

Chapitre 1

Equation du 1^{er} ordre

1.1 EDs du premier ordre

Définition 1.1. Une équation différentielle est une relation de la forme

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

entre une variable t , une fonction y et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n .

Exemple 1.1.

(1) $yy'' = t - t^2y'$.

(2) $x' - tx + t^2 = 1$.

Définition 1.2. On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée.

Exemple 1.2.

(1) $yy'' = t - t^2y'$ est une équation différentielle d'ordre 2.

(2) $x' - tx + t^2 = 1$ est une équation différentielle d'ordre 1.

Définition 1.3. On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle toute fonction $y = y(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, possédant des dérivées successives $y', y'', \dots, y^{(n)}$ et vérifiant la relation (1.15).

Exemple 1.3. Pour l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (équation différentielle d'ordre 2).

La fonction $y_1 = \sin x$ est une solution, car la fonction $y_1 = \sin x$ est définie sur $I = \mathbb{R}$ et il existe $y'_1 = \cos x$ et $y''_1 = -\sin x$ et $y'' + y = 0$.

De même $y_2 = \cos x$ est aussi solution de l'équation donnée de même $y_3 = \sin x + \cos x$.

En générale $y = a \sin x + b \cos x$ est aussi solution où a et b sont deux constantes réelles.

Cette dernière est appelée solution générale et les autres $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des solutions particulières.

Remarque 1.1.

- Résoudre ou intégrer une équation différentielle, il consiste à trouver toutes les solutions de cette équation différentielle.
- La courbe représentative de la solution générale (**resp particulière**) est appelée courbe intégrale.

1.2 Equation différentielle du premier ordre

Définition 1.4. Une équation différentielle d'ordre 1 est toute relation de la forme :

$$y' = F(t, y) \tag{1.2}$$

1.2.1 Equations différentielle à variables séparables

Définition 1.5. On appelle une équation différentielle à variables séparables toute équation de la forme :

$$f(y)y' = g(t) \tag{1.3}$$

où f et g sont deux fonctions numériques définies et continues sur des intervalles à préciser.

Remarque 1.2. L'équation (1.3) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$f(y)dy = g(t)dt.$$

La solutions de l'équation (1.3) sont définies par

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt + c.$$

Démonstration. En remplaçant $Y' = \frac{dy}{dt}$ dans (1.3), on trouve $f(y)\frac{dy}{dt} = g(t)$ ou

$$f(y)dy = g(t)dt \quad (1.4)$$

on intègre (1.4) terme à terme pour obtenir la solution générale de l'équation (1.3) sous la forme :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c.$$

ou c étant une constante arbitraire. □

Exemple 1.4. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation :

$$t^2 y' - y^2 = 0$$

il est évident que $y = 0$ est une solution.

Pour $y \neq 0$, on peut séparer les variables car $y' = \frac{dy}{dt}$, on obtient :

$$\begin{aligned} t^2 y' - y^2 = 0 &\implies t^2 \frac{dy}{dt} = y^2 \implies \frac{dy}{y^2} = \frac{dt}{t^2} \\ &\iff \frac{-1}{y} = \frac{-1}{t} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff \frac{1}{y} = \frac{1 - ct}{t} \\ &\iff y = \frac{t}{1 - ct}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble S des solutions est

$$S = \{y = 0 \text{ ou } y = \frac{t}{1 - ct}, c \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 1.5. Intégrer l'équation suivante

$$t^3 y' = e^{3y}$$

on peut séparer les variables t et y , on obtient

$$e^{-3y} dy = \frac{dt}{t^3}.$$

En intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{e^{-3y}}{3} &= \frac{1}{2t^2} + c, \\ e^{-3y} &= 3\left(\frac{1}{2t^2} + c\right) \implies -3y = \ln\left|3\left(\frac{1}{2t^2} + c\right)\right| \\ &\implies y = -\frac{1}{3} \ln\left|\frac{3}{2t^2} + \tilde{c}\right|, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2.2 Équations différentielles homogène

Rappel :

f est dit homogène de degré " n " si elle vérifie l'identité

$$\forall (x, y) \in D_f, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemple 1.6. Montrons que $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ est une fonction homogène :

En effet pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \lambda^2 xy \\ f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^2 (x^2 + y^2 - xy) \end{aligned}$$

Donc f est une fonction homogène d'ordre 2.

Définition 1.6. Une équation différentielle de la forme $y' = f(t, y)$ est dite homogène lorsque la fonction $f(t, y)$ est homogène de degré zéro.

