المحور الرابع: الدفعات
Les Annuités

1.تعريف الدفعات:

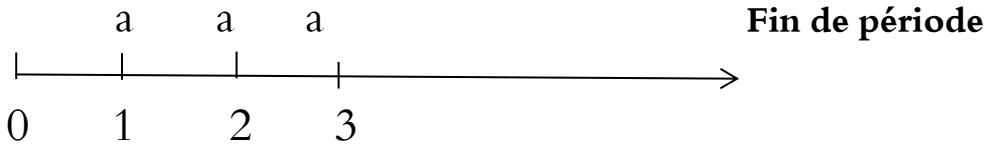
الدفعات هي مبالغ مالية تدفع دوريا في فترات زمنية منتظمة (متساوية).والفترة الموجودة بين كل دفعتين متساويتين تسمى بالمدة. في حالة الدفعات عادة ما تدفع المبالغ كل سنة في نفس التاريخ، بمعنى أن المدة سنوية، يمكن أن تدفع المبالغ كل سداسي أو كل ثلاثي أو كل شهر، وفي هذه الحالات نتكلم عن دفعات سداسية، ثلاثية أو شهرية.

غالبا ما تكون الدفعات إما لتسديد الديون أو لتكوين رأس مال معين.

عادة ما يتم تصنيف الدفعات الثابتة أو المتساوية إلى :

-دفعات **نهاية المدة**:(الدفعات العادية) وهي دفعات ثابتة تدفع عادة لتسديد الديون لذلك تسمى دفعات الاستهلاك، وتدفع في نهاية كل فترة سداد.

-دفعات **بداية المدة**: تدفع في الغالب لتكوين رأس مال ، وتدفع في بداية كل فترة لتكوين رأس مال(دفعات التوظيف) .



2.الدفعات الثابتة في نهاية المدة:Annuités constantes de fin de période

هي دفعات متساوية تسدد في نهاية كل فترة ، حيث تكون بغرض تسديد دين أو تكوين قيمة اهتلاك، بداية الفترة الأولى يسمى أصل سلسلة الدفعات.

1.2 القيمة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة في نهاية المدة:

نرمز ب:

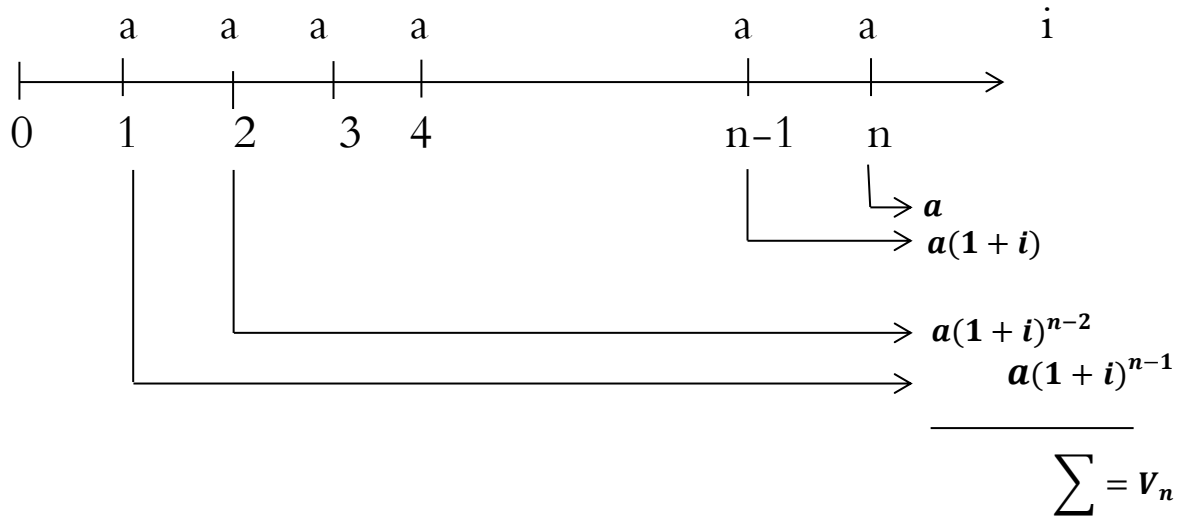
a : مبلغ الدفعة الثابتة.

i: معدل التوظيف بفائدة مركبة.

n: عدد الدفعات (الفترات)

