son versement trimestriel ou soit de faire un versement supplémentaire au trimestre suivant la 8ème année. Dans tous les cas, le taux d'intérêt sera toujours J=10% et les versements seront égaux. Déterminer le montant des versements trimestriels après le 8ème trimestre pour chacune de ces options (dans les deux choix, une nouvelle trimestrialité est envisagée).

Exercice 17:

Une entreprise s'adresse à une banque pour emprunter 100 000 dinars. La banque lui propose un remboursement au moyen d'une série de 6 annuités constantes de fin de période aux taux de 8% les 2 premières années, 9% les 2 années suivantes et 10% les 2 dernières années.

1) Calculer le montant de l'annuité.
2) Calculer le montant de l'intérêt global que cette entreprise a versé à la banque.
3) Déterminer le taux effectif annuel d'intérêt de cet emprunt auprès de la banque.

Exercice 18:

Le 1er janvier 2000, un particulier dépose auprès d'une banque une somme de 600 000D afin de constituer une rente dont les modalités sont les suivantes :

a) Pendant cinq ans, à partir du 1er janvier 2001, cinq termes annuels de 50 000D ;
b) Pendant n années, une fois cette première période écoulée, toujours le 1er janvier, une somme de 40 000D.

Les taux retenus sont i_1=4,5% pour les cinq premières années, i_2=5% pour les suivantes.

1. Calculer *n*, constater que n n'est pas entier.
2. On choisit d'opter pour le chargement de la dernière annuité qui sera donc supérieure à 40 000D. Quel sera le montant de cette dernière annuité ?

Exercice 19:

X prête 50 000 D à Y. Ce dernier rembourse X en lui versant 24 paiements mensuels, un à la fin de chaque mois pendant 2 ans. Le premier paiement a lieu un mois après que X ait fait le prêt à Y et est d'un montant de R dinars. Les montants suivants augmentent de R/11 dinars avec chaque paiement jusqu'au 12ème paiement. Les douze derniers paiements sont tous égaux et au montant de 2 R dinars. Le taux d'intérêt pour ce prêt est le taux nominal j = 9% capitalisé à tous les mois.

(a) Déterminer R.

(b) Si X réinvestit ces paiements dans un fonds de placement rémunéré au taux nominal j = 6% capitalisé à tous les mois, déterminer le taux annuel de rendement de cette transaction pour X après le dernier paiement de Y (i.e. après 2 ans).

Exercice 20:

Quelle est la valeur actuelle d'une suite d'annuités différées :

- dont le 1er terme est 16000D et dont les termes sont en progression arithmétique de raison 2. Le taux d'intérêts composés est de 7%.

- dont le 1er terme est 8000D et dont les termes sont en progression géométrique de raison 0,7. Le taux d'intérêts composés est de 5%.

Exercice 21:

Une banque prête un capital V_0 à la date zéro à une entreprise qui s'engage à rembourser en *n* annuités a_1, a_2,….a_n versées aux dates 1,2,…*n* ; ces annuités forment une suite géométrique de raison *q*= 1,10 et sont calculées à intérêts composés au taux *i*=8%. Ces annuités sont immédiatement réinvesties par la banque aux taux annuel *j*=5% et remboursées en totalité à la date *n*. on désigne par *t* le taux réel de rendement pour la banque. On prendra *n*=8.

- Calculer la première annuité a_1, en fonction de V_0 ;
- Calculer la valeur acquise V_n des annuités à la date n, en fonction de V_0, compte tenu du réinvestissement.
- Ecrire l'équation permettant de calculer le taux réel *t* ; résoudre cette équation ;
- Que serait le taux réel net, *x*, si la banque était soumise, à la date *n*, à un prélèvement fiscal de 30% sur les revenus de l'opération, payable à la date *n* ?

Exercice 22:

Répondre aux questions précédentes en supposant que les anuités a_1, a_2, ….a_n forment une suite arithmétique dont la raison, *r*, est égale a αV_0 (α=0,01)

LES EMPRUNTS

Dans la littérature, il existe deux grandes familles d'emprunts :

- Les emprunts indivis ;
- Les emprunts obligataires ;

L'emprunt indivis, ou ordinaire est celui qui est contracté auprès d'un seul emprunteur : banque, établissement financier,
L'emprunt obligataire comporte, lui plusieurs prêteurs dénommés les obligataires.

1. <u>Les emprunts indivis</u>

1.1. <u>Définition</u>

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis. Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période. Chaque annuité est composée de deux éléments :

- Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'amortissement.
- Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

1.2. <u>Tableau d'amortissement</u>

Le remboursement d'un emprunt (ou service de la dette) peut être :

- identique d'une période à une autre. La somme des intérêts et de l'amortissement étant égale, les annuités sont dites « constantes » ;
- variable d'une échéance à une autre, cette variation provient généralement des intérêts, qui tendent à décroître à mesure que s'opèrent les remboursements constants ;
- unique, les emprunts de ce type comportent deux variantes :
    - l'*in fine* absolu, dont le service est unique. L'emprunteur rembourse le capital et les intérêts au dernier terme ;
    - l'*in fine* relatif, dont le service périodique est réduit au paiement des intérêts jusqu'au dernier terme où le débiteur rembourse le capital emprunté en sus des intérêts.

Les relations entre les différentes variables de l'emprunt indivis sont décrites par le tableau d'amortissement suivant.
Ces relations sont vérifiées quelle que soit l'hypothèse de remboursement adoptée : annuités constantes, amortissement constants ou *in fine ;*

années	Dette en début d'année (1)	Intérêt de l'année (2) = (1). *I*	Amortissement de l'année (3)	Annuités	Dette au terme de l'année (5) = (1)-(3)
1	D_0	$D_0.i$	m_1	$a_1=D_0.i+m_1$	$D_1=D_0-m_1$
2	D_1	$D_1.i$	m_2	$a_2=D_1+m_2$	$D_2=D_1-m_2$
.					
.					
P	D_{p-1}	$D_{p-1}.i$	m_p	$a_p=D_{p-1}.i+m_p$	$D_p=D_{p-1}-m_p$
.					
n-1	D_{n-2}	$D_{n-2}.i$	m_{n-1}	$a_{n-1}=D_{n-2}.i+m_{n-1}$	$D_{n-1}=D_{n-2}-m_{n-1}$
n	D_{n-1}	$D_{n-1}.i$	m_n	$a_n=D_{n-1}.i+m_n$	$D_n=D_{n-1}-m_n=0$

1.3. Propriétés générales

Le tableau recèle cinq propriétés :

P1 : relation entre capital emprunté et annuités.
Cette propriété exprime l'équivalence à l'origine (instant zéro) entre le capital emprunté et les anuités versées :

$$\mathbf{D_0 = a_1 (1+i)^{-1} + a_2 (1+i)^{-2} + \ldots + a_p (1+i)^{-p} + \ldots + a_n (1+i)^{-n}}$$

P2 : relation entre capital emprunté et amortissements.
La somme des termes de la colonne (3) est égale au capital emprunté :
$D_0 = m_1+m_2+\ldots+m_n$

$$\mathbf{D_0 = \sum m_k} \quad \text{(de k=1 à n)}$$

P3 : relation entre le solde de l'emprunt au début de la dernière annuité et le dernier amortissement.
Cette relation figure à la dernière ligne de la colonne (5) :

$$D_{n-1} - m_n = 0 \Rightarrow \mathbf{P3 : \quad D_{n-1} = m_n}$$

Le solde de l'emprunt au début de la dernière annuité est remboursé au travers du dernier amortissement.

P4 : relation entre annuités et amortissements.
Soit deux annuités successives de rangs p et p + 1, avec :
$a_p = D_{p-1} .i + m_p$ et $a_{p+1}= D_p .i + m_{p+1}$

La différence entre ces deux annuités s'écrit :
$a_{p+1} – a_p = (D_p .i + m_{p+1}) – (D_{p-1} .i + m_p) = D_p .i + m_{p+1} - D_{p-1} .i - m_p$

La colonne n^0 5 du tableau d'amortissement indique pour la ligne p l'expression de la dette vivante après paiement de la p^{ième} annuité :
$D_p=D_{p-1} - m_p$

La transposition de cette expression dans le différentiel d'annuités permet d'obtenir :
$a_{p+1} – a_p = D_{p-1} .i - m_p .i + m_{p+1} –D_{p-1} .i - m_p$

$$\Rightarrow \textbf{P4: } \mathbf{a_{p+1} – a_p= m_{p+1} – m_p (1+i)}$$

P5 : dette amortie après paiement de la p^{ième} annuité
Il s'agit de la fraction du capital emprunté, remboursée au terme de la p^{ième} période :
R_p et notée P5 :

$$\mathbf{R_p= m_1+ m_2+ m_3+…+m_p = \sum m_k} \quad \textbf{(de k=1 à p)}$$

Cette propriété permet de déterminer la dette vivante au terme de la même période D_p :

P5 bis : $\mathbf{D_p= D_0- R_p}$

Le choix de l'une ou l'autre des modalités de remboursement implique la transformation de ces propriétés pour les adapter au cas considéré.

1.4. Emprunts indivis à annuités constantes

1.4.1. Calcul de l'annuité constante

Soit a, l'annuité constante. Par définition, $a_1=a_2= ….=a_n=a$
La propriété P1 devient :

$D_0= a[(1+i)^{-1} +(1+i)^{-2} +…+ (1+i)^{-n}]$

$\Rightarrow$ P6 :

$$\mathbf{D_0= a[1- (1+i)^n /i]}$$

d'où :

$$\mathbf{a=D_0[i/1-(1+i)^{-n}]}$$

Les valeurs de i /1-$(1+i)^{-n}$ sont données par la TFn°5

Exemple :

Un emprunt de 500 000 D, contracté au taux d 12% est remboursé au moyen de 5 annuités constantes. Calculer la valeur de l'annuité.

a= 50000[0,12/1-$(1,12)^{-5}$] = 138 704,84 D

1.4.2. Loi de progression des amortissements

L'annuité étant constante : $a_{p+1} – a_p=0$, l'expression P4 devient :

P8: $m_{p+1}-m_p (1+i) = 0 \Rightarrow m_{p+1}= m_p (1+i)$

Dans un système d'annuités constantes, les amortissements forment une progression géométrique croissante de raison (1+i)

Cette loi permet de déduire la relation qui s'établit entre les amortissements de rangs p et 1 :

P9 : $m_p=m_1 (1+i)^{p-1}$

Reprenons à présent l'expression P2 : $D_0=m_1+m_2+...+m_n$

Compte tenu de la loi d'évolution des amortissements, cette expression peut être réécrite ainsi :

$$D_0= m_1 + m_1 (1+i) + m_1 (1+i)^2+\ldots+ m_1 (1+i)^{n-1}$$
$$= m_1[1 + (1+i) + (1+i)^2+\ldots+ (1+i)^{n-1}]$$

$\Rightarrow$P10 : $D_0= m_1 [(1+i)^n-1/i]$

L'expression du premier amortissement est déduite de P10 :

$\Rightarrow$P11: $m_1= D_0[i/ (1+i)^n -1]$

Exemple:
D_0=500 000 D; n=5 ; i =0,12. Remboursement par annuité constantes; calculer la valeur du premier amortissement
m_1= 500 000[0,12/(1,12)^5 -1] = 78 704,87 D

1.4.3 Capital remboursé et dette vivante après paiement de la pième annuité

Considérons de nouveau l'expression générale de la dette amortie après paiement de la pième annuité, P5 :

$R_p = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_p$

Exprimée relativement à m1 et compte tenu de la loi de progression des amortissements décrite par P9, Rp devient :

$R_p = m_1 + m_1 (1+i) + m_1 (1+i)^2 + \ldots + m_1 (1+i)^{p-1}$
$R_p = m_1 [(1+i)^p - 1 /i]$

La transposition de la formule P11 dans cette égalité, permet d'exprimer R_p à partir du capital emprunté :
$R_p = D_0[i/ (1+i)^n -1].[(1+i)^p - 1 /i]$

$\Rightarrow$P12: $R_p = D_0 [(1+i)^p -1 / (1+i)^n - 1]$

Transposons cette expression dans la formule P5 bis de la dette encore vivante après paiement de la pième annuité :

$D_p = D_0 - R_p = D_0 - D_0 [(1+i)^p -1 / (1+i)^n - 1]$
$\Rightarrow$P13 $D_p = D_0 [(1+i)^n -(1+i)^p / (1+i)^n -1]$

Exemple:
D_0= 500 000 D; n= 5; i= 0,12. Remboursement par annuités constantes. Déterminer la dette amortie après paiement de la deuxième annuité et la dette encore vivante après paiement de la troisième annuité.
Dette amortie après paiement de la deuxième annuité :
R_2 = 500 000 [(1,12)^2 -1 / (1,12)^5 – 1]=166 845,32 D
Dette encore vivante après paiement de la troisième annuité
D_3 = 500 000 [(1,12)^5 - (1,12)^3 /(1,12)^5 – 1]= 234418,30D

1.4.4 <u>Présentation du tableau d'amortissement</u>

<u>Exemple :(suite)</u>

Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt indivis à annuités constantes.