Remarque 1.3. Une équation différentielle homogène peut se mettre toujours sous la forme $y' = \varphi\left(\frac{y}{t}\right)$.

1.2.3 La résolution d'une équation différentielle homogène

Soit l'équation différentielle homogène :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{t}\right) \quad (1.5)$$

Posons $\frac{y}{t} = u$, donc $y = ut \iff y' = u't + u$. Alors :

$$\begin{aligned} y' = \varphi\left(\frac{y}{t}\right) &\iff u't + u = f(u) \\ &\iff tu' + u = f(u) \\ &\iff tu' = f(u) - u \iff \frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{t} \\ &\iff \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dt}{t} \\ &\iff \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation (1.5) sont définies par :

$$y = tu \quad \text{et} \quad t = ke^{\int \frac{du}{f(u) - u}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.7. Résoudre l'équation suivante :

$$ty' = \sqrt{t^2 - y^2} + y \quad (1.6)$$

pour $t \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1.6) &\iff y' = \sqrt{\frac{t^2 - y^2}{t^2}} + \frac{y}{t} \\ &\iff y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{t}\right)^2} + \frac{y}{t}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Posons $\frac{y}{t} = u$, donc $y' = tu' + u$, alors :

$$\begin{aligned}
 (1.6) \iff tu' + u &= \sqrt{1 - u^2} + u \\
 \iff tu' &= \sqrt{1 - u^2} \\
 \iff \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} &= \frac{1}{t} \iff \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dt}{t} \\
 \iff \arcsin u &= \ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
 \iff u &= \sin(\ln|t| + c) \\
 \iff y &= t \sin(\ln|t| + c), \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

1.2.4 Equations différentielles linéaires d'ordre un

Définition 1.7. La forme générale d'une équation linéaire du première ordre est :

$$a(t)y' + b(t)y = f(t) \quad (1.8)$$

ou a, b et f sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. Elle est linéaire car l'opérateur $L(y) = a(t)y' + b(t)y$ est linéaire.
2. Si la fonction $f \equiv 0$ sur I , l'opérateur (1.8) est dite homogène où sans second membre.
3. La solution générale se donne par $y = y_h + y_p$ où y_h est la solution générale de l'équation homogène, et y_p est une solution particulière de l'équation (1.8). [?]

Soit en effet y la solution générale et y_p une solution particulière de l'équation (1.8).

$$\begin{cases} ay' + by = f(t) \\ ay'_p + by_p = f(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

D'où par différence.

$$a(y' - y'_p) + b(y - y_p) = 0$$

ou

$$a(y - y_p)' + b(y - y_p) = 0$$

alors $(\mathbf{y} - \mathbf{y}_p)$ représente la solution générale notée $\mathbf{y}_h$ de l'équation homogène (sans second membre) donc $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$.

Cherchons la solution générale de l'équation homogène associée à (1.8).

si $\mathbf{a}(t) \neq 0$ sur I alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t)\mathbf{y}' + \mathbf{b}(t)\mathbf{y} = 0 &\iff \frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{y}} = -\frac{\mathbf{b}(t)}{\mathbf{a}(t)} \\ &\iff \ln|\mathbf{y}| = -\int \frac{\mathbf{b}(t)}{\mathbf{a}(t)} dt \\ &\iff \mathbf{y} = k e^{-\int \frac{\mathbf{b}(t)}{\mathbf{a}(t)} dt}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation homogène est

$$\mathbf{y}_h = k e^{-\int \frac{\mathbf{b}(t)}{\mathbf{a}(t)} dt}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer $\mathbf{y}_p$ une solution particulière de l'équation (1.8), pour cela on peut utiliser la méthode de la variation de la constante qui consiste à chercher une solution particulière sous la forme :

$$\mathbf{y}_p = k(t) e^{-\int \frac{\mathbf{b}(t)}{\mathbf{a}(t)} dt},$$

Supposons que la constante k est une fonction en t , puis on détermine $k(t)$ à partir de l'équation complète (1.8).