V_n : القيمة المحصلة لسلسلة الدفعات في الزمن n

وهذا كما يوضحه الشكل التالي:



إذن لدينا:

القيمة المحصلة الكلية هي مجموع القيم المحصلة لكل الدفعات:

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$
$$V_n = a[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

القيمة المحصلة على شكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول هو **a** وحدها الأخير هو $a(1+i)^{n-1}$ وأساسها q=1+i

نعلم أن : $+q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.\ \ avec\ q \neq 1$

بوضع **q=1+i** نجد:

$$V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

وعليه تكون القيمة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة "نهاية المدة" كما يلي:

$$\boldsymbol{V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$\frac{(1+i)^n-1}{i}$ ⟵نستعمل الجدول المالي رقم 03.

مثال1:

نريد حساب جملة 4 دفعات سنوية مبلغ الدفعة 10000دج، تدفع الأولى في نهاية السنة الأولى.معدل الفائدة 6%

نطبق علاقة القيمة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة لنهاية المدة لأن الدفعة الأولى تدفع نهاية السنة الأولى:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10000\frac{(1+0{,}06)^4 - 1}{0{,}06}$$

$$V_4 = 10000 \times 4{,}374616 = 43746{,}16\ DA$$

الجدول المالي رقم 3 يعطي القيمة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة قيمة الدفعة 1 دينار، وفي المثال عند تقاطع نقرأ مع السطر الموافق للمدة$n=4$ العمود الموافق ل $i= 6\%$:

$\frac{(1+0,06)^4-1}{0,06}$=4,374616

وبالضرب في 10000نجد V_4=43746,16

ويمكننا حساب الفائدة الناتجة عن سلسلة الدفعات كما يلي:

$$I = V_n - a \times n$$

$$I = 43746{,}16 - 10000 \times 4 = 3746{,}16\ DA.$$

2.2 استخدام قانون جملة الدفعات الثابتة:

1.2.2–حساب مبلغ الدفعة:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i} \Longleftrightarrow \quad a = V_n\ \frac{i}{(1+i)^n-1}$$

مثال:

ماهو المبلغ الواجب دفعه في نهاية كل سداسي لمدة 8 سنوات لتكوين رأس مال قدره 450000دج- عند آخر دفعة-، بمعدل سداسي 4.5%

عدد الدفعات هو 16 دفعة سداسية لنهاية المدة n=8×2=16 semestres

$$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i} \Longleftrightarrow \quad a = V_n\ \frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$a = 450000\ \frac{0{,}045}{(1+0{,}045)^{16}-1} = 19806{,}86\ DA$$

$$a = 19806{,}86\ DA$$

المبلغ الواجب دفعه نهاية كل سداسي هو: 19806.86 دج

2.2.2 حساب معدل الفائدة:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i} \Longleftrightarrow \quad \frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

مثال:

ما هو معدل الفائدة الذي يمكن من تكوين رأس مال قدره 3000دج بعد 10 سنوات بدفعات متساوية قدرها 18000دج –في نهاية المدة-؟

$$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i} \Longleftrightarrow \frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^{10}-1}{i} = 16{,}6666667$$

من الجدول المالي رقم 03 نجد أن:

$$10{,}75\% < i < 11\%$$

باستخدام طريقة التناسب نجد:

16,5219938 ⟶ i=10,75%

16,6666667 ⟶ i=?

16,7220090 ⟶ i=11%

$$i = 0{,}1075 + (0{,}11 - 0{,}1075) \times \frac{16{,}6666667 - 16{,}5219938}{16{,}7220090 - 16{,}5219938} = 0{,}1093$$

$$i = 10{,}93\%$$

3.2.2 حساب عدد الدفعات:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i} \Longleftrightarrow \frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

مثال:

لتكوين رأس مال قدره 200000دج ب دفعn دفعة بقيمة 10000 للدفعة الواحدة في نهاية المدة بمعدل فائدة 8%، أوجد مبلغ الدفعةn ؟

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n-1}{i} \Longleftrightarrow \frac{200000}{10000} = \frac{(1+0{,}08)^n-1}{0{,}08}$$

$$\frac{1{,}08^n - 1}{0{,}08} = 20$$

من الجدول المالي رقم 03 نجد أن:

$$12 < n < 13$$

$$\frac{1{,}08^{12} - 1}{0{,}08} = 18{,}977126$$

$$\frac{1{,}08^{13} - 1}{0{,}08} = 21{,}495297$$

$$n = 12 + (13 - 12) \times \frac{20 - 18{,}977126}{21{,}495297 - 18{,}977126} = 12{,}4$$