Années P	Dette en début d'année D_{p-1} (1)	Intérêt de l'année $D_{p-1}.i$ (2) = (1). *I*	Amortissement de l'année m_p (3)	Annuités a_p (4) = (2)+(3)	Dette au terme de l'année D_p (5) = (1)-(3)
1	500000	60000	78704,87	138704,87	421295,13
2	421295,13	50555,42	88149,45	138704,87	333145,68
3	333145,68	39977,48	98727,39	138704,87	234418,30
4	234418,30	28130,20	110574,67	138704,87	123843,63
5	123843,63	14861,24	123843,63	138704,87	0
			500000		

<u>Remarques :</u>

- L'intérêt résulte du produit du taux et de la dette encore vivante au début de l'année. Ainsi, pour la première ligne, 60000 est le produit de 0,12 par 500000.
- L'amortissement d'une année est : soit le produit de l'amortissement précédent par (1+i), raison de la progression géométrique ; soit la différence entre annuité et les intérêts de l'année considérée. L'amortissement de la deuxième ligne 88194,45 résulte ainsi de la multiplication de 78704,87, l'amortissement de la première ligne, par 1,12 ou la différence entre l'annuité 138704,87 et l'intérêt 50555,42.
- Le capital emprunte est totalement amorti au terme de la durée de remboursement (dernière ligne de la colonne 5) ;
- Les valeurs fournies par le tableau d'amortissement confirment les résultats des calculs effectués dans le cadre des exemples précédents :

- m_1 est bien égal à 78704,87D ;
- R_2 est bien égal à 166857,32D. cette valeur est obtenue par la différence entre le capital emprunté (500000) et la dette vivante au terme de la deuxième période (333145,68) ;
- D_3 est bien égal à 234418,30D. cette valeur figure à la troisième ligne de la colonne 5 du tableau ;

1.5. Emprunt indivis à amortissements constants

Dans ce cas, l'amortissement du capital emprunté est répartit de façon égale sur la durée de remboursement de l'emprunt.

1.5.1. Loi de progression des annuités

Désignons par m l'amortissement constant. Par définition :
$m_1=m_2=\ldots=m_n=m$ ou : $m = D_0/n$

Considérons à présent deux annuités successives de rangs p et p+1
$a_p= D_{p-1} .i + m$ et $a_{p+1}= D_p .i + m$

La dette encore vivante après paiement de la $p^{ième}$ annuité a pour expression :
$D_p – D_{p-1} – m$

Transposons cette expression dans celle de a_{p+1} :
$a_{p+1}= (D_{p-1} – m).i + m = D_{p-1} .i – m.i + m = \underline{D_{p-1} .i+m} - m.i$ (le terme souligné représente a_p) ;

$\Rightarrow$ **P14 :** $\mathbf{a_{p+1} – a_p= -m.i}$ ou encore $\mathbf{a_{p+1} – a_p= - D_0 . i /n}$

Dans un système d'amortissement constants, les annuités ainsi que les intérêts successifs forment une progression arithmétique décroissante de raison : $D_0 .i/n$.

1.5.2. Transformation des propriétés générales

Les propriétés générales énoncées précédemment doivent être adaptés au cas du remboursement par amortissements constants ;
Ainsi, la propriété P2 : $D_0 = \sum m_k$ (de k=1 à n)

Devient $\Rightarrow$ **P15 :** $\mathbf{D_n = n.m}$

Les propriétés relatives aux dettes amorties (R_p) et vivante (D_p) après paiement de la $p^{ième}$ annuité, respectivement P5 et P5 bis deviennent P16 et P17 :
$R_p = p.m$

Or : $\mathbf{D_p = D_0 - R_p}$

Transposons P15 et P16 dans l'égalité précédente : $D_p = n.m - p.m$

D'où : $\mathbf{D_p = (n\text{-}p).m}$

1.5.3. Présentation du tableau d'amortissement

Exemple :

Déterminer les valeurs de R_2, D_3 et présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt à amortissements constants dont : D_0= 500000 ; n=5 ; i=0,12

Valeur de l'amortissement constant :

m=500000/5=100000 D

Dette amortie après paiement de la deuxième annuité :

R_2 = 2 . 100000 = 200000 D

Dette encore vivante après paiement de la troisième annuité

D_3 = (5-3).100000= 200000D ;

Présentation du tableau d'amortissement :

Années p	Dette en début d'année D_{p-1} (1)	Intérêt de l'année D_{p-1} .i (2) = (1). *I*	Amortissement de l'année m_p (3)	Annuités a_p (4) = (2)+(3)	Dette au terme de l'année D_p (5) = (1)-(3)
1	500000	60000	100000	160000	400000
2	400000	48000	100000	148000	300000
3	300000	36000	100000	136000	200000
4	200000	24000	100000	124000	100000
5	100000	12000	100000	112000	0
			500000		

Remarques :

L'intérêt résulte du même calcul que celui opéré dans le cas précédent de l'emprunt à annuités constantes. Les valeurs successives sont obtenues retranchant (D_0 .i/n) de la valeur qui précède. Ainsi, l'intérêt de la deuxième année, 48 000, correspond à la différence entre 60000 l'intérêt de la première période et la raison de la progression arithmétique : D_0 .i/n =12000.

Les valeurs fournies par le tableau d'amortissement confirment celles obtenues par le calcul direct pour R_2 et D_3.

1.6. Emprunt indivis remboursable *in fine*

Rappelons que cette modalité de remboursement comporte deux variantes :

- La première, qualifiée de relative, permet au débiteur de n'acquitter que l'intérêt pendant (n-1) périodes. La nième et dernière annuité intègre à la fois le paiement de l'intérêt et la restitution de la somme empruntée ;
- La seconde, qualifiée d'absolue, exonère le débiteur de tout paiement pendant les (n-1) périodes. La dernière et unique annuité, comporte à la fois le remboursement du capital emprunté et le paiement des intérêts .

1.6.1. Remboursement *in fine* : variante relative

Désignons par m le montant constant des versements capitalisés au taux i' et destinés à assurer le remboursement à la dernière période du capital D0 emprunté à l'époque zéro.
La valeur de m s'obtient à partir de la relation suivante :

$D_0= m\mathbf{[}\ (1+i')^n - 1\ /i'\mathbf{]}$

$\Rightarrow$P18 : $\mathbf{m= D_0.[i' /(1+i')^n - 1]}$

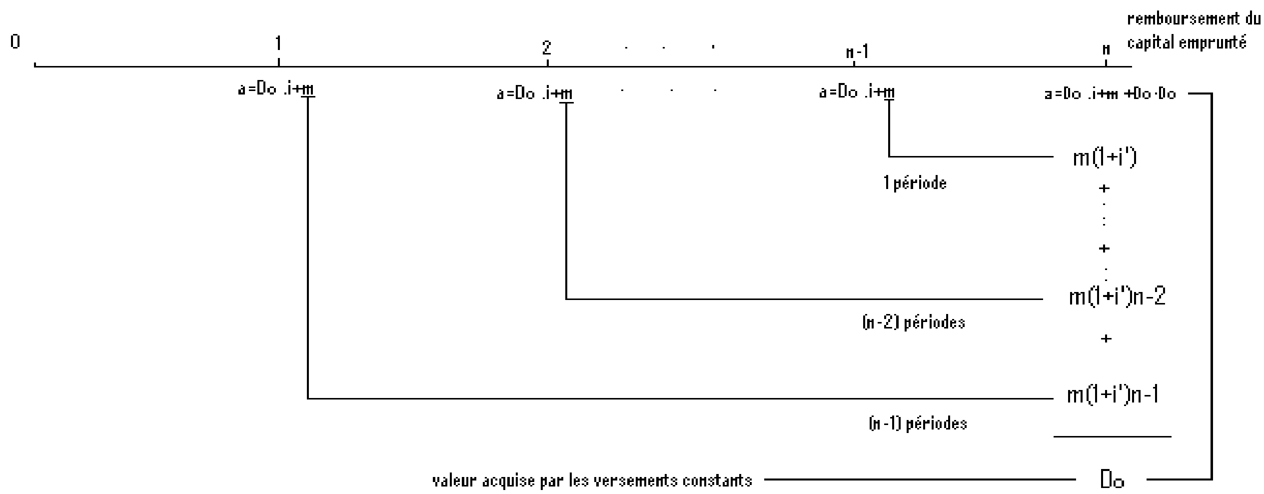
La charge périodique effective comprend à la fois :
- *le paiement des intérêts, destiné au prêteur ;*
- *le versement des termes du fonds d'amortissement, destiné à l'organisme de capitalisation.*

Soit $a_1,a_2,\ldots a_n$ les annuités effectives.

Par définition : $a_1=a_2=\ldots=a_n= D_0.\ i+m$
$\Rightarrow$P19 : $\mathbf{a=D_0\ .i+m}$

transposons P18 dans cette égalité. L'annuité effective s'exprime également ainsi :
$\Rightarrow$P20 : $\mathbf{a=D_0\ [i+\ (i'/\ (1+i')^n - 1)]}$

Le graphe ci dessus reprend les relations établies précédemment :



Remarque : au terme de la nième période, la valeur acquise par les n versements constants de montant m(D_0) compense exactement le remboursement du prêt, de sorte que la charge effective (D_0.i+m) de cette dernière période demeure identique à celle des périodes précédentes.

1.6.2. Remboursement *in fine* : variante absolue

Cette modalité exclut tout paiement d'intérêt pendant les périodes qui précèdent la dernière. Au terme de celle-ci, le débiteur paie à la fois les intérêts et le montant du capital emprunté.
Les versements de la banque (m), capitalisés au taux de i', sont destinés à assurer le paiement, au terme de la dernière période, d'un montant égal à la valeur acquise (au taux i) par le capital prêté. **Ces versements constituent, à eux seuls, la charge effective supportée par le débiteur à chaque période**.
Ces annuités effectives et constantes ont donc pour valeur : $a_1=a_2=\ldots=a_n=m$

$\Rightarrow$P21 : **a=m**

La valeur de m étant : $D_0\ (1+i)^n = m\ [(1+i')^n-1/i']$

$\Rightarrow$P22: $\mathbf{m= D_0\ (1+i)^n\ [i'/ (1+i')^n-1]}$

1.6.3. Cas où i'=i

Si le débiteur constitue le fonds d'amortissement à un taux i' égal au taux i auquel il emprunte, l'annuité effectivement supportée est alors identique, quelle que soit la variante.
Remplaçons i' par i dans l'expression de l'annuité.

- Variante relative :

$a=D_0. [i + (i/ (1+i)^n – 1]$

$\Rightarrow$P20 bis: **$a= D_0. [i/1-(1+i)^{-n}]$**

- Variante absolue :

$a= D_0 (1+i)^n [i/ (1+i)^n-1]$

$\Rightarrow$P22 bis: **$a= D_0 [i/ 1-(1+i)^{-n}]$**

Cette annuité est identique à celle d'un emprunt amortissable par annuités constantes. La destination de l'annuité effective n'est cependant pas exclusive, à l'instar des emprunts à annuités constantes, mais double :

- le prêteur, pour l'intérêt,
- l'organisme financier, pour les versements constitutifs du fonds d'amortissement.