Exemple 1.8. Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$t\mathbf{y}' + t + \mathbf{y} = 0 \quad \text{pour} \quad t \neq 0, \quad (1.10)$$

Résolvons l'équation homogène associée à l'équation (1.10)

$$\begin{aligned} t\mathbf{y}' + \mathbf{y} = 0 &\iff t\mathbf{y}' = -\mathbf{y} \\ &\iff \mathbf{y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{y}} = \frac{-1}{t} \\ &\iff \mathbf{y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathbf{y}}{\mathbf{y}} = -\frac{dt}{t} \\ &\iff \mathbf{y} = 0 \quad \text{ou} \quad (\ln|\mathbf{y}| = -\ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R}) \\ &\iff \mathbf{y} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{y} = \frac{k}{t}, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\iff \mathbf{y}(t) = \frac{k}{t}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation homogène est $y_h(t) = \frac{k}{t}$, $k \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \frac{k(t)}{t}$

$$\begin{aligned}
 (1.10) &\iff ty'_p + y_p = -t \\
 &\iff t\left(\frac{tk'(t) - k(t)}{t^2}\right) + \frac{k(t)}{t} = -t \\
 &\iff k'(t) = -t \\
 &\iff k(t) = -\frac{t^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Donc on peut prendre $y_p(t) = -\frac{t}{2}$ comme solution particulière, et par conséquent la solution générale de (1.10) est donnée par :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \frac{k}{t} - \frac{t}{2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.3 Equations différentielles non linéaires

1.3.1 Equation de Bernoulli

Définition 1.8. On appelle équation de Bernoulli une équation différentielle du première ordre qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(t)y' + b(t)y = f(t)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\},$$

ou a, b et f sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(t) \neq 0$ sur I .

• **N B :** Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ on se ramène à l'équation différentielle linéaire.

1.3.2 Méthode de résolution

En divisant par y^α , on obtient :

$$a(t)y'y^{-\alpha} + b(t)y^{1-\alpha} = f(t)$$

le changement de la fonction défini par $z = y^{1-\alpha}$ conduit à une équation linéaire.

En effet $z' = (1 - \alpha)y'y^{-\alpha}$

d'où $\frac{a(t)}{(1-\alpha)}z'(t) + b(t)z(t) = f(t)$
ou encore

$$a(t)Z' + (1-\alpha)b(t)Z = (1-\alpha)f(t).$$

Exemple 1.9. Intégrer l'équation ($y \neq 0$)

$$y' - ty = ty^3 \quad (1.11)$$

divisons (1.11) par y^3 , on obtient : $\frac{y'}{y^3} - t\frac{1}{y^2} = t$, puis on fait un changement de variable $z = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$, cela donne $z' = -2y'y^{-3}$.

En remplaçant dans (1.11) on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 1,

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^3} - t\frac{1}{y^2} &= t \\ -2y'y^{-3} + 2t\frac{1}{y^2} &= 2t \\ z' + 2tz &= 2t \end{aligned} \quad (1.12)$$

la résolution de (1.12) donne :

$$z_H = ke^{-t^2}, \quad z_P = 1 \implies z = 1 + ke^{-t^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (1.11) est donc :

$$y^2 = \frac{1}{z} \implies y = \pm \sqrt{\frac{1}{z}} \quad \text{où} \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + ce^{-t^2}}}.$$

1.3.3 Equation de Riccati

Définition 1.9. On appelle équation de Riccati une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(t) \neq 0$ sur l'intervalle I .

Méthode de résolution

● **Méthode 01 :** (Transformation l'équation de Riccati à une équation de Bernoulli)

Soit l'équation de Riccati :

$$a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = f(t) \quad (1.13)$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation (1.13) posons $y = y_p + z$, donc $y' = y_p' + z'$, alors la détermination de y revient à déterminer z en effet :

$$\begin{aligned} (1.13) &\iff a(y_p' + z') + b(y_p + z) + c(y_p + z)^2 = f(t) \\ &\iff ay_p' + az' + by_p + bz + c(y_p^2 + 2y_pz + z^2) = f(t) \\ &\iff \underbrace{ay_p' + by_p + cy_p^2}_{=f(t)} + az' + (b + 2cy_p)z + cz^2 = f(t) \\ &\iff az' + (b + 2cy_p)z + cz^2 = f(t). \end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation (une équation de Bernoulli), on obtient z et par conséquent la solution y de l'équation (1.13) de Riccati.