هذه المدة تبقى مجرد نظرية فقط ، لذلك يمكن أن يكون هناك حل واقعي بالحالات التالية:

-دفع 12 دفعة أكبر من 10000دج

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n-1} = 200000 \frac{0,08}{(1+0,08)^{12}-1} = \mathbf{10539\ DA}$$

-دفع 13 دفعة أقل من 10000 دج

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n-1} = 200000 \frac{0,08}{(1+0,08)^{13}-1} = \mathbf{9304,36\ DA}$$

-دفع 12 دفعة بمبلغ 10000 دج وإضافة المبلغ الباقي لتكوين رأس المال المطلوب عند آخر الدفعة:

$$200000 = 10000\frac{(1+0,08)^{12}-1}{0,08} + X$$

$$X = 10228,735 \text{ da}$$

3.2 القيمة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة في نهاية المدة بعد d فترة من الدفعة الأخيرة:

$$\boldsymbol{V_n^d = V_n\,(1+i)^d = \ a\frac{(1+i)^n-1}{i}\,(1+i)^d}$$

مثال1:

استثمر شخص في مؤسسة مالية دفعات بقيمة 25000دج للدفعة الواحدة بمعدل فائدة سنوي 10.5%. تاريخ أول دفعة هو 2008/12/31، تاريخ آخر دفعة 2018/12/31.

أحسب رأس المال المكون في :

-2018/12/31.

-2019/05/31.

-2020/12/31.

الحل:

نقوم بحساب عدد الدفعات من 2008/12/31 إلى غاية 2018/12/31: نجد n=11

-رأس المال المكون في 2018/12/31

نستعمل علاقة القيمة المحصلة:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i}, V_{11} = 25000\frac{(1+0,105)^{11}-1}{0,105} = 475966,51DA$$

-رأس المال المكون في 2019/05/31

هناك 5 أشهر بعد الدفعة الأخيرة لذا يمكن حساب رأس المال كما يلي:(الحل التجاري أو الحل العقلاني)

$$V_{11}^{\frac{5}{12}} = V_{11}\,(1+0,105)^{\frac{5}{12}} = 496185,43 \text{ DA}$$

$V_{11}^{\frac{5}{12}} = V_{11}\left(1 + \frac{5}{12} \times 0{,}105\right) = 496790{,}04\ DA$ أو: (الحل العقلاني)