Exemple :

Un emprunt de 500 000 D contracté au taux de 12% est remboursé par un versement unique au terme de la cinquième année. Pour faire face à ce paiement, le débiteur décide de placer chaque année une somme rémunérée au taux de 10% ;

- déterminer le montant constant de ces versements annuels;
- calculer la charge annuelle effective engendrée par cet emprunt, sachant que le décideur est tenu de verser l'intérêt au terme de chaque année ;
- quelle serait cette charge annuelle si les placements étaient rémunérés à 12%.

Montant constant des versements annuels :

$m= 500\ 000[0,10 / (1,10)^5 -1]=81898,74D$

Charge annuelle effective :

Cette charge résulte des intérêts versés au préteur ($D_0.i$) et des versements destinés à constituer le fonds d'amortissement (m). Il s'agit donc de déterminer l'annuité correspondante à la variante relative.

$m=500\ 000[0,12 +0,10 / (1,10)^5 -1]= 141\ 898,74D$

La fraction destinée au prêteur est égale à :

$D_0.i = 500\ 000.\ 0,12 = 60\ 000$ D ou a-m= 141 898,74 – 81 898,74= 60 000 D

Charge annuelle effective si i'= 0,12

Dans ce cas i'=i. l'annuité effective s'obtient directement à partir de :

$a= 500\ 000 [0,12/1- (1,12)^{-5}]=138\ 704,87$ D

La charge annuelle effective est moins importante qu'elle ne l'était dans le cas précédent où $i' \neq i$. ce résultat s'explique par le rythme de capitalisation. Celui-ci

étant plus élevé que dans le cas initial (12% contre 10%), les versements destinés à la constitution du fonds d'amortissements sont nécessairement moins importants :
$m=a-D_0.i$ = 138 704, 87 – (500 000. 0, 12) = 78 704, 87 D
Et donc: 78 704,87 < 81 898,74 D

2. Les emprunts obligataires

2.1. Définition

Lorsque le montant de l'emprunt est très élevé, l'emprunteur est obligé de s'adresser à plusieurs prêteurs appelés « obligataires » ou « souscripteurs ». En effet, le montant de l'emprunt est divisé en parts égales négociables appelées obligations. Chaque institution intéressée de participer à l'emprunt, en acquiert une certaine quantité. Ainsi, les collectivité publiques, de même que les entreprises publiques peuvent réalisé leur emprunt, en mettant des obligations, contre capitaux.

2.2. Les caractéristiques d'une obligation

Les obligations sont caractérisées par les éléments suivants:

- *La valeur nominale*: C'est la valeur faciale de l'obligation. Elle est unique pour toutes les obligations d'un même emprunt. Elle constitue le montant à partir duquel est établi le tableau d'amortissement et la base de calcul des intérêts.

- *La valeur d'émission*: C'est la somme effectivement payée par l'obligataire pour l'achat d'une obligation. Ce prix peut être différent du nominal. Lorsqu'il est égal au nominal, on dit que l'obligation est émise « au pair », s'il en est inférieur, on dit que l'obligation est « au dessous du pair » alors que s'il en est supérieur, on dit que l'émission est « au dessus du pair ». La différence entre la valeur d'émission et la valeur nominale est appelée prime d'émission.

- *La valeur de remboursement*: C'est la somme versée par l'emprunteur au moment du remboursement de l'obligation. Cette somme peut être égale à la valeur nominale, on parle dans ce cas d'un remboursement « au pair », ou supérieure à la valeur nominale et on parle alors d'un remboursement « au dessus du pair ». La différence entre la valeur de remboursement et la valeur d'émission est appelée prime de remboursement. Le mode de remboursement peut être:
  - En bloc ou in fine: tous les titres sont remboursés en une seule fois à l'échéance.

- Par amortissement constant: un même nombre d'obligations tirées au sort est remboursé chaque année.
- Par annuités sensiblement constantes: les obligations à amortir chaque année sont également tirées au sort. Les annuités ne sont pas strictement constantes parce que l'amortissement doit concerner un nombre entier d'obligations.

- *Le taux nominal* : C'est la rémunération de l'obligation. On l'appelle aussi taux facial. Appliqué à la valeur nominale, il permet de calculer le montant des intérêts (coupon).
- *La date de souscription* : C'est la date de règlement de l'achat de l'obligation par le souscripteur.
- *La date de jouissance* : C'est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
- *Le coupon*: c'est le montant des intérêts servis à chaque échéance, pour chaque obligation.

2.3. <u>Cas général</u>

Soit:

- N: nombre des obligations émises.
- D_0 : le capital emprunté à l'époque zéro,
- V_n : la valeur nominale d'une obligation ;
- i : le taux d'intérêt nominal.
- c: le coupon qui est l'intérêt annuel d'une obligation ; avec $c = V_n.\ i$
- μ_1, μ_2,....μ_n, le nombre d'obligations amorties au premier, deuxième,…,$n^{ième}$ tirage au sort ;
- d_1, d_2……d_n : nombre d'obligation encore vivante ou non remboursées au termes du premier, deuxième,…, $n^{ième}$ tirage au sort ;
- D_1,D_2,..,D_n, la dette encore vivante ou non encore remboursée aux termes du premier, deuxième, …., $n^{ième}$ tirage ;
- a_1, a_2……a_n, les annuités versées respectivement aux terme des périodes 1,2….,n ;
- m_1, m_2……m_n, les n amortissements inclus dans les annuités a_1,a_2,…,a_n ;

<u>Tableau d'amortissement</u>

Le tableau d'amortissement d'un emprunt obligataire est similaire par bien des aspects à celui de l'emprunt indivis. Les relations décrites par ce tableau sont là encore vérifiées quelle que soit l'hypothèse de remboursement adoptée : annuités constantes, amortissements constants ou *in fine*.

année	Dette en début d'année		Intérêt de l'année	Amortissement de la période		Annuités a_p (6)=(3) +(5)	Dette au terme de l'année	
	d_{p-1} (1)	$d_{p-1}.V_n$ (2)=(1).V_n	(3)=(2).i	μ_p (4)	$m_p=\mu_p.V_n$ (5)=(4). V_n		d_p (7)=(1)-(4)	$d_p.V_n$ (8)=(7).V_n
1	N	$D_0=N.Vn$	$N.V_n.i$	μ_1	$m_1=\mu_1.V_n$	$a_1=N.V_n.i+\mu_1.V_n$	$d_1=N-\mu_1$	$D_1=d_1.V_n$
2	d_1	$d_1.V_n$	$d_1.V_n.i$	μ_2	$m_2=\mu_2.V_n$	$a_2=d_1.V_n.i+\mu_2.V_n$	$d_2=d_1-\mu_2$	$D_2=d_2.V_n$
3	d_2	$d_2.V_n$	$d_2.V_n.i$	μ_3	$m_3=\mu_3.V_n$	$a_3=d_2.V_n.i+\mu_3.V_n$	$d_3=d_2-\mu_3$	$D_3=d_3.V_n$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
p	d_p	$d_{p-1}.V_n$	$d_{p-1}.V_n.i$	μ_p	$m_p=\mu_p.V_n$	$a_p=d_{p-1}.V_n.i+\mu_p.V_n$	$d_p=d_{p-1}-\mu_p$	$D_p=d_p.V_n$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
n-1	d_{n-2}	$d_{n-2}.V_n$	$d_{n-2}.V_n.i$	μ_{n-1}	$m_{n-1}=\mu_{n-1}.V_n$	$a_{n-1}=d_{n-2}.V_n.i+\mu_{n-1}.V_n$	$d_{n-1}=d_{n-2}-\mu_{n-1}$	$D_{n-1}=d_{n-1}.V_n$
n	d_{n-1}	$d_{n-1}.V_n$	$d_{n-1}.V_n.i$	μ_n	$m_n=\mu_n.V_n$	$a_n=d_{n-1}.V_n.i+\mu_n.V_n$	$d_n=d_{n-1}-\mu_n=0$	$D_n=0$

Le nominal D_0 d'un emprunt est divisé en N fractions d'égal montant V_n dinars. On aura ainsi, $D_0=N.V_n$

Chaque prêteur reçoit un titre appelé obligation. La société qui emprunte émet donc N obligations chacune ayant un nominal égal à V_n.

A la fin de la première année d'existence de l'emprunt l'annuité a_1 est versée aux prêteurs de la façons suivante : (rappelons que $a_1 = D_0.i + m_1$). L'intérêt $D_0.i$ qui s'écrit aussi $N.V_n.i$ est versé aux porteurs de N obligations souscrites, chaque obligations fournissant ainsi à son propriétaire un intérêt $V_n.i$, intérêt pour un an du capital prêté, qu'on appelle coupon annuel d'intérêt et qui demeurera constant tout au long de l'existence de l'emprunt. L'obligation peut donc être qualifiée de valeur mobilière à revenu fixe.

L'amortissement m_1 est réparti de façon égale entre $m_1/V_n=\mu_1$ obligations, tirées au sort parmi N obligations émises. L'amortissement m_1 est donc égal à $\mu_1.V_n$. on rend ainsi au porteurs de ces μ_1 obligations le capital qu'ils avaient prêté un an auparavant, à l'émission de l'emprunt. Ces obligations sont dites amorties (remboursées). Elles perdent dès lors toute existence et ne confèrent plus aucun droit.

L'annuité a_1 s'écrit donc $a_1= N.V_n.i+\mu_1.V_n$

A la fin de la seconde année l'annuité $a_1=D_1.i+ m_2$ est versée aux obligataires dont le titre n'a pas été amorti à la fin de la première année ; l'intérêt $D_1.i = d_1.V_n.i$ (d_1 étant le nombre des obligations encore vivantes après le première échéance) est versé aux obligations vivantes, chacune de ces obligations recevant le coupon annuel d'intérêt $V_n.i$.

L'amortissement m_2 est réparti entre $m_2/V_n = \mu_2$ obligations tirées au sort parmi les d_1 obligations vivantes.

La seconde annuité s'écrit donc $a_2=d_1.V_n.i+\mu_2.V_n$

Et ainsi de suite
L'annuité $a_p=D_{p-1}.i+m_p$, que nous avons rencontrée en matière d'emprunt indivis s'écrira en conséquence, pour ce qui concerne les emprunts obligations :
$a_p=d_{p-1} . V_n. i+ \mu_p.V_n$
d_{p-1} étant le nombre d'obligations non encore amorties (ou encore vivantes, en circulation) après p-1 échéances, $\mu_p=m_p/V_n$
Le nombre d'obligations qui resteront amorties (après tirage au sort parmi les d_{p-1} obligations encore vivantes) à l'occasion de la $p^{ième}$ échéance.
La $n^{ième}$ et dernière annuité s'écrira $a_n=d_{n-1}.V_n.i+\mu_n.V_n$
Le nombre μn d'obligations amorties à la dernière échéance sera égal au nombre d'obligations d_{n-1} encore vivantes après n-1 échéances, puisque la nième échéance est la dernière et qu'elle éteint l'emprunt. Il n'y aura pas de tirage au sort puisque toutes les obligations vivantes vont êtres amorties.

2.3. Emprunt obligataire à annuités constantes

Le tableau ci-après reprend les expressions spécifiques aux emprunts obligataires à annuités constantes. Ces expressions s'obtiennent à partir de celle établies dans le cadre des emprunts indivis.

Emprunt indivis à annuités constantes	Emprunt obligataire à annuités constantes
Annuité constante $\mathbf{a=D_0[i/1-(1+i)^{-n}]}$	Annuité constante $\mathbf{a=N.V_n[i/1-(1+i)^{-n}]}$
Premier amortissement $\mathbf{m_1=D_0[i/(1+i)^n-1]}$	Nombre d'obligations amorties au premier tirage $\mathbf{\mu_1 = N. [i/(1+i)^n -1]}$
Loi de progression des amortissements $\mathbf{m_{p+1} =m_p(1+i)}$ **et** $\mathbf{m_p=m_1 (1+i)^{p-1}}$	Loi de progression du nombre d'obligations $\mathbf{\mu_{p+1}=\mu_p(1+i)}$ **et** $\mathbf{\mu_p=\mu_1(1+i)^{p-1}}$
Capital remboursé après p échéances $\mathbf{R_p=D_0 [((1+i)^p-1)/(1+i)^n -1)]}$	Nombre d'obligations amorties après p tirages $\mathbf{r_p= N[((1+i)^p-1)/(1+i)^n -1)]}$
Dette vivante après p échéances $\mathbf{D_p = D_0[((1+i)^n -(1+i)^p)/(1+i)^n -1)]}$	Nombre d'obligations vivantes après p tirages $\mathbf{d_p = N[((1+i)^n -(1+i)^p)/(1+i)^n -1)]}$

Remarque :
A l'exception de l'annuité constante, les formules relatives à l'emprunt obligataire s'obtiennent en divisant les membres des expressions de l'emprunt indivis par V_n, le nominal de l'obligation.