● **Méthode 02 :** (Transformation l'équation de Riccati à une équation linéaire)

Soit l'équation de Riccati :

$$a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = f(t)$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation (1.13), posons $y = y_p + \frac{1}{z}$ donc $y' = y'_p - \frac{z'}{z^2}$, alors la détermination de y revient à déterminer z , en effet :

$$\begin{aligned}
 (1.13) &\iff a\left(y'_p - \frac{z'}{z^2}\right) + b\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + c\left(y_p^2 + \frac{1}{z}\right)^2 = f(t) \\
 &\iff ay'_p - a\frac{z'}{z^2} + by_p + \frac{b}{z} + c\left(y_p^2 + 2\frac{y_p}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = f(t) \\
 &\iff \underbrace{ay'_p + by_p + cy_p^2}_{=f(t)} - a\frac{z'}{z^2} + \frac{b}{z} + 2c\frac{y_p}{z} + \frac{c}{z^2} = f(t) \\
 &\iff -a\frac{z'}{z^2} + (b + 2cy_p) + \frac{c}{z^2} = 0 \\
 &\iff az' - (b + 2cy_p) - c = 0.
 \end{aligned}$$

En résolution cette dernière équation (**1^{er}** ordre), on obtient z et par conséquent la solution y de l'équation (1.13) de Riccati.

Exemple 1.10. Intégrer l'équation :

$$y' = y^2 - 2ty + t^2 + 1 \quad (1.14)$$

il est facile de vérifier que $y_p = t$ est une solution particulière de (1.14).

En posant $y = t + z$, donc :

$$\begin{aligned}
 y' = 1 + z' &\iff 1 + z' = (t + z)^2 - 2t(t + z) + t^2 + 1 \\
 &\iff 1 + z' = 1 + z^2 \\
 &\iff z' = z^2 \implies \int \frac{dz}{z^2} = \int dt \implies \frac{-1}{z} = t + c \\
 &\iff \frac{1}{z} = -(t + c) \implies z = \frac{-1}{t + c} \implies y = \frac{-1}{t + c} + t,
 \end{aligned}$$

Exercice 1.1. 1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

(a) $y' = 3y$

(b) $y' = 2\frac{y}{x} - 1$

(c) $y' - ty = t$

(d) $y' + \frac{1}{\sqrt{t}}y = \frac{1}{\sqrt{t}}, t \succ 0$

(e) $(t^2 - 1)y' - y = t^2, t \in]1, +\infty[$

Exercice 1.2. 1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

(a) $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = 4$

(b) $y' \cos t + y \sin t = 1$

(c) $\frac{dy}{dt} = (1 + y^2)e^t$

(d) $dy + y \tan t = 0$

Exercice 1.3. 1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

(a) $y' + y - 5e^{-t}y^5 = 4$

(b) $y' - y = ty^5$

(c) $y' + p(t)y + q(t)y^r = 0, r \in \mathbb{R}$

Exercice 1.4. 1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes : .

(a) $y' - \frac{1}{t}y - y^2 = -9t^2, y_p = at, t \in]0, +\infty[$

(b) $t^3y' + y^2 + t^2y + 2t^4 = 0, y_p = -t^2.$

1.4 Étude théorique d'une équations différentielle du premier ordre

1.4.1 Les solutions maximales et globales

Soit l'E.D.O $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ où f est définie sur l'ouvert U de $I \times \mathbb{R}^n$; $U = I \times \mathbb{R}^n$; $f = I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Prolongement d'une solution

Soient "y" une solution de (E) sur $J \subset I$.

Soit $\tilde{y}$ une solution de (E) sur $\tilde{J} \subset I$.

$\tilde{y}$ est un prolongement de y Si :

$$\alpha) J \subset \tilde{J}.$$

$$\beta) \tilde{y}|_J = y \quad (\tilde{y}(t) = y(t), \quad \forall t \in J), \quad \tilde{y} = y \text{ sur } J.$$

Exemple 1.11. Considérons sur $I =]0, +\infty[$ l'équation

$$\begin{aligned} y'(t) = \frac{2}{t}y(t) &\iff \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y \implies \frac{dy}{y} = \frac{2}{t} \implies \ln|y| = 2 \ln t + c \\ &\implies |y| = kt^2 \implies y = \pm kt^2 \implies y = ct^2. \end{aligned}$$

Soit la solution $y :]3, +\infty[\subset I \longmapsto \mathbb{R}$.

Une solution définie par $y(t) = t^2$.

La solution $\tilde{y} :]2, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ définie par :

$\tilde{y}(t) = t^2$ est un prolongement de y car :

$$\bullet J \subset \tilde{J} \quad (]3, +\infty[\subset]2, +\infty[). \quad \bullet y(t) = \tilde{y}(t), \forall t \in J =]3, +\infty[.$$

1.4.2 La solution maximale

Une solution $y : J \subset I \longmapsto \mathbb{R}$ est dite **maximale** si elle n'admet pas **aucun** prolongement $\tilde{y} : \tilde{J} \longmapsto \mathbb{R}$ avec $J \subsetneq \tilde{J}$ (J strictement inclus dans $\tilde{J}$).