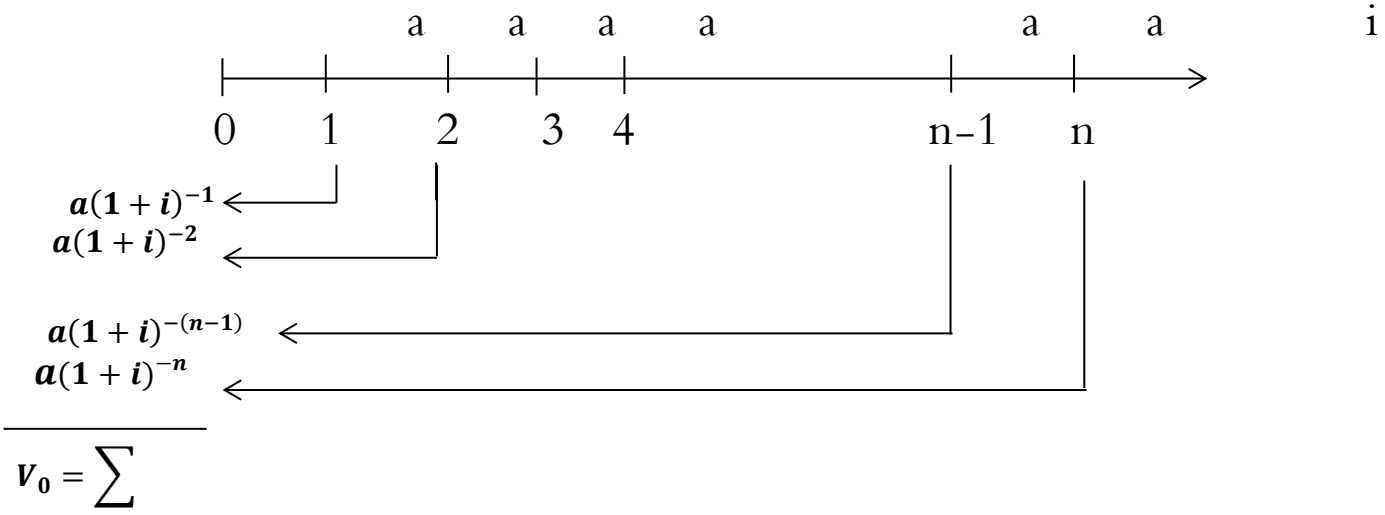
-رأس المال المكون في 2020 /12/31

$$V_{11}^{2} = V_{11}\,(1 + 0{,}105)^{2} = 581167{,}008\ DA$$

4.2 القيمة الحالية لسلسلة دفعات نهاية المدة:

القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة هي مجموع القيم الحالية لعدد الدفعات عند إمضاء عقد القرض أو الاستثمار وهذا في الزمن 0 أي فترة قبل الدفعة الأولى.

وهذا كما يوضحه الشكل التالي:



إذن :

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-n}$$

القيمة الحالية على شكل متتالية هندسية متناقصة حدها الأول $(1+i)^{-1}$ a وحدها الاخير $a(1+i)^{-n}$ وأساسها $q=(1+i)^{-1}$ وعدد حدودها n حد.

وعليه تصبح المعادلة كما يلي:

$$V_0 = a(1+i)^{-1}\,\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1}$$

نضرب البسط والمقام في$(1+i)$ نجد:

$$V_0 = a(1+i)^{-1}\,\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1} \times \frac{1+i}{1+i} = a\,\frac{(1+i)^{-n}-1}{-i}$$

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

كما يمكن أن نكتب: $V_0 = V_n\,(1+i)^{-n}$

العبارة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ ← نستعمل الجدول المالي رقم **04**

مثال:

اشترى شخص جهاز يسدد ب 8 دفعات ثابتة في نهاية المدة، قيمة الدفعة 7000دج بمعدل 9%، ما هو ثمن الجهاز؟

المطلوب ثمن الجهاز: أي القيمة الحالية

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 7000\frac{1-(1+0{,}09)^{-8}}{0{,}09}$$

$V_0 =$ الجدول مالي رقم 04 يعطي القيمة $\frac{1-(1+0{,}09)^{-8}}{0{,}09} = 5{,}534819$

$$7000 \times 5{,}534819 = 38743{,}73\ DA$$

5.2 استخدام قانون القيمة الحالية:

1.5.2 حساب قيمة الدفعة:

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Longleftrightarrow a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

مثال:

ماهي قيمة الدفعة الواجب دفعها نهاية كل سنة لتسديد قرض بقيمة 350000 دج من خلال دفع 14دفعة ثابتة. معدل الخصم 10.5%

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Longleftrightarrow a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$a = 350000\,.\frac{0{,}105}{1-(1+0{,}105)^{-14}}$=48813,31.

a=48813,31 DA

2.5.2 حساب المدة(عدد الدفعات):

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Longleftrightarrow \frac{V_0}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال:

اشترت مؤسسة آلة انتاج بمبلغ 200000دج، دفعت نصفها والبقية تسدد بأقساط متساوية قيمة الدفعة 25000 دج، الأولى بعد سنة بمعدل 8% سنويا، ما هو عدد الدفعات؟

$$V_0 = \frac{1}{2}.200000 = 100000$$

$$\frac{V_0}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Longleftrightarrow \frac{100000}{25000} = \frac{1-(1+0{,}08)^{-n}}{0{,}08}$$

$$\frac{1-(1+0{,}08)^{-n}}{0{,}08} = 4$$

باستعمال اللوغاريتم النيبيري نجد:

$$1{,}08^{-n} = 0{,}68$$

$$Ln1{,}08^{-n} = Ln0{,}68 \Leftrightarrow n = -\frac{Ln0{,}68}{Ln1{,}08} = 5{,}011.$$

من الجدول المالي رقم 04 نجد: $5 < n < 6$

وبالتالي أمام المؤسسة 3خيارات:

-إما أن تدفع دفعة أكبر من 25000دج لمدة 5 سنوات.

-إما أن تدفع دفعة أصغر من 25000دج لمدة 6 سنوات.

-أو أن تدفع دفعة بقيمة 25000 دج لمدة 5 سنوات وباقي المبلغ يدفع مع الدفعة الأخيرة (الدفعة السادسة).

الحالة الأولى: n=5

$$a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 100000.\frac{0{,}08}{1-(1+0{,}08)^{-5}} = 25045{,}65\ DA$$

أو:

$$100000 = 25000\frac{1-(1+0{,}08)^{-5}}{0{,}08} + X(1+0{,}08)^{-5}$$

$$X = \frac{100000-99817{,}75}{1{,}08^{-5}} = 267{,}78\ \text{DA}$$

بمعنى 4 دفعات بقيمة 25000دج و الدفعة الخامسة تساوي 25000+267.78= 25267.78دج

الحالة الثانية:n=6

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 100000.\frac{0,08}{1-(1+0,08)^{-6}} = 21631,54\ DA$$

أو:

$$100000 = 25000\frac{1-(1+0,08)^{-6}}{0,08} - Y(1+0,08)^{-6}$$

$$\text{Y}= \frac{100000-115572}{-1,08^{-6}} = 24710,8\ \text{DA}$$

بمعنى 5 دفعات بقيمة 25000دج و الدفعة السادسة تساوي 25000-24710.8= 289.2دج

3.5.2 حساب المعدل :

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow \frac{V_0}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال:

سلسلة 10دفعات بقيمة 25000دج للدفعة الواحدة، قيمتها الحالية 140000دج، أوجد المعدل.

$$\frac{V_0}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow \frac{140000}{25000} = \frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{i} = 5,6$$

من الجدول المالي رقم 04 نجد : $12\% < i < 12,25\ \%$

5,650223 ⟶ i=12%

5,6 ⟶ i=?

5,5928671 ⟶ i=12,25%

باستخدام طريقة التناسب نجد:

$$i = 0,1225 - (0,1225 - 0,12) \times \frac{5,6 - 5,5928671}{5,650223 - 5,5928671} = 0,1203$$

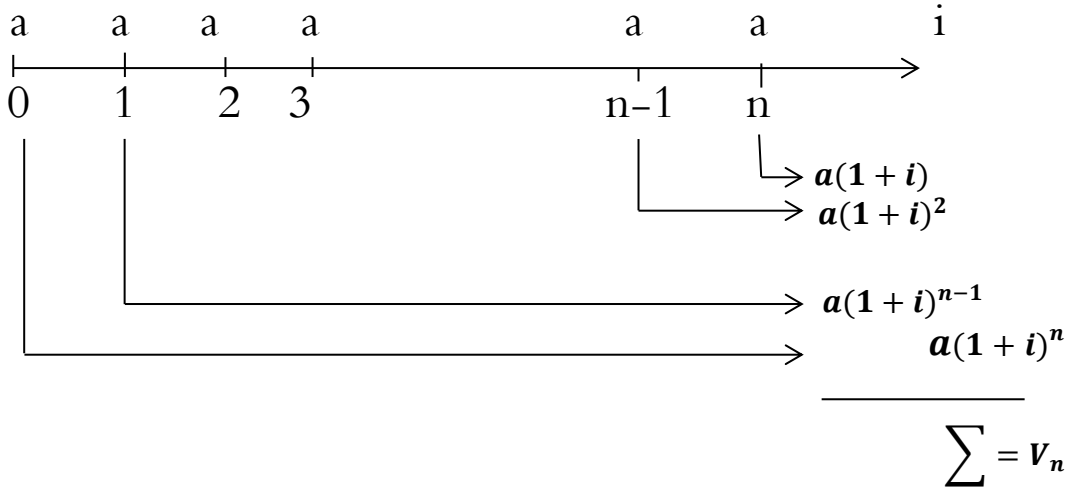
$$i = 12,22\%$$

3.دفعات بداية المدة: (دفعات الاستثمار أو التوظيف)

دفعات بداية المدة هي تلك الدفعات التي تدفع بداية كل فترة سداد أو تكوين رأس مال، أما جملتها فتحسب في نهاية مدة سداد القرض أو تكوين رأس المال أي بعد القسط الأخير بفترة زمنية واحدة.(الدفعة الأولى تدفع يوم امضاء العقد)

1.3 القيمة المحصلة لدفعات بداية المدة:

هي مجموع القيم المحصلة الجزئية لكل الدفعات، ويمكن توضيح ذلك في الشكل الموالي:



إذن لدينا:

$$V_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$
$$V_n = a(1+i)[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

القيمة المحصلة على شكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول هو $\mathbf{a(1+i)}$

وأساسها $q=(1+i)$

$$V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

وعليه تكون القيمة المحصلة لسلسلة دفعات بداية المدة كما يلي:

$$\boldsymbol{V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

مثال:

وظف شخص في بداية كل سنة مبلغ 9000 دج لمدة 12 سنة، إذا كان معدل التوظيف هو 6%.

$$V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 9000(1+0{,}12)\frac{(1+0{,}12)^{12} - 1}{0{,}12}$$

$$V_{12} = 160939{,}23\ DA$$

2.3 القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

هي عبارة عن مجموع القيم الحالية لكل الدفعات يوم إمضاء العقد:

إذن :

$$V_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-n}$$

القيمة الحالية على شكل متتالية هندسية متناقصة حدها الأول a وحدها الأخير $a(1+i)^{-n}$ وأساسها $q=(1+i)^{-1}$.

وعليه تصبح المعادلة كما يلي:

$$V_0 = a\,\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1}$$

نضرب البسط والمقام في(1+i) نجد:

$$V_0 = a\,\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1} \times \frac{1+i}{1+i} = a(1+i)\frac{(1+i)^{-n}-1}{-i}$$

$$\boldsymbol{V_0 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

كما يمكن أن نكتب: $V_0 = V_n\,(1+i)^{-n}$

مثال:

مبلغ مالي مكون من توظيف 8 دفعات متساوية ، قيمة الدفعة 10000دج .

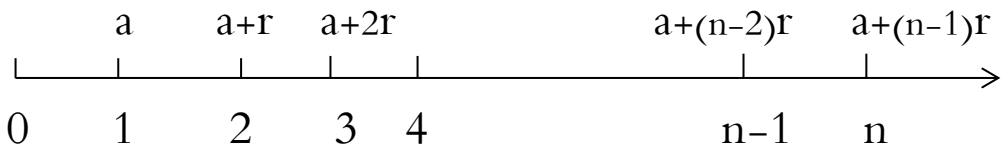
إذا كان معدل التوظيف هو 10%، أحسب القيمة الحالية لهذه التوظيفات.

$$V_0 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 10000(1+0{,}1)\frac{1-(1+0{,}1)^{-8}}{0{,}1} = 58684{,}2\ \text{DA}$$

4.سلسلة دفعات على شكل متتالية حسابية، و متتالية هندسية:

1.4 سلسلة دفعات على شكل متتالية حسابية:



$$(a)V_n = a(1+i)^{n-1} + (a+r)(1+i)^{n-2} + (a+2r)(1+i)^{n-3} + \cdots$$
$$+ [a + (n-2)r](1+i) + a + (n-1)r$$
$$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{V_n} = \left(\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{i}}\right)\frac{\boldsymbol{(1+i)^n-1}}{\boldsymbol{i}} - \frac{\boldsymbol{nr}}{\boldsymbol{i}}$$

$$\boldsymbol{V_0 = V_n(1+i)^{-n}} = \boldsymbol{(1+i)^{-n}}\left[\frac{\boldsymbol{(1+i)-1}}{\boldsymbol{i}}\left(\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{i}}\right) - \frac{\boldsymbol{nr}}{\boldsymbol{i}}\right]$$

$$\boldsymbol{V_0} = \left(\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{i}}\right)\frac{\boldsymbol{1-(1+i)^{-n}}}{\boldsymbol{i}} - \frac{\boldsymbol{nr}}{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{(1+i)^{-n}}$$

$$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{V_n} = \left(\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{i}}\right)\frac{\boldsymbol{(1+i)^n - 1}}{\boldsymbol{i}} - \frac{\boldsymbol{nr}}{\boldsymbol{i}}$$

$$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{V_0} = \left(\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{i}}\right)\frac{\boldsymbol{1-(1+i)^{-n}}}{\boldsymbol{i}} - \frac{\boldsymbol{nr}}{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{(1+i)^{-n}}$$

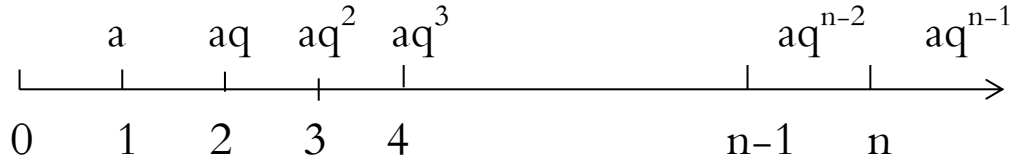
مثال:

أحسب القية المحصلة لسلسلة 10 دفعات تتزايد بمبلغ 10000 دج في كل سنة ، الحد الأول 25000دج معدل الفائدة سنوي 8%.

سلسلة الدفعات على شكل متتالية حسابية أساسها 10000 وحدها الأول 25000، حيث يمكن حساب القيمة المحصلة كما يلي:

$$(a)V_n = \left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$$
$$(a)V_{10} = \left(25000 + \frac{10000}{0{,}08}\right)\frac{(1+0{,}08)^8 - 1}{0{,}08} - \frac{10.10000}{0{,}08}$$
$$(a)V_{10} = 922984{,}37DA$$
$$V_0 = V_n(1+i)^{-n} = 922984{,}37(1+0{,}08)^{-10}$$
$$V_0 = 427520{,}35\ DA$$

2.4 سلسلة دفعات على شكل متتالية هندسية:



$$(g)V_n = a(1+i)^{n-1} + aq(1+i)^{n-2} + aq^2(1+i)^{n-3} + \cdots + aq^{n-2}(1+i) + \mathrm{aq}^{n-1}$$

القيمة المحصلة على شكل متتالية هندسية ذات أساس $\frac{q}{1+i}$ والحد الأول $a(1+i)^{n-1}$

$$(g)V_n = a.\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$$

$$(\boldsymbol{g})\boldsymbol{V_0} = a(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}.\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i)-q} = a.\frac{1-q^n\,(1+i)^{-n}}{(1+i)-q}$$

$$(\boldsymbol{g})\boldsymbol{V_n} = \boldsymbol{a}.\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i}) - \boldsymbol{q}}$$

$$(\boldsymbol{g})\boldsymbol{V_0} == \boldsymbol{a}.\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i}) - \boldsymbol{q}}$$

إذا كان: $\boldsymbol{q = 1+i}$ فإن $(g)V_n = a.\frac{n}{0}$

بالتعويض في المعادلة الأولى للقيمة المحصلة نجد:

$$(g)V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)(1+i)^{n-2} + a(1+i)^2(1+i)^{n-3} + \cdots + a(1+i)^{n-2}(1+i) + \mathrm{a(1+i)}^{n-1}$$

$$(g)V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1} + \cdots + a(1+i)^{n-1} + \mathrm{a(1+i)}^{n-1}$$

$$(g)V_n = n.a(1+i)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{V_0} = \boldsymbol{V_n}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}} = n.a(1+i)^{n-1}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}} = n.a(1+i)^{-1}$$

$$(\mathrm{g})\boldsymbol{V_0} = n.a(1+i)^{-1}$$

$$(\boldsymbol{g})\boldsymbol{V_n} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{a}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n-1}}$$
$$(\boldsymbol{g})\boldsymbol{V_0} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{a}(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\mathbf{1}}$$

مثال1:

أحسب القيمة المحصلة والقيمة الحالية لسلسلة 10 دفعات، تتزايد ب 7%كل سنة ، الحد الأول 22000دج، بمعدل فائدة 9%..

سلسلة الدفعات على شكل متتالية هندسية تتزايد ب 7% (0.07) وحدها الأول 22000

$$(g)V_n = a.\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q} = 22000.\frac{(1+0{,}09)^{10} - 1{,}07^{10}}{(1+0{,}09) - 1{,}07}$$

$$(g)V_{10} = 440233{,}65\ DA$$

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n} = 440233{,}65(1+0{,}09)^{-10}$$

V_0=185959,41 DA

يمكننا حساب الفوائد الناتجة :

رأس المال الموظف هو:

$$C = 22000 + 22000 \times 1{,}07 + 22000 \times 1{,}07^2 + \cdots + 22000 \times 1{,}07^9$$

$$C = 22000\frac{1{,}07^{10} - 1}{0{,}07} = 303961{,}86\ DA$$

$$I = V_{10} - C = 440233{,}65 - 303961{,}86 = 136271{,}69\ DA$$

مثال2:

أحسب القيمة المحصلة لسلسلة 8 دفعات تتزايد ب10%كل سنة، الحد الأول 30000دج ، بمعدل فائدة سنوي 10%.

. q=1,1=1+i

$$(g)V_n = n.a(1+i)^{n-1} = 8 \times 30000(1+0{,}1)^7 = 467692{,}104\ DA$$