Tableau d'amortissements

Les règles de construction des tableaux d'amortissement en matière d'emprunts obligataires sont les mêmes que celles observées en matière d'emprunt indivis. La seule différence est que la somme D0 est divisée en N fractions et donc l'amortissement annuel au lieu d'être versé, en même temps que l'intérêt, à un prêteur unique, est versé aux porteurs de μ obligations. Les nombres d'obligations amorties à la fin de chaque année doivent être des nombres entiers. Ce nombre étant fréquemment fractionnaire, il est nécessaire de l'arrondir afin de parvenir à la fois à un nombre entier de titres à amortir chaque année et à une somme des nombres de titres amortis égale au nombre de titres émis. Il existe plusieurs méthodes d'arrondissement de ce nombre.

Exemple :

Un emprunt obligataire à annuités constantes présente les caractéristiques suivantes :

D_0= 500 000 D, V_n= 500, N=1000, i= 0, 12, n=5

Le nombre de titres amortis au premier rang (μ_1) peut être déterminé par trois façons:

- *par calcul préalable de l'annuité théorique :*

a= (1000) (500). **[** 0,12 /1-(1,12)$^{-5}$**]** = 138 704,87D

Le tableau d'amortissement du cas général indique l'expression de la première annuité :

a_1=N.V_n+μ_1.V_n $\Rightarrow$ μ_1=a_1-N.V_n.i/V_n = [138 704, 87 – (500 000)(0,12)]/500=**157,41**

- *par le calcul préalable du premier amortissement:*

m_1= (1000) (500) **[**. (0,12)/ (1,12)^5 –1**]**= 78 704 ,87 D

Le tableau d'amortissement du cas général indique l'expression de m_1 relativement à μ_1 (ligne 1, colonne 5) :

m_1=μ_1.V_n $\Rightarrow$ μ_1=m_1/V_n= 78 704,87/500=**157,41**

- *Directement à partir de l'expression :*

μ_1=1000. **[**0, 12/ (1,12)^5-1**]=157,41**

Les valeurs successives de μ s'obtiennent à partir de la loi de progression du nombre de titres amortis : μ_p=μ(1+i)$^{p-1}$

Le tableau ci-après reprend les valeurs théoriques successives des μ.

μ	Relation avec μ	Relation avec le μ précédent	Expression numérique	Valeur théorique
μ_1	-	-	-	157,41
μ_2	$\mu_1(1+i)$	$\mu_1(1+i)$	157,41(1,12)	176,30
μ_3	$\mu_1(1+i)^2$	$\mu_2(1+i)$	176,30(1,12)	197,46
μ_4	$\mu_1(1+i)^3$	$\mu_3(1+i)$	197,30(1,12)	221,15
μ_5	$\mu_1(1+i)^4$	$\mu_4(1+i)$	221,15(1,12)	247,69

Considérons à présent le procédé qui permet de déterminer le nombre réel d'obligations amorties. Son principe peut énoncer ainsi :
Les nombres théoriques sont arrondis à l'entier le plus proche. Si la somme des μ réels est inférieure au nombre total de titres émis N, il convient alors d'arrondir à l'entier supérieur les nombres théoriques initialement arrondis à l'entier inférieur et dont la partie fractionnaire est la plus forte. La démarche inverse permet de corriger un total supérieur à N.

L'application de cette démarche peut prendre la forme du tableau suivant :

Rangs des μ	μ théoriques	μ théoriques arrondis à l'entier le plus proche	Correction des μ à partie fractionnaire la plus forte	μ réels
μ_1	157,41	157	-	157
μ_2	176,30	176	-	176
μ_3	197,46	197	197+1	198
μ_4	221,15	221	-	221
μ_5	247,69	248	-	248
		999		1000

La construction du tableau d'amortissement est maintenant possible :

année	Dette en début d'année		Intérêt de l'année (3)=(2).i	Amortissement de la période		Annuités a_p (6)=(3) +(5)	Dette au terme de l'année	
	d_{p-1} (1)	$d_{p-1}.V_n$ (2)=(1).V_n		μ_p (4)	$m_p=\mu_p.V_n$ (5)=(4). V_n		d_p (7)=(1)-(4)	d_p.i (8)=(7).V_n
1	1000	500 000	60000	157	78500	138500	843	421500
2	834	421 500	50580	176	88000	138580	667	333500
3	667	333 500	40020	198	99000	139020	469	234500
4	469	234 500	28140	221	110500	138640	248	124000
5	248	124 000	14880	248	124000	138880	0	0
				1000	500000			

Remarques:

L'arrondissement des nombres de titres amortis a deux conséquences:

- Les nombres de titres réellement remboursés sont en progression géométrique de raison sensiblement égale à (1+i) ; ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2/\mu_1=1,121 \\ \mu_3/\mu_2=1,125 \\ \mu_4/\mu_3=1,116 \\ \mu_5/\mu_4=1,122 \end{array}\right\} =1,12$$

Cette remarque s'applique également aux amortissements.

- Les annuités réelles diffèrent sensiblement de l'unité théorique.

2.4. Emprunt obligataire à amortissements constants

Les expressions propres à l'emprunt obligataire à amortissements constants peuvent également être obtenues à partir de celles relatives à l'emprunt indivis de même nature :

Emprunt indivis à amortissements constants	Emprunt obligataire à amortissements constants
Amortissement constant **$m=D_0/n$**	Nombre d'obligations amorties à chaque tirage **$\mu=N/n$**
	Amortissement contant **$m=N.V_n /n =\mu.V_n$**
Loi de la progression des annuités **$a_{p+1} - a_p = -m.i= -D_0.i/n$**	Loi de progression des annuités **$a_{p+1} - a_p = -\mu.V_n.i = - N.V_n .i/n$**
Capital remboursé après p échéances **$R_p=p.m$**	Nombre d'obligations amorties après p tirages **$r_p =p.\mu$**
Dette vivante après p échéances **$D_p =(n-p).m$**	Nombre d'obligations vivantes après p tirages **$d_p= (n-p).\mu$**

Tableau d'amortissement :

Reconsidérons l'exemple commun :

$N=1000$, $V_n =500$, $i=0,12$; $n=5$

Détermination de l'amortissement constant :

m= (1000)(500)/5=100 000 D

Détermination du nombre de titres amortis à chaque tirage :

µ=100 000/500 = 20

Ce résultat peut également être obtenu à partir de μ = 1000/5=200

année	Dette en début d'année		Intérêt de l'année	Amortissement de la période		Annuités a_p	Dette au terme de l'année	
	d_{p-1} (1)	$d_{p-1}.V_n$ (2)=(1).V_n	(3)=(2).i	μ_p (4)	$m_p=\mu_p.V_n$ (5)=(4). V_n	(6)=(3) +(5)	d_p (7)=(1)-(4)	$d_p. V_n$ (8)=(7).V_n
1	1000	500 000	60000	200	100 000	160 000	800	40000
2	800	400 000	48000	200	100 000	148 000	600	30000
3	600	300 000	36000	200	100 000	136 000	400	20000
4	400	200 000	24000	200	100 000	124 000	200	10000
5	200	100 000	12000	200	100 000	112 000	0	0
				1000	500000			

Remarque :
Les annuités sont en progression arithmétique de raison :
$a_{p+1} - a_p = -\mu.V_n.i = -(200)(500)(0,12)=-12000$ D
Les intérêts progressent également de façon arithmétique au rythme de -12000D

2.5. Emprunt obligataire remboursable in fine

Seule la variante relative de l'emprunt indivis in fine est reprise par les emprunts obligataires de cette nature. Les notions relatives au fonds d'amortissement, évoquées pour l'indivis, ne seront plus reprises dans le cas présent.
Les propriétés spécifiques sont limitées en raison de la simplicité de cette formule de remboursement, qui suppose le paiement su seul intérêt pour les (n-1) premières annuités et du règlement du principal qui s'ajoute à l'intérêt pour la $n^{\text{ième}}$ et dernière annuité.
Formellement ce schéma correspond au cas de (n-1) annuités constantes de valeur égale :

$a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=NV_n.i$

et une dernière annuité dont la valeur est :
$a_n=NV_n.i + NV_n = NV_n\,(1+i)$

Tableau d'amortissement:

Le tableau d'amortissement de ce type d'emprunt se réduit à sa forme la plus simple et ne nécessite pas ou peu de calculs préalables à son établissement.
Reprenons de nouveau l'exemple commun.

année	Dette en début d'année		Intérêt de l'année (3)=(2).i	Amortissement de la période		Annuités a_p (6)=(3) +(5)	Dette au terme de l'année	
	d_{p-1} (1)	$d_{p-1}.V_n$ (2)=(1).V_n		μ_p (4)	$m_p=\mu_p.V_n$ (5)=(4). V_n		d_p (7)=(1)-(4)	d_p.i (8)=(7).V_n
1	1000	500 000	60000	0	0	60 000	1000	500000
2	1000	500 000	60000	0	0	60 000	1000	500000
3	1000	500 000	60000	0	0	60 000	1000	500000
4	1000	500 000	60000	0	0	60 000	1000	500000
5	1000	500 000	60000	1000	500 000	560 000	0	0
				1000	500000			

2.6. Emission et remboursement à une valeur différente du pair

Jusqu'à présent la valeur nominale V_n également appelée pair, a été à la fois au prix auquel l'obligation est émise et celui auquel elle est remboursée. Les émetteurs proposent fréquemment des obligations pour lesquelles ces trois valeurs sont distinctes.

Ainsi, une obligation sera émise à une valeur V_e, inférieure ou supérieure au pair V_n et remboursée à une valeur V_r supérieure à la valeur nominale V_n.

La différence entre V_e et V_n tient au fait que la valeur d'émission est l'un des derniers paramètres arrêtés par l'émetteur avant la mise effective sur le marché du titre. Il constitue ainsi un facteur d'adaptation de l'émission aux conditions proposées sur ce marché par les autres titres. L'offre d'une valeur de remboursement V_r supérieure à V_n constitue généralement un facteur supplémentaire de rendement fréquemment utilisé pour garantir le pouvoir d'achat du souscripteur, notamment en période de forte inflation.

Remarque :

Pourquoi le prix d'émission n'est-il pas toujours égal à la valeur nominale ?

Pour que le lancement d'un emprunt obligataire soit un succès, il faut réussir à concilier 2 objectifs opposés. En effet, l'emprunteur souhaite emprunter au taux le plus bas et le prêteur attend le rendement le plus élevé possible.

L'équilibre entre ces 2 attitudes définit le niveau du marché, mesuré par un taux de rendement qui dépend de 2 variables : le taux d'intérêt et le prix d'émission.

Pour obtenir le taux de rendement le plus proche du marché, il faut :

- Soit offrir un taux d'intérêt nominal légèrement supérieur à celui du marché et augmenter le prix d'émission (qui est alors au-dessus du pair) ;

- Soit offrir un taux d'intérêt nominal plus faible à celui du marché et baisser le prix d'émission (qui est alors au-dessous du pair). Cette solution décourage l'investisseur et est peu adoptée.

2.7. Emission à une valeur V_e différente de V_n

La différence entre la valeur d'émission V_e et le pair V_n est appelée prime d'émission. Celle –ci est négative si $V_e > V_n$ et positive dans le cas contraire.
Il convient de noter que l'introduction de cette nouvelle variable ne modifie ni la rémunération allouée aux obligataires, le calcul du coupon demeure fondé sur le valeur nominale V_n, ni les autres variables qui concourent à la construction du tableau d'amortissement. Seuls changent les taux de revient et de rendement, notions abordées plus avant.