Exemple 1.12. la fonction définie sur $J = \mathbb{R}$ par $y(t) = e^{-4t}$ est une solution maximale de l'équation différentielle $y' = -4y(t)$ car elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle maximal.

Théorème 1.1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Soit " y " une solution de (E) définie sur $] \alpha, +\infty[\quad (]-\infty, \beta])$ si :

$$\lim_{t \nearrow \alpha} y(t) \quad (\lim_{t \searrow \beta} y(t)) \quad \text{n'existe pas.}$$

Alors y est une solution **maximale**.

Exemple 1.13. La fonction $y : J =]-\infty, -1[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \frac{1}{1+t}$$

est une solution maximale de $y'(t) = -y^2(t)$ car :

$$\lim_{t \searrow -1} \frac{1}{1+t} = -\infty.$$

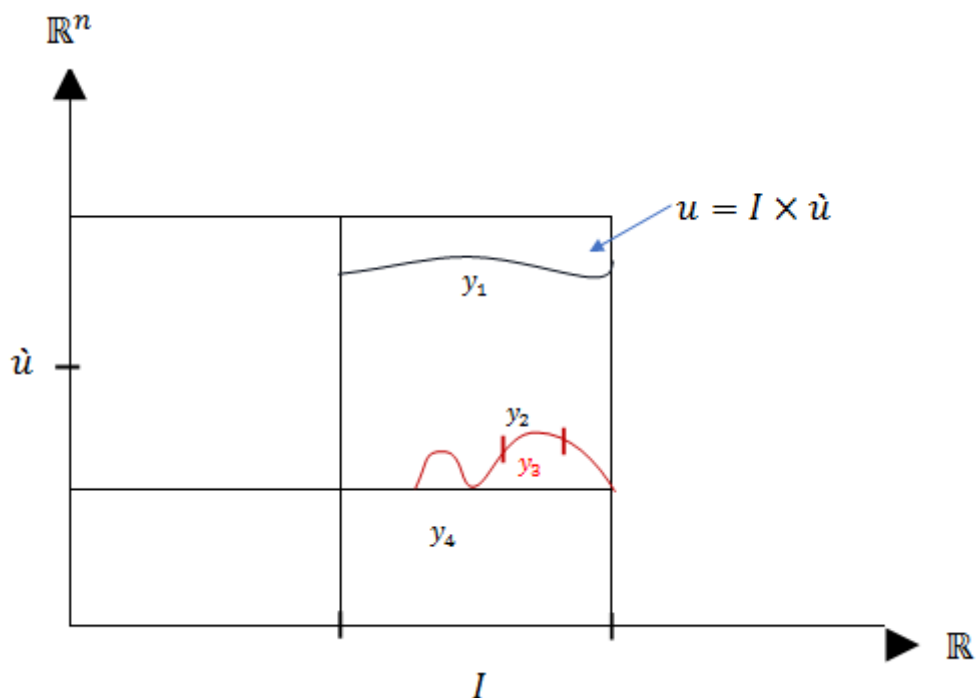
Remarque 1.4. Si y est une solution maximale sur l'intervalle I cela n'implique pas que y est l'unique solution de (E) sur I .

1.4.3 La solution globale

Soit l'E.D.O : $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ où f définie sur l'ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tel que :

$$U = I \times \Omega.$$

" y " est une solution globale si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.



- y_1 : Solution globale maximale.
- y_3 : Solution ni maximale ni globale
- y_2 : Solution maximale non globale.
- y_4 : Solution maximale non globale .

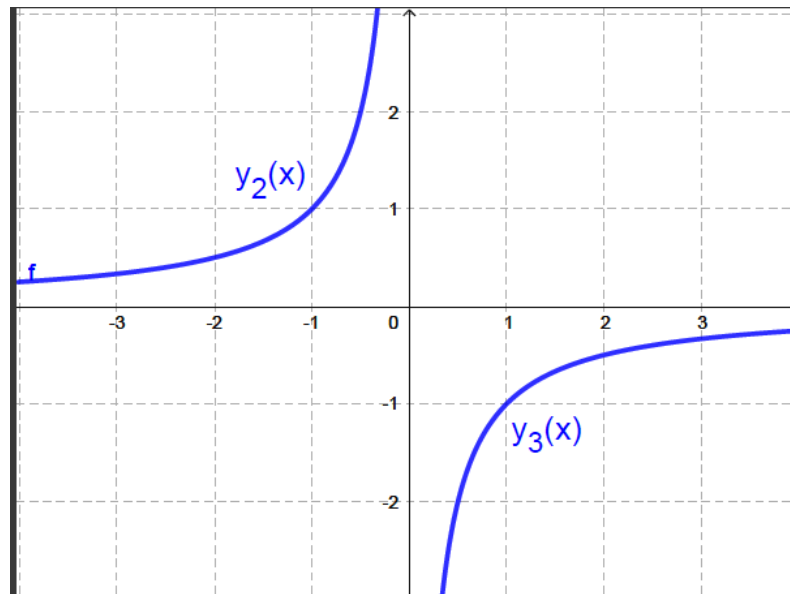
Remarque 1.5. Toute solution globale est maximale mais la réciproque est fausse.

Exemple 1.14. On a : $\frac{dy}{dt} = y^2$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où $f(t, y) = y^2$ et $\begin{cases} I = \mathbb{R} \\ \Omega = \mathbb{R} \end{cases}$

Les solutions sont :

- $y_1(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ Solution globale, elle est définie sur I .
- $y_2(t) = -\frac{1}{t}, \quad t \in]-\infty, 0[.$ • $y_3(t) = -\frac{1}{t}, \quad t \in]0, +\infty[.$

y_2 et y_3 sont solutions maximales.



Remarque 1.6. Toute solution de (E) se prolonge en une solution maximale.

1.5 Existence locale et globale, unicité

Une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^k , si elle admet des dérivées partielles continue jusqu'à l'ordre k .

• Pour $k = 1$:

Soit f une fonction définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est de classe C^2 sur D si : $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ existent et elles sont continues sur D .

• Pour $k = 2$:

f est de classe C^2 sur $D \iff \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^2f}{dxdy}, \frac{d^2f}{dydx}$ et $\frac{d^2f}{dy^2}$ existent et elles sont continues sur D .

Exemple 1.15. On a : $f(x, y) = xe^{xy}$

$\frac{df}{dx}(x, y) = e^{xy} + y \cdot xe^{xy}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

$\frac{df}{dy}(x, y) = x \cdot xe^{xy}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

C'est à dire f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Soit I un intervalle ouvert de $I \subset \mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. f est une fonction définie sur $I \times \Omega$.

Lemme 1.1 (Intégrale de Gronwall). Soit φ une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$ et $c \in [a, b]$, supposons qu'il existe des constantes positives A, B telle que :

$$\varphi(t) \leq A + B \left| \int_c^t \varphi(s) ds \right|, \quad t \in [a, b]$$

Alors :

$$\varphi(t) \leq A e^{B|t-c|}, \quad t \in [a, b].$$

Démonstration. On a $t \in [a, b]$, supposons que $t \geq c$. Posons :

$$F(t) = A + B \int_c^t \varphi(s) ds.$$

Alors :

$$F \in C^1 \text{ et } \varphi(t) \leq f(t) \text{ pour } t \in [c, b].$$

On a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= B\varphi(t) \\ \frac{d}{dt} \left(e^{-Bt} f(t) \right) &= -B e^{-Bt} f(t) + f'(t) e^{-Bt} \\ &= e^{-Bt} \left(f'(t) - B f(t) \right) \leq 0 \\ &= e^{-Bt} \left(B\varphi(t) - B f(t) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Pour $t \in [c, b]$. Donc :

$$\begin{aligned} e^{-Bt} f'(t) &\leq B e^{-Bt} f(t) \\ B e^{-Bt} \varphi(t) &\leq B e^{-Bt} f(t), \quad \forall t \in [a, b], \end{aligned}$$

comme :

$$f(t) = A + B \int_c^t \varphi(s) ds.$$

Et $\frac{d}{dt} \left(e^{-Bt} f(t) \right) \leq 0$, donc :

$$e^{-Bt} f(t) \leq e^{-Bc} f(c) = A e^{-Bc} \quad (\text{car } f(c) = A).$$

D'où

$$e^{-Bt}f(t) \leq Ae^{-Bc},$$

d'autre part :

$$e^{-Bt}\varphi(t) \leq e^{-Bt}f(t) \leq Ae^{-Bc}$$

$$e^{-Bt}\varphi(t) \leq Ae^{-Bc}$$

$$\varphi(t) \leq Ae^{Bt-Bc}$$

$$\varphi(t) \leq Ae^{B(t-c)},$$

d'où le résultat de la même manière on démontre $t \leq c$. □

1.6 Régularité des solutions

Théorème 1.2. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k , alors toute solution de (E) est de classe C^{k+1} .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k .

$$P(n) : f \in C^n \implies y \in C^{n+1}$$

Par hypothèse $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable (y' existe) et continue ($f(t, y)$ continue).

Alors y de classe C^1 .

- Si le résultat est vrai pour l'ordre " $k + 1$ ", alors y est au moins de classe C^k .

- Comme F est de classe C^k , il s'ensuit que $y' = f(t, y)$ est de classe C^k (la composée de fonction de classe C^k), donc y est de classe C^k . □

Proposition 1.1. Si F est continue sur un voisinage de (t_0, y_0) , alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est équivalent au problème :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t))dt.$$

Démonstration. • Si $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, alors par intégration on a :

$$\int_{y_0}^y d\mathbf{y} = \int_{y_0}^y \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt.$$

Donc :

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \int_{y_0}^y \{ (t, \mathbf{y}(t)) \} dt$$

et par conséquent :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \int_{y_0}^y \{ (t, \mathbf{y}(t)) \} dt.$$

Inversement, si :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \int_{y_0}^y \{ (t, \mathbf{y}(t)) \} dt,$$

alors en dérivant, on trouve : $\dot{\mathbf{y}} = \{ (t, \mathbf{y}) \}$.

De plus pour $t = t_0$, on a $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. □

1.7 Théorèmes de Cauchy Lipschitz

Définition 1.10. On dit que $\mathbf{f}$ est **localement lipschitzienne** par rapport à sa deuxième variable si pour chaque : $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \underbrace{I \times \Omega}_U$, il existe un voisinage V de $(t_0, \mathbf{y}_0)$ tel que la restriction $\mathbf{f}|_V$ soit lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Définition 1.11. On dit que $\mathbf{f}$ est **globalement lipschitzienne** par rapport à la second variable s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)\| \leq k \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|, \quad \forall (t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in I \times \Omega \times \Omega.$$

Exemple 1.16. 1. $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = t^4 + 5\mathbf{y}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)| = |(t^4 + 5\mathbf{y}_1) - (t^4 + 5\mathbf{y}_2)| = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|.$$

La fonction $\mathbf{f}$ est globalement lipschitzienne par rapport à la 2^{ème} variable $\mathbf{y}$.

2. $g(t, y) = \cos(y)$ par le théorème des accroissements finis $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \exists c \in]y_1, y_2[$, on a :

$$\cos(y_1) - \cos(y_2) = \cos'(c)(x - y)$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\cos(y_1) - \cos(y_2)| &= |-\sin(c)(x - y)| = |\sin(c)||x - y| \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

Donc g est globalement lipschitzienne par rapport à la 2^{ème} variable.

3. $h(t, y) = \sqrt{y}$ n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de 0. En effet :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{h(t, y) - h(t, 0)}{y - 0} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} +\infty$$

Remarque 1.7.

- (1) Si $f \in C^1(U)$, alors f est localement lipschitzienne.
- (2) Une application lipschitzienne est localement lipschitzienne est continue.

1.8 Équation différentielle (Problème de Cauchy)

Définition 1.12 (Contraction). Une contraction f de $A \subset E$ est une application $f : A \rightarrow A$ est k -lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$.

Remarque 1.8. f contraction $\implies f$ uniformément continue $\implies f$ continue.

Théorème 1.3 (point fixe de Banach). Toute contraction f d'une partie fermée non vide d'un espace de Banach possède un unique point fixe (i.e $f(x) = x$).

Démonstration. Remarquons qu'il ya unicité d'un point fixe en cas d'existence.

En effet si x et y sont deux points fixes, alors :

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Comme $k \in [0, 1[$, nécessairement $\|x - y\| = 0$ donc $x = y$.

On établit l'existence d'une partie fixe, on se donne $x_0 \in A$ et on définit la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq k \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq k^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\vdots \\ &\leq k^n \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

de l'inégalité triangulaire pour $m < n$, on déduit alors :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \dots + x_{m+1} - x_m\| \\ &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\leq k^{n-1} \|x_1 - x_0\| + k^{n-2} \|x_1 - x_0\| + \dots + k^m \|x_1 - x_0\| \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq k^m (k^{n-1-m} + k^{n-2-m} + \dots + k + 1) \|x_1 - x_0\| \\ \|x_n - x_m\| &\leq k^m \left(\frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} \right) \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq k < 1 \implies 1 - k^{m-n} < 1$ et par suite :

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{k^m}{1 - k} \|x_1 - x_0\|,$$

comme $\|x_1 - x_0\|$ est borné ($\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \|x_n - x_m\| = 0$).

Par conséquent, x_n est une suite de Cauchy donc converge (dans un espace de Banach, on a l'équivalence A fermé $\Leftrightarrow A$ est complet) et sa limite notée x appartient à $\bar{A} = A$. Par continuité de f on peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} f(x_n) = x_{n+1} &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} \\ &\implies f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} \\ &\implies f(x) = x. \end{aligned}$$

□

Théorème 1.4. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 dans un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, alors pour chaque $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe une **unique** solution de l'équation $y' = f(t, y)$ avec $y(t_0) = y_0$ dans un certain intervalle ouvert contenant t_0 .

Théorème 1.5. Si la fonction $f(t, y)$ est continue dans le domaine U et possède dans u une dérivée $f_y(t, y)$ bornée, alors pour chaque point (t_0, y_0) de u passe une et seulement une courbe intégrale $y = \varphi(t)$ de l'équation :

$$y' = f(t, y) \text{ avec } (\varphi(t_0) = y_0).$$

1.9 Existence et unicité de la solution satisfaisante à une condition initiale

Théorème 1.6. Si les fonctions f et $\frac{df}{dy}$ sont continues dans Ω et si (t_0, y_0) est un point de Ω , il existe une solution φ et une seule définie dans un voisinage de (t_0, y_0) qui satisfait $\varphi(t_0) = y_0$.

Exemple 1.17. Soit l'équation différentielle :

$$y' = \alpha y \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$\begin{cases} f(t, y) = \alpha y \\ \text{et} \\ \frac{df}{dt}(t, y) = \alpha \end{cases}$$

f et $\frac{df}{dt}$ sont continues dans tout le plan (t, y) , le théorème précédant montre qu'il existe une solution unique qui passe par le point (t_0, y_0) du plan cette solution est $\varphi(t) = t_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)}$ qui est la seule solution passant par ce point et elle est définie pour tout t .

Exemple 1.18. Soit l'équation différentielle :

$$y' = f(t, y) = \frac{y}{t+1}$$

f et $\frac{df}{dt}$ sont continues dans tout le plan (t, y) sauf sur la droite $t = -1$, le théorème précédant montre qu'il existe une solution unique passant par un point quelconque (t_0, y_0) du plan (t, y) mais ne donne aucune information sur les solutions passant par $(-1, y_0)$.

1.9.1 Existence et unicité globale

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = \psi(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (PC)$$

Théorème 1.7 (Existence et unicité globale). On suppose que $U = E$ et $\psi \in C(I \times u)$ une fonction **globalement lipschitzienne** par rapport à y .

Alors pour tout $y_0 \in u$ le problème de Cauchy (PC) admet une solution unique. De plus toute solution locale est une restriction de celle ci.

Démonstration. Supposons en première lieu que l'intervalle I est compact, on pose $\varepsilon = C(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans E , muni de la norme :

$$\|y\|_\varepsilon = \max_{t \in I} e^{-2L|t-t_0|} \|y(t)\|_E$$

où L est la constante de Lipschitz de ψ .

Il est clair que ε est un espace normé complet (Banach) (car I est compact). On définit l'opérateur $\chi : \varepsilon \rightarrow \varepsilon$ par :

$$(\chi y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \psi(s, y(s)) ds, \quad t \in I.$$

Il est clair l'opérateur χ envoie ε dans lui même.

Supposons que $t \geq t_0$. Pour tout y_1 et y_2 dans ε , on a :

$$\begin{aligned}
 |(\chi y_2)(t) - (\chi y_1)(t)| &= |y_0 + \int_{t_0}^t \psi(s, y_2(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^t \psi(s, y_1(s)) ds| \\
 &= \left| \int_{t_0}^t \psi(s, y_2(s)) ds - \int_{t_0}^t \psi(s, y_1(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t |\psi(s, y_2(s)) - \psi(s, y_1(s))| ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t L \|y_2(s) - y_1(s)\|_E ds
 \end{aligned}$$

□

1.9.2 Théorèmes sur les solutions globales

Théorème 1.8. Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $t \in I$ l'application $y \mapsto f(t, y)$ est Lipschitz de rapport $k(t)$. Alors toute solution maximale du problème $y' = f(t, y)$ est globale.

Exemple 1.19. Toute solution maximale de :

$$\begin{cases} y' = t\sqrt{t^2 + y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale. En effet :

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t, y) = t\sqrt{t^2 + y^2}$ est continue.
2. La fonction $y \mapsto f(t, y) = t\sqrt{t^2 + y^2}$ est lipschitzