# Série :1

**Equations du 1er ordre**



## Exercice 1

**1** Montrer que la fonction f définie par $f(t,y) = t^2 + y^2$ est localement lipschitzienne par rapport à y sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 2

Montrer que toute solution maximale de

$$\begin{cases} y' = t\sqrt{t^2+y^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale

## Exercice 3

On considère l'équation différentielle $(E_3) : y^{'} = (1+\cos t)y - y^3$.

- Soient $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, Étudier l'existence et l'unicitéé de la solution maximale y de l'équation $(E_3)$ qui vérifie $y(t_0) = y_0$

## Exercice 4

**1** Les fonctions suivantes sont elles lipschitzienne en y.

$$f_1(t,y) = \ln(t^2 + y^2 + 1)$$

$$f_2(t,y) = 2\sqrt{y}, y \in [1, +\infty[$$

**2** Montrer que la fonction $\varphi$ définie sur $]-\infty, 2]$ par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'} = y^3$.

## Exercice 5

**1** étudier la lipschitzienne au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = 3\sqrt{|y|}$.

**2** Soit $a \succeq 0$. Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \dfrac{9}{4}(t-a)^2, t \succ a \\ 0, t \leq a. \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy $y^{'} = 3\sqrt{|y(t)|}$ avec $y(0) = 0$.