2.8. Remboursement à une valeur V_r différente du pair

La différence V_r- V_n, constitue la prime de remboursement.
L'introduction de cette variable entraîne la modification des expressions précédente fondées sur l'égalité de V_r,V_n et V_e. Ainsi, l'expression de l'annuité de rang p devient :
$a_p=d_{p-1}.V_n.i + \mu_p.V_r$

Examinons à présent les incidences de cette distinction sur les propriétés spécifiques des trois modes de remboursement considérés :

2.8.1. Remboursement par annuités constantes

Considérons de nouveau la différence entre les annuités de rangs p et p+1 :
$a_{p+1} – a_p =(d_p.V_n.i + \mu_{p+1} . V_r)- (d_{p-1}.V_n.i +\mu_p.V_r)$
L'annuité étant constante : $a_{p+1}=a_p$
$d_p.V_n.i + \mu_{p+1} . V_r =d_{p-1}.V_n.i +\mu_p.V_r$
or :
$d_p=d_{p-1} - \mu_p \rightarrow d_{p-1}.V_n.i - \mu_p .V_n.i + \mu_{p+1}.V_r = d_{p-1}.V_n.i + \mu_p .V_r$
$\rightarrow \mu_{p+1}.V_r = \mu_p.V_r + \mu_p.V_n.i \rightarrow \mu_{p+1}= \mu_p (1+ (V_n.i/V_r))$
Posons : $i'=V_n.i/V_r \rightarrow$ $\mathbf{\mu_{p+1}= \mu_p (1+i')}$

Le nombre de titres amortis est en progression géométrique de raison (1+i'). Le taux i' est appelé taux apparent de l'emprunt. C'est le taux qui, appliqué à V_r, permet d'obtenir la valeur du coupon annuel : $V_r.i' =V_n.i$, avec $i'<i$.

Les développements étant identiques, les autres propriétés spécifiques s'obtiennent à partir des précédentes en remplaçant i par i' et V_n par V_r, exception faite du coupon, dont la détermination demeure fondée sur i et V_n.

On aura :
$\mu_p = \mu_1(1+i')^{p-1}$
$\mu_1 = N.[i'/(1+i')^n - 1]$
$a = N.V_r. [i'/1-(1+i')^{n}]$
$r_p = N[(1+i')^p - 1/(1+i')^n - 1]$
$d_p = N[(1+i')^n - (1+i')^p/(1+i')^n - 1]$

<u>Exemple :</u>
Un emprunt obligataire à annuités constantes présente les caractéristiques suivantes :
$N=1000$, $V_n=500$, $V_e=480$, $V_r=540$, $i=0,12$; $n=5$
Présenter le tableau d'amortissement.

L'établissement du tableau d'amortissement nécessite que certains calculs soient préalablement opérés.

Détermination du taux apparent :
$i' = (500/540).0,12 = 0,1111$

Détermination de l'annuité théorique constante :
Cette annuité est dite théorique car elle ne prend pas en considération le problème d'arrondi du nombre de titres à rembourser.
$a = (1000)(540)[0,1111/1-(1,1111)^{-5}] = 146\,512,48$ D

Cette annuité théorique (146 512, 48) est supérieure à l'annuité précédemment déterminée avec V_n et i (138 704, 87)

Détermination du nombre de titres amortis au premier tirage :
$\mu_1 = 1000\,[0,1111/(1,1111)^5 - 1] = 160,22$

Le rythme de croissance étant inférieur (i'<i), la valeur présente de µ1 (160,22) doit être nécessairement supérieur à ce qu'elle était initialement avec i(157,41), afin de parvenir à la même somme que celle atteinte précédemment :N.

Les μ théoriques successifs ont été déterminés à l'aide de l'expression $\mu_p = \mu_1(1+i')^{p-1}$. Les valeurs réelles obtenues après arrondissements figurent dans le tableau d'amortissement suivant :

année	Dette en début d'année		Intérêt de l'année	Amortissement de la période		Annuités a_p	Dette au terme de l'année	
	d_{p-1} (1)	$d_{p-1}.V_r$ (2)=(1).V_r	$D_{p-1}.V_n.i$	μ_p (4)	$m_p=\mu_p.V_r$ (5)=(4). V_r	(6)=(3) +(5)	d_p (7)=(1)-(4)	$d_p.V_n$ (8)=(7).V_n
1	1000	540 000	60000	160	86400	146400	840	453600
2	840	453 600	50400	178	69120	146520	662	357480
3	662	357 480	39720	198	106920	146640	464	250560
4	464	250 560	27840	220	118800	146640	244	131760
5	244	131 760	14640	244	131760	146400	0	0
				1000	500000			

Remarques :

- Les intérêts (colonne n°3) peuvent être également déterminés avec V_r et i' :

$V_n.i = V_r.i' \rightarrow d_p . V_n.i = d_p.V_r.i'$

- Les annuités réelles diffèrent sensiblement de l'annuité théorique ;
- La raison de la progression géométrique du nombre de titres amortis (μ) et des amortissements ($\mu.V_r$) diffère sensiblement de (1+i') en raison des arrondis opérés sur le nombre de titres amortis ;

2.8.2. Remboursement par amortissements constants

Le remboursement à une valeur $V_r > V_n$ entraîne deux modifications, obtenues en remplaçant i et V_n par i' et V_r :

L'amortissement constant, initialement : $m=\mu.V_n$ devient $\mathbf{m=\mu V_r}$

La loi de progression des annuités, initialement :

$a_{p+1} - a_p = - N.V_n .i/n = -\mu.V_n.i$ devient $\mathbf{a_{p+1} - a_p = - N.V_r .i'/n = -\mu.V_r.i'}$

Remboursement *in fine*, l'expression de (n-1) premières annuités constantes ne change pas. En revanche, celle de la dernière annuité devient : $a_n = NV_n.i + NV_r$ or $V_n.i = V_r.i'$ donc :

$$\mathbf{a_n = NV_r.i' + NV_r = NV_r(1+i')}$$

2.9. Taux de rendement

Selon le cas de figure, le taux de rendement est moyen ou effectif :

2.9.1. Taux de rendement moyen

Le taux de rendement moyen ou taux actuariel brut est déterminé à la date d'émission. Il est commun à l'ensemble des souscripteurs. Il s'agit du taux d'actualisation t qui égalise, à la date zéro, les valeurs actuelles des sommes versées. Concrètement, c'est le taux de rendement que tout souscripteur peut espérer réaliser en moyenne en achetant l'obligation considérée.
Cette égalité prend la forme suivante :

$$\mathbf{N.V_e = \sum a_k(1+t)^{-k}} \qquad \text{(de k=1 à n)}$$

Le tableau suivant reprend les adaptations de cette expression aux modalités de remboursement de l'emprunt obligataire.

EXPRESSION DE TAUX DE RENDEMENT EN FONCTION DES MODALITES DE REMBOURSEMENT DES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

	Annuités constantes	Amortissements constants	in fine
Expression spécifique initiale	$A_1=a_2=\ldots=a_n=a \rightarrow$ $NV_e= a[1- (1+t)^{-n}/t]$	Les amortissements étant constants, les annuités sont en progression arithmétique croissante de raison r. $N.V_e=[1-(1+t)^n/t](a_1+(r/t)+n.r)-n.r/t$	$NV_e=N.V_n.i[1-(1+t)^n/t]+N.V_r(1+t)^{-n}$
Si $V_r=V_n$	$a=NV_n[i/1-(1+i)^{-n}] \rightarrow$ $NV_e=NV_n[i/1-(1+i)^n][1-(1+t)^{-n}/t] \rightarrow$ $[1-(1+t)^{-n}/t]= V_e/V_n[1-(1+i)^{-n}/i]$	L'expression du premier terme de la suite est alors : $a_1= NV_n.i+\mu.V_n$ Et la raison : $r = -\mu.V_n.i$	$V_e=V_n.i[1-(1+t)^n/t]+V_n(1+t)^{-n}$
Si $V_r>V_n$	$a=NV_r[i'/1-(1+i')^{-n}] \rightarrow$ $NV_e=NVr[i'/1-(1+i')^{-n}][1-(1+t)^{-n}/t] \rightarrow$ $[1-(1+t)^{-n}/t]=V_e/V_r[1-(1+i')^n/i']$	Les expressions de a_1 et r deviennent : $a_1 = NV_n.i + \mu V_r$ $R= -\mu V_r.i'$	$V_e=V_n.i[1-(1+t)^n/t]+V_r(1+t)^{-n}$
Observation	Si l'obligation est remboursée à une valeur $V_r>V_n$, le souscripteur réalise un taux de rendement t supérieur à celui qu'il aurait réalisé si ce même titre avait été remboursé à la valeur nominale V_n	La valeur de r est la même quel que soit V_r car $V_n.i=V_r.i'$	Cette expression traduit l'égalité entre ce qui est payé par chaque souscripteur (Ve) et ce qu'il reçoit en échange : des intérêts pendant n périodes et remboursement à la nième de dernière période, tout exprimé à la date d'émission.

Exemple :

Calculer le taux moyen de rendement à l'émission de l'emprunt obligataire dont les caractéristiques sont les suivantes, en considérant les trois modes de remboursement :

$N=10000$; $V_n=500$, $V_e=480$, $V_r=540$, $i=0,12$; $n=5$

La valeur de remboursement étant différente du nominal, il est nécessaire de calculer en premier lieu le taux apparent :

$i'=(500)(1,12)/540 =0,1111$

Remboursement par annuités constantes :

La valeur de t s'obtient à partir de l'égalité suivante :

$1-(1+t)^{-5}/t=(480/500)[1-(1,1111)^{-5}/0,1111]= 3,276171$

La table financière n°4 comporte les valeurs suivantes :

3,352155 pour $t_1=0,15$

3,274294 pour $t_2=0,16$

Après interpolation linéaire, la valeur de t obtenue est : $t=0,15976$ soit ≈15,98%

Remboursement par amortissement constants :

Détermination de a_1 :

$a_1= (1000)(500)(0,12) + (1000/5)(540) =168\ 000$D

Détermination de r :

$r = -(1000/5)(540)(0,1111) = -12\ 000$ D

L'égalité qui permet d'obtenir t est la suivante :

$(1000)(480)= [1-(1+t)^{-5}/t]\ [168\ 000 –(12000/t) + (5)(-12000) – ((5)(-12000)/t)]$

Ou $480=[1-(1+t)^{-5}/t]\ [168–(12/t) + (5)(-12) – ((5)(-12)/t)]$

Les valeurs obtenues après plusieurs essais successifs sont :

$V_{e1} = 493,86$ pour $t_1=0,15$

$V_{e2} = 472,63$ pour $t_2=0,17$

L'interpolation linéaire permet d'obtenir le valeur de t :

$t= 0,16306$ soit 16,31%

Remboursement in fine :

La valeur de t est donnée par l'égalité suivante :

$480 = (500)’0,12)\ [1-(1+t)^{-5}/t] + 540(1+t)^{-5}$

Plusieurs essais ont permis d'obtenir l'intervalle suivant :

$V_{e1} = 486,44$ pour $t_1=0,14$

$V_{e2} = 477,92$ pour $t_2=0,145$

La valeur obtenue par interpolation linéaire est : $t=0,1438$ soit 14,38%

<u>Remarques :</u>

1. **Les taux de rendement déterminés pour les trois modes de remboursement sont supérieurs au taux nominal de 12%.** Cette relation s'explique par

l'ensemble des avantages consentis aux souscripteurs : prime d'émission de 20D (500-480) et prime de remboursement de 40D (540 - 500). Plus les avantages octroyés sont importants et plus le taux de moyen de rendement surpasse le taux nominal. En l'absence de tels avantages, en d'autres termes si $V_e=V_n=V_{r,}$ le taux moyen de rendement et le taux nominal s'égalisent : t=i

2. **Le taux moyen de rendement est déterminé à l'émission**, il ne prend pas en considération les dates auxquelles les obligations seront tirées au sort, ces dates n'étant pas encore connues, exception faite de l'emprunt obligataire in fine, qui par définition, offre un tel avantage ;

3. **Le taux moyen de rendement à l'émission ou taux actuariel brut de l'emprunt obligataire remboursable par amortissement constants est plus élevé** : 16,31%, vient ensuite celui de l'emprunt obligataire à annuités constantes (15 ,98%) puis celui in fine : 14,38%. Cet ordre était prévisible, dans la mesure où il est fondé sur les résultats d'un calcul d'actualisation. L'effet minorant de l'actualisation étant plus important vers la fin que les premières années. L'in fine ; dont la part la plus importante (l'amortissement du capital) est concentrée sur la dernière année, est en conséquence le plus pénalisé. Il est de même pour l'emprunt remboursable par annuités constantes, dont les amortissements les plus importants apparaissent sur les dernières années au moment même ou l'effet minorant de l'actualisation est le plus important.

2.9.2. Taux de rendement effectif

Le calcul de ce taux implique que se soit connue la date à laquelle le titre considéré est tiré au sort pour être remboursé. Ce taux correspond alors au taux de rendement effectivement réalisé par le porteur de ce titre compte tenu de l'horizon d'investissement, qui est alors connu. Des trois modalités d'amortissement considérées, seul l'obligation remboursable in fine présente la particularité d'être souscrite par des obligations qui connaissent dès l'émission la date de remboursement du titre.
Soit r le taux de rendement effectif réalisé par un obligataire ayant souscrit une obligation amortie au $p^{\text{ième}}$ tirage au sort. Cet obligataire recevra p fois le coupon ($c=V_n.i$) et percevra la valeur de remboursement (V_r) au terme de la $p^{\text{ième}}$ période en échange du versement à l'instant zéro, date d'émission, de V_e dinars. L'équivalence entre ces valeurs s'écrit :

$$\mathbf{V_e = c\,(1+r)^{-1} + c\,(1+r)^{-2} + \ldots + (V_r + c)\,(1+r)^{-p}}$$

La prise en considération des modalités de remboursement : annuités constantes, amortissements constants ou in fine, n'a aucun sens dans le cadre de la recherche de ce taux.

Deux éventualités doivent être considérées, selon la valeur de remboursement :

$V_r = V_n$	$V_r > V_n$
$V_e = c\,[1-(1+r)^{-p}/r] + V_n\,(1+r)^{-p}$	$V_e = c\,[1-(1+r)^{-p}/r] + V_r\,(1+r)^{-p}$

<u>Exemple :</u>

Un emprunt obligataire à annuités constantes présente les caractéristiques suivantes :

$N= 1000$, $V_n =500$, $V_e =480$, $V_r = 540$, $i=0,12$; $n=5$

Calculer le taux de rendement effectif réalisé par l'obligation dont le titre sort au premier tirage. Même question pour le dernier tirage.

Taux de rendement réalisé si le titre sort au premier tirage :

L'obligation verse 480 D pour l'achat de ce titre et reçoit en échange le paiement du premier coupon $c = V_n.i = 500 . 0,12 = 60$, ainsi que la valeur de remboursement : 540. Déterminons le taux r qui permet d'égaliser ces termes à l'instant zéro.

$480 = 60(1+r)^{-1} + 540(1+r)^{-1} = (60 + 540)(1+r)^{-1}$

$(1+r)^{-1} = 480/600 \rightarrow (1+r) = 600/480$

$r = (600/480) -1=0,25$ soit 25%.

Taux de rendement réalisé si le titre sort ai dernier tirage :

L'équivalence à la date zéro entre ce que l'obligation verse (480D) et la valeur actuelle de ce qu'il doit recevoir s'écrit :

$480 = 60 [1+ (1+r)^{-5}/r)] + 540(1+r)^{-5}$

La recherche du taux doit être orientée à partir des éléments suivants :

- les taux de rendement effectifs tendent à décroître à mesure que les dates de tirages considérées s'éloignent de la date démission. La valeur de r recherchée est donc nécessairement inférieure à celle du taux de rendement de l'obligation sortie au premier tirage : 25%.
- Le tirage considéré étant le dernier, la valeur de r est nécessairement inférieure au taux de rendement moyen à l'émission déterminé précédemment : 15,98%.

- Enfin, le taux r est également supérieur au taux nominal (12%) en raison de l'existence des primes d'émissions et de remboursement ;

La valeur de r devrait donc être comprise entre 12% et 15 ,98%. Plusieurs essais permettent de parvenir à l'intervalle de taux suivant :
V_e1 =486,44 pour r = 0,14
V_e2 = 477,92 pour r = 0,145
La valeur de r obtenue par interpolation linéaire est :
r = 0,1438 soit 14,38%

Remarque :
Cette valeur est identique à celle du taux moyen de rendement à l'émission d'un emprunt obligataire in fine, déterminée dans l'exemple précédent. Cela s'explique par la particularité de ce mode de remboursement où la date de remboursement de titre est connue à l'avance te correspond à celle considérée dans le cadre de cet exemple. Ce constat rappelle de nouveau qu'il est indifférent de considérer l'un ou l'autre des modalités de remboursement dans le cadre du calcul du taux de rendement.

2.10. Taux de revient

Le calcul de ce taux répond à la préoccupation du seul emprunteur qui est le coût des fonds obtenus par l'émission d'un emprunt obligataire. La société émettrice perçoit une valeur égale au débours global des souscripteurs ($N.V_e$), minorée des frais engendrés par l'émission (F). Le taux de revient t'est obtenu en égalisant à la date zéro le produit net reçu par l'emprunteur ($N.V_e$ – F) et ce qu'il donne en échange : la valeur actuelle des versements destinés aux souscripteurs.

$$\mathbf{(N.V_e - F) = \sum a_k(1+t')^{-k}} \quad \text{(de k=1 à n)}$$

Cette expression, est similaire dans le principe à $N.V_e = \sum a_k(1+t)^{-k}$, qui permet de déterminé le taux moyen de rendement à l'émission.
De la même façon que dans ce dernier cas, les adaptations de l'expression $(N.V_e - F) = \sum a_k(1+t')^{-k}$ aux modalités de remboursement de l'emprunt obligataire sont reprises par le tableau suivant :

Expression du taux de revient en fonction des modalités des remboursement des emprunts obligataires

	Annuités constantes	Amortissements constants	in fine
Expression spécifique initiale	$A_1=a_2=\ldots=a_n=a \rightarrow$ $(NV_e - F) = a[1-(1+t')^{-n}/t']$	Les amortissements étant constants, les annuités sont en progression arithmétique croissante de raison r. $(N.V_e - F)=[1-(1+t')^{n}/t'](a_1+(r/t')+n.r)-n.r/t'$	$(NV_e - F)=N.V_n.i[1-(1+t')^{n}/t']+N.V_r(1+t')^{-n}$
Si $V_r=V_n$	$a=NV_n[i/1-(1+i)^{-n}] \rightarrow (NV_e - F)=NV_n[i/1-(1+i)^{n}][1-(1+t')^{-n}/t'] \rightarrow [1-(1+t')^{-n}/t']=(V_e-f)/V_n[1-(1+i)^{-n}/i]$	L'expression du premier terme de la suite est alors : $a_1= NV_n.i+\mu.V_n$ Et la raison : $r = -\mu.V_n.i$	$(V_e - f)=V_n.i[1-(1+t')^{n}/t']+V_n(1+t')^{-n}$
Si $V_r>V_n$	$a=NV_r[i'/1-(1+i')^{-n}] \rightarrow (NV_e-F)=NVr[i'/1-(1+i')^{-n}][1-(1+t')^{-n}/t'] \rightarrow [1-(1+t')^{-n}/t']=(V_e - f)/V_r[1-(1+i')^{n}/i']$	Les expressions de a_1 et r deviennent : $a_1 = NV_n.i + \mu V_r$ $r= -\mu V_r.i'$	$(V_e-f)=V_n.i[1-(1+t')^{n}/t']+V_r(1+t')^{-n}$
Observation	f= F/N représente les frais d'émission relatifs à un titre		

Remarques :

Dans théorique où l'émission n'engendre pas de frais à a charge de l'emprunteur, le taux de revient est égal au taux de rendement à l'émission : $f=0 \rightarrow t'=t$.

Dans le cas le moins hypothétique où l'émission engendre des frais, le taux de revient est alors supérieur au taux de rendement à l'émission : $f\neq 0 \rightarrow t'>t$.

Exemple :

Déterminer le taux de revient de l'emprunt obligataire in fine dont les caractéristiques suivantes :

N= 1000, V_n =500, V_e =480, V_r = 540 , i=0,12 ; n=5 et F= 12000D.

Le taux apparent, calculé précédemment est égale à i'=0,1111. Les frais unitaires d'émission s'élèvent à :

f= 12000/1000 =12D

Le taux t' est donné par l'égalité suivante : $(480-12) = 60\ [1-(1+t')^{-5}/t'] + 540(1+t')^{-5}$.

La recherche de t' peut être orienté à partir du taux moyen de rendement à l'émission déterminé précédemment : 14,38%. L'intervalle obtenu est le suivant :

477,92 piour t'1=0,145

461,49 pour t'2=0,155

La valeur obtenue après interpolation linéaire est

t' =0,1510 soit **15,10%**

Exercices

Exercice 1:

Une société emprunte un capital de 250 000D remboursable en annuités constantes pendant 10 ans. Le taux retenu lors des négociations est 2,5%. Calculer :

- Le montant de l'annuité constante ;
- Le dernier amortissement ;
- Le capital remboursé après le 7ème versement ;
- Le capital restant à rembourser après paiement de la 4ème annuité ;

Exercice 2 :

Un emprunt de nominal D_0 est amortissable en 10 échéances annuelles constantes.
On vous donne :
- le montant du 3ème amortissement est 23 460,22 D,
- le montant du 6ème amortissement est 30 381,61 D,
On vous demande de :

- Calculer le taux d'emprunt, le capital emprunté, le montant de l'annuité, le capital restant dû après paiement de la 7ème annuité ;
- Présenter la partie du tableau d'amortissement relative aux trois dernières échéances.

Exercice 3 :

Une société a emprunté le 01/01/N une certaine somme remboursable en 6 annuités constantes, la première étant payable le 31/12/N. La somme du 2ème et du 3ème amortissement s'élève à 27 720 D, la somme des deux premiers à 25 200 D.
Calcule (dans l'ordre) :

- Le taux de l'emprunt ; le 1er amortissement ; le montant de l'annuité, le dernier amortissement;

Si la société décidait de rembourser intégralement le montant de sa dette restant dû en début de la 3ème année, quel serait le montant du versement unique ;

Exercice 4:

Un emprunt obtenu au taux semestriel de 4,25% est amortissable au moyen de semestrialités constantes de 2620,92 D chacune. Le dernier amortissement surpasse le premier de 2018,15 D. Calculer le nominal initial de l'emprunt.

Exercice 5 :

Une société emprunte un capital de 250000 D remboursable en annuités constantes pendant 10 ans. La 1ère annuité serait à verser le 31/12/N, le taux retenu lors des négociations est 2,5%. Calculer :

1- le montant de l'annuité constante ;
2- le dernier amortissement ;
3- le capital remboursé après le 7ème versement ;
4- le capital restant à rembourser après paiement de la 4ème annuité ;

Exercice 6

Une société de crédit prête une somme d'argent remboursable chaque fin d'année en 20 annuités constantes tel que le produit du premier et du troisième amortissement soit égal à 2241613,400 D et que le produit du 5e amortissement par le 6e soit égal à 5064949,200 D. Calculer : Le taux d'intérêt, le premier amortissement, l'annuité, la somme empruntée (arrondir à l'unité supérieure) et la dette amortie et non amortie après le paiement de la 8ème annuité.

Exercice 7 :

Pour financer ses exploitations, une société commerciale contracte auprès d'une banque un emprunt remboursable en six annuités de fin de période. Du tableau d'amortissement confectionné par les services bancaires, on pouvait lire :
- annuité de remboursement 20 336,30 D,
- 6ème amortissement 19185,00 D ;

Calculer :

- Le taux d'intérêt ;
- Le montant de l'emprunt ;
- Construire le tableau d'amortissement (les calculs seront arrondis à deux chiffres significatifs ;

Exercice 8 :

Le 1er janvier de l'année N, une entreprise emprunte un capital remboursable par annuités constantes, la première payable le 31 décembre de la même année. On vous communique les éléments suivants :

- montant du 2ème amortissement : 38 096,74D
- montant du 7ème amortissement : 50 264,66D
- montant du 13ème amortissement : 70 099,14D ;

1. calculer le taux de cet emprunt,
2. sachant que le montant de l'annuité constante est 82 782,33D, calculer le montant de l'emprunt.
3. Calculer la durée

Immédiatement après le paiement de la cinquième annuité, le débiteur envisage de s'acquitter du solde de sa dette par 48 mensualités constantes, la première échéant dans un mois. Le taux appliqué demeure le même.

4. Calculer le montant de ces mensualités ;

5. Présenter les deux premières et les deux dernières lignes du tableau d'amortissement.

Exercice 9 :

Une personne emprunte 20 000D au taux effectif d'intérêt de 5% par année. A la fin de chaque année, il paie l'intérêt. A la fin de la 8ème année, en plus de payer l'intérêt, il rembourse le 20 000D emprunté. Pour accumuler ce montant de 20 000D, il met en place un fonds d'amortissement en faisant 8 paiements égaux, un à la fin de chaque année, dans un placement rémunéré au taux effectif d'intérêt de 3% par année.

- Déterminer le montant net du prêt immédiatement après le 2ème versement dans le fonds.
- Déterminer le montant net d'intérêt pour la 4ème année.

Exercice 11 :

Une personne ayant placé au début de chaque année et pendant 15 ans une somme constante « x » au taux de 6%, à une société qui doit le lui rembourser en 20 ans au taux de 7% (le premier amortissement devant avoir lieu une année après l'emprunt).

Première modalité de remboursement : au moyen d'une annuité constante.

Sachant que le 3ème amortissement s'élève à 8 378,264 D. on vous demande de :

1- Calculer :
   a)- l'annuité de remboursement ;
   b)- le montant de l'emprunt ;
   c)- le capital amorti après le versement de la 13ème annuité ;
   d)- l'annuité de placement ;

2- De présenter les trois premières lignes du tableau d'amortissement ;

Deuxième modalité de remboursement : au moyen d'une annuité égale à l'amortissement augmenté des intérêts, calculé sur le capital restant dû. Les amortissements forment une progression arithmétique décroissante de raison « p ».

On vous demande :

1- D'exprimer en fonction de « m_1 » (1er amortissement) la raison de la progression arithmétique.
2- De présenter les 5 premières lignes du tableau d'amortissement, sachant que la somme des taux premiers amortissements est égale à 31 872 D.

Exercice 12:

Une entreprise envisage d'emprunter 2 420 000D qu'elle souhaite rembourser en 12 ans par annuités constantes. Les deux taux d'intérêt qui correspond à sa classe de risque est de 7,75%.

1- Calculer l'annuité qu'il devra verser ;

L'établissement financier lui propose la formule suivante :

- Remboursement des 24200000D au terme de la 12ème année ;
- Paiement chaque année des intérêts au taux de 7% ;
- Versements annuels constants capitalisés au taux de 4% ;

2- Calculer le montant des ces versements ;
3- Calculer la charge annuelle effective.
4- Calculer le taux correspondant à cette annuité effective dans un système classique d'annuités constantes. Conclure.

<u>Exercice 13 :</u>

Un emprunt –obligations est émis au taux facial de 6 ,5%. Les valeurs nominales et de remboursement sont confondues à 1000D. Les annuités de remboursement sont sensiblement constantes. Le capital restitué après six tirages au sort s'élève à 40665000D.

1. Calculer le nombre de titres remboursés après six tirages au sort ;
2. Calculer le nombre d'obligations remboursées au premier tirage au sort (arrondir à l'entier le plus proche) ;
3. Quel est le montant de cet emprunt, sachant que l'annuité est de 12256816,61D ?
4. Calculer la durée de remboursement.

<u>Exercice 14:</u>

Un emprunt obligataire est mobilisé au moyen de 10000 obligations de 150D de valeur nominale. Les remboursements se font au prix de 220D pendant 10 années par annuités constante. Le taux est de 5%. Calculer :

- L'annuité constante ;
- Le premier amortissement ;
- Le dernier amortissement ;
- Le nombre de titres amortit après sept tirages ;
- Les titres restants après le 5ème tirage.

<u>Exercice 15 :</u>

Les premières lignes du tableau d'amortissement concernant un emprunt obligataire remboursé au pair par annuités sensiblement constantes donnent les renseignements suivants :

n°	Annuités	Amortissements	Intérêts	Nombres d'obligations

				amorties	vivantes
1	55 378 500,00				
2			32 127 862,50	15 501	
3	55 378 500,00			16 663	
4			28 509 412,50		
5					

Retrouver toutes les caractéristiques de cet emprunt sachant que l'annuité constante est théoriquement égale à 55 378 868,61 D.

Exercice 16:

Une société ayant besoin de 5.000.000 D pour l'agrandissement de ses installations a eu recours à l'émission d'un emprunt-obligations divisé en 10.000 titres de valeur nominale égale à 500 D et émis à 490 D le titre, amortissables en 10 ans par annuités autant que possible constants, au taux de 15% l'an.

1- Calculer le montant de chacune des annuités à rembourser.
2- Calculer le nombre de titres amortissables au $5^{ème}$ et au $6^{ème}$tirages
3- Calculer le montant restant dû au début de la quatrième période c'est à dire après le paiement de la troisième annuité.
4- Sachant que l'emprunteur subit des frais s'élevant e 15 D par titre, calculer le taux de revient pour la société.

Exercice 17:

Un emprunt obligataire émis au taux de 5,75% présente les caractéristiques suivantes : Nombre d'obligation émises=10 000 ; Valeur nominale de l'obligation=500 D ; Le titre est émis à 97,5% de la valeur nominale ; La valeur de remboursement est fixée à 530 D ; Le remboursement s'effectue au moyen de 12 annuités sensiblement constantes ; Les frais d'émission supportés par l'émetteur s'élèvent à 0,32% du nominal.

1. Calculer l'annuité de remboursement ;
2. Présenter les deux premières lignes et la dernière ligne du tableau d'amortissement ;
3. Calculer le taux de rendement actuariel brut ainsi que le taux de revient de cet emprunt.

Exercice 18:

Un emprunt obligataire répond aux caractéristiques suivantes : nombre d'obligations émises = 50 000 ; nominal de l'obligation = 1 D ; valeur d'émission = 0,994 D ; taux d'intérêt i = 8,5% ; remboursement du titre au pair (à la valeur nominale) ; amortissement au moyen de 12 annuités sensiblement constantes ;

1. Présenter les 3 premières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt ;
2. Présenter la dernière ligne du tableau d'amortissement ;
3. Au bout de combien d'échéances aura-t-on amorti au moins la moitié des obligations émises ;
4. Calculer à l'émission le taux de rendement de l'emprunt ;
5. On suppose des frais d'émission égaux à 2,4% du nominal de l'emprunt ; quelle devrait être au moins la valeur qui permettrait de ne pas dépasser un taux de revient de 8,75%, de 9,25% ;
6. Calculer à l'émission le taux de revient de l'emprunt (avec une valeur d'émission de 0,994 D) ;
7. En supposant un remboursement anticipé de l'emprunt à la date 7 ; l'emprunteur devrait verser ce jour là aux obligataires, l'annuité du jour augmentée du remboursement anticipé des titres encore en circulation après paiement de cette annuité ; de quelle somme globale l'emprunteur devrait-il disposé pour faire face à ces paiement ;

LE CHOIX D'INVESTISSEMENT

Investir, c'est acquérir un bien dont on attend des avantages durables (services, argent, etc.)
L'investissement mobilise souvent d'importants moyens financiers. Cette situation implique qu'un investissement ne peut se réaliser sans étude préalable entrainant des hypothèses et des choix.

D'un point de vue **économique**, l'investissement est une part de la richesse qui est destinée à accroitre la production, par l'accroissement ou bien le renouvellement des capacités productives, afin de concrétiser les objectifs visés.

D'un point de vue **comptable**, l'investissement est toute dépense d'acquisition d'un bien ou un service consommable sur plusieurs exercices comptables et que le dépensant soit propriétaire de cet investissement.

D'un point de vue **financier**, l'investissement représente un engagement de capitaux dans une opération à partir de la quelle on envisage des gains futures étalés dans le temps généralement, c'est un engagement durable, difficilement réversible. Il s'analyse comme une sortie de fonds destinés à procurer des recettes ultérieures.

1. Les méthodes financières du choix d'investissement

Le processus décisionnel en matière d'investissement comporte deux phases principales :

- Evaluation du coût de l'investissement : elle consiste en l'évaluation du montant de l'investissement qui comprend le coût de l'investissement lui-même et le besoin en fonds de roulements d'exploitation[1] ;

[1] Sur le plan financier, réaliser un investissement ne se limite pas seulement à mobiliser les moyens financiers nécessaires à l'achat des équipements et autres moyens mais englobe également la mobilisation des moyens supplémentaires en mesure de financer l'augmentation d'activité qui s'en suit. Ce financement supplémentaire s'appelle « besoin de fonds de roulements d'exploitation. Il se définit comme étant égal à la différence entre les besoins nés du cycle d'exploitation et les ressources prévenant du cycle d'exploitation.

- Evaluation de l'exploitation dans le temps : elle consiste en la simulation dans le temps l'exploitation de l'investissement réalisé (évaluer le chiffre d'affaire attendu, les charges attendues,…)

La mesure de la rentabilité de l'investissement repose essentiellement sur le concept de *cash flow*[2]. Il existe plusieurs méthodes permettant l'appréciation de la rentabilité d'un investissement :

1.1. La valeur actuelle nette

On appelle valeur actuelle nette (VAN) l'excédent du cumul des cash flows actualisés (CFA), calculés sur toute la durée de vie de l'investissement, sur le montant total du capital investi I_0. L'investissement dont la valeur actuelle nette sera la plu élevée sera considérée comme le plus rentable.

$$\mathbf{VAN= \sum CFA- I_0 = \sum CF_n / (1+t)^n - I_0}$$

Pour chaque opération, il est peut être retenu un taux d'actualisation. Ce dernier est déterminer en fonction des taux d'intérêts des capitaux empruntés, taux d'inflation prévalent, et du taux appliqué dans le secteur activité.

Exemple :
Un investissement initial est de 400 D. Les flux de trésoreries sont donnés ci-dessous. Le taux d'actualisation retenu est de 10%.

Années	Cash flows	Facteurs d'actualisation	Cash flows actualisés
0	-400		
1	+170	$(1,1)^{-1}$	154,54
2	+140	$(1,1)^{-2}$	115,70
3	+130	$(1,1)^{-3}$	97,67
4	+120	$(1,1)^{-4}$	81,96

VAN= (154,54+11,570+97,67+81,96) – 400 = 49,88

[2] Le cash flow ne doit pas être confondu avec la mage brute d'autofinancement. Les cash flows (soldes des flux de caisse) reposent sur, comme leur noms l'indiquent sur le principe de comptabilité simple. On ne retient alors que les recettes et les dépenses. La marge brute d'autofinancement repose sur le principe de la partie double. On ne retient que les produits et les charges. Or il est impossible d'actualiser des soldes de produits et charges qui ne sont pas en totalité encaissés ou décaissés, inversement avec le cash flow, les dates d'encaissement et de décaissement sont connues, alors il est possible d'actualisé. Pour ces raisons, la notion de cash flow ne doit être utilisée que pour mesurer la rentabilité d'un investissement individualisé.

L'investissement initial réalisé a nécessité un décaissement de 400 D. La somme des valeurs actualisées des flux nets de trésorerie donne 449,88 D. Dans ce cas, l'investissement compte tenu du taux retenu peut être réalisé.
La méthode de la VAN ne permet de comparer que deux ou plusieurs projets dont les mises de fonds sont identiques. Pour détourner cette difficulté, on peut utiliser les indices de rentabilité.

Pour un investissement réalisé en une seule fois

Indice de rentabilité= valeur des CFA et de la valeur résiduelle / valeur de l'investissement initial

Pour un investissement réalisé par plusieurs fractions

Indice de rentabilité= valeur des CFA et de la valeur résiduelle / valeur actualisée des investissements successifs

Exemple : Le choix porte sur deux machines A et B
$I_{0\ A}$=1200 D, $I_{0\ B}$=1500 D, t=10%

		1	2	3
Cash flows A	-1200	+500	+600	+500
Cash flows actualisés de A	-1200	454	496	375
Cash flows B	-1500	900	400	500
Cash flows actualisés de B	-1500	818	330	376

$$VAN_A = -1200 + (454 + 496 + 375) = +126$$
$$VAN_B = -1500 + (818 + 330 + 376) = +24$$

Les deux projets sont acceptables (au tau supérieur à 10%), la machine A est cependant plus rentable que B
L'indice de rentabilité de A= 1326/1200= 1,105
L'indice de rentabilité de B= 1524/1500= 1,016

1.2. La méthode du taux de rentabilité interne (TRI)

Le taux de rentabilité interne est le taux pour lequel la valeur actuelle nette est nulle. C'est le taux *i* pour lequel il y a équivalence entre :

- Le capital investi d'une part ;

- La somme des cash flows nets, y compris la valeur résiduelle de l'investissement d'autre parts ;

La décision de retenir ou non un projet va dépendre de la position du taux d'actualisation retenu et du taux de rentabilité interne. :

- TRI < Taux d'actualisation : projet rejeté.
- TRI > Taux d'actualisation : projet accepté car il permet de couvrir le coût des ressources.

Vu notre hypothèse sur les signes des A, la VAN est une fonction strictement décroissante du taux. On voit donc que les deux critères conduiront au même résultat dans le cas de projet unique (voir exemple). Dans le cas de deux projets, on choisit celui qui a le taux le plus élevé (plus il sera élevé, plus le taux d'actualisation a des chances d'être inférieur).

Exemple : Un investissement initial est de 400 D. Les flux de trésoreries sont donnés ci-dessous. Le taux d'actualisation retenu est de 10%.

- Pour i= 15%

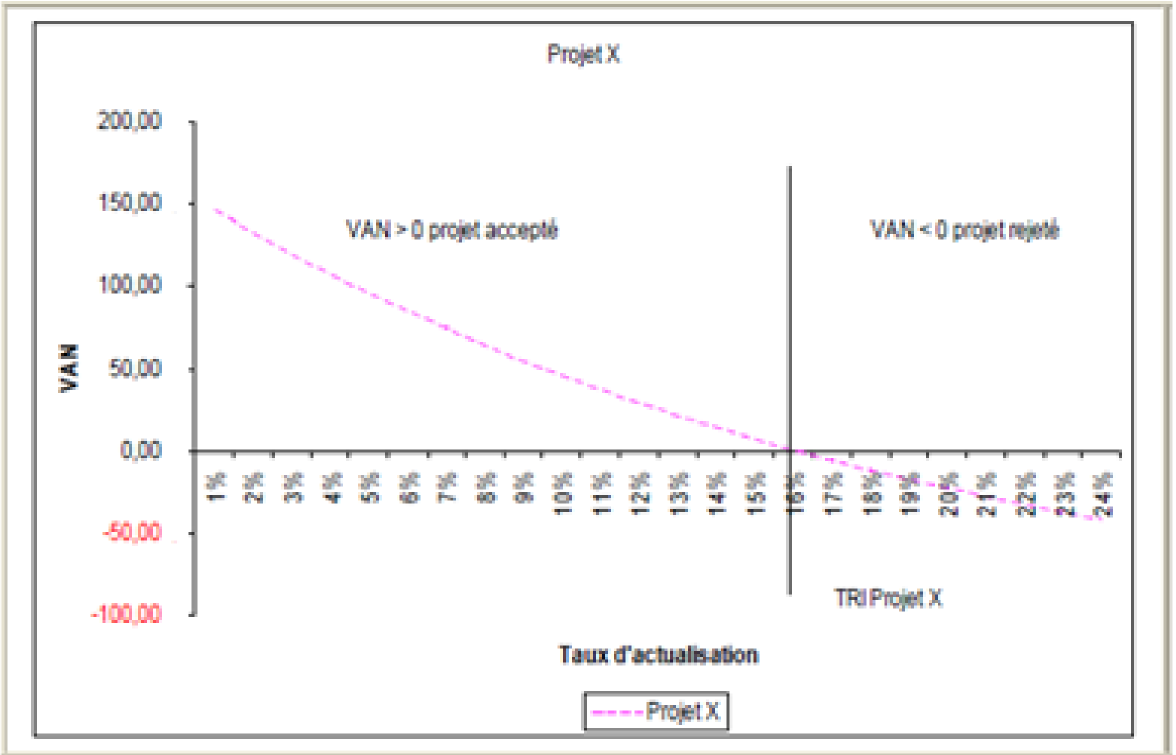
Années	Cash flows	Facteurs d'actualisation	Cash flows actualisés
0	-400		
1	+170	$(1,15)^{-1}$	147,82
2	+140	$(1,15)^{-2}$	105,86
3	+130	$(1,15)^{-3}$	85,47
4	+120	$(1,15)^{-4}$	68,61

VAN = 407,76 – 400 = 7,76

- Pour i=16%

Années	Cash flows	Facteurs d'actualisation	Cash flows actualisés
0	-400		
1	+170	$(1,16)^{-1}$	146,55
2	+140	$(1,16)^{-2}$	104,04
3	+130	$(1,16)^{-3}$	83,28
4	+120	$(1,16)^{-4}$	66,27

VAN= 400,14 - 400 = 0,14



Graphique montre l'évolution de la VAN en fonction du taux. Le TRI est l'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. Pour ce projet, les zones de rejet sont identiques. La VAN est positive, donc le projet est accepté. Mais si le taux augmente, la VAN peut devenir négative. Par exemple, si on considère un taux de 20% la VAN tombe) -28, ce qui entraine un rejet du projet. Par ailleurs le TRI est de 16,02%.

1.3. La méthode de délai de récupération du capital investi

Cette méthode prend en compte le critère de liquidité et non celui de rentabilité. Les principes est de considérer l'investissement comme une fonction sur les liquidités de l'entreprise, diminuant de la sorte ses possibilités d'adaptation à l'évolution de son environnement. Ainsi, entre deux projets d'investissement, sera retenu celui dans le délai de récupération du capital investi est le plus court.

Exemple **:** capital investi = 48

Années	1	2	**3**	4	5	6
Cash flows	13	18	24	21		
Cash flows cumulés	13	31	**55**			

Délai de récupération de 3 ans. L'investissement initial de 48 est récupéré au bout de 3 ans.
Cette méthode sert à la fois de critère de rejet et de critère de sélection.

Critère de rejet : tout projet dont le délai de récupération est supérieur à la norme fixée est rejeté.

Critère de sélection : Entre deux projets concurrents, sera retenu celui qui présente le délai de récupération le plus court.

2. Comparaison entre la méthode de la valeur actuelle nette et celle du taux de rentabilité

Ces deux méthodes apparemment équivalente, présentent toutefois des divergences sui peuvent aboutir à des résultats contradictoires. Cette divergence provient de l'écart existant entre le taux d'actualisation et le TRI. En effet, l'utilisation de la méthode de la VAN au taux t implique le réinvestissement des cash flows à ce même taux au long de la durée du projet. De même pour le TRI, les cash flows sont réinvestis au taux de rentabilité interne lui-même.

Exemple : prix d'achat A=B= 21060

	1	2	3
Cash flows A	10000	10000	10000
Cash flows B	0	10000	24000

Le TRI de A =20%, le TRI de B = 19,6% donc choisir A

La VAN de A = +3180, la VAN de B = +5235, donc choisir B

On remarque que plus les cash flows sont élevés, mais éloignés dans le temps, plus la méthode de la VAN avantage le projet. Inversement, le projet B sera pénalisé par la méthode du TRI, ce dernier étant supérieur au taux d'actualisation *t*, le taux de réinvestissement pénalise les cash flows éloignés dans le temps.
Le projet A présentait l'avantage de gérer des cash flows immédiatement, ce qui est incontestablement un avantage. On voit ainsi que la méthode du TRI est liée au critère de délai de récupération. En effet, sans actualiser, la mise de fonds relative à l'investissement est remboursée par les cash flows approximativement au bout de deux ans, (20000~21060) alors que le délai de récupération de B est nettement supérieur à 2 ans. En sens inverse, le projet B génère des cash flows plus élevés

mais également lointains. Le bénéfice actualisé est meilleur mais l'encaissement se fait attendre plus longtemps.
Quelle méthode choisir ?
Le choix dépend en fait de l'investisseur lui-même et de sa patience.

Exercices

Exercice 1:

Un ami vous propose de vendre votre machine pour un investissement de 2000 D (correspondant à sa valeur résiduelle) dans un projet ayant un cash-flow qui double chaque période sur une base de 400 D assurée pendant 3 périodes alors que le taux moyen géométrique d'intérêt du marché est de 5%.

- Calculer la VAN
- Calculer le TRI.

Exercice 2:

Un projet d'investissement présente les caractéristiques suivantes : *Capital investi* : 1 000 de matériels amortissables linéairement en 5ans ; *Durée de vie* : 5ans ; *Valeur résiduelle*, nette d'impôt, au terme des 5ans : 30.
Les prévisions d'exploitation sont données ci- dessous :

Années	1	2 à 5
Chiffre d'affaires HT	1 000	1 100
Charges variables	300	450
Charges fixes (hors amortissements)	310	340

1. Calculez les cash-flows nets attendus du projet (taux de l'IBS : 35%)
2. Calculez la VAN au taux de 9%
3. Calculez le TRI
4. Calculez le délai de récupération, au taux de rentabilité minimum exigé est de 9%

Exercice 3:

La société X désir diversifier sa production en fabricant un produit nouveau A. pour ce faire, les dirigeants hésitent entre deux matériels α et β. Tous les deux ont des durées de vie équivalentes de cinq ans. Quel que soit le choix fait, α et β sont capables d'assurer la production désirée. La différence entre les deux machines et l'hésitation des dirigeants tient au fait que α est un matériel d'occasion et que β est un nouveau matériel susceptible d'être amorti selon le mode dégressif. Par ailleurs, il est à prévoir que la machine α demandera des réparations.

Eléments d'informations

- Prix HT de α : 200 000 D ;
- Prix HT de β : 300 000D ;

- Valeurs résiduelles nulles au bout de 5 ans ;
- Prix de vente unitaire A : 8 D ;
- Coût de fabrication (sans amortissement) : 5 D ;
- Volume prévisionnel des ventes du produit A :

Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5
20 000	50 000	80 000	100 000	100 000

- Dépenses prévisionnelles d'entretient du matériel α :

Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5
10 000	30 000	40 000	40 000	40 000

- Coefficient d'amortissement dégressif utilisé pour β : 2 ;
- Amortissement linéaire pour α ;
- Les matériels sont livrés et payés le premier jour de la première année ;
- L'impôt sur les sociétés est acquitté à la fin de chaque année, il est de 50% ;

TAF : il vous est demandé, compte tenu des éléments ci-dessus de :

1. De déterminer les cash flows annuels générés par α et β ;
2. De conseiller les dirigeants sur le choix à opérer sachant que le taux d'actualisation de référence est de 12% ;
3. D'indiquer si la décision serait modifiée pour le cas où β serait amorti de manière linéaire.

Bibliographie

- Boissonade M., Mathématiques financières, Armand Colin, 1998.
- Justens Daniel, Rosoux Jaqueline, Introduction à la mathématique financière, De Boeck University,1995.
- Hamini Allal, Mathématiques Financières, OPU, tome 1&2, Alger, 2005
- Masieri Walder , Mathématiques financières ; cours et travaux pratiques (7e édition), Dalloz - Hypercours, 2001
- Piermay Michel, Hereil Olivier, Lazimi Alain, Mathématiques financières, Economica. 1998
- Posière Jean-pierre, Mathematiques Appliquées à la gestion, *collection les zoom's,* Gualino editeur, EJA, Paris, 2005
- Saada Maurice, Pour s'initier aux mathématiques financières, fascicule 1 : les procédures fondamentales, Vuibert, Paris, 1979
- Saada Maurice, Mathématiques Financières, Que sais-je ?, Presse Universitaire de France, Paris, 1985
- Zaatri Mohamed, Les mathématiques financières : les annales du CMTC, ENAI, Alger, 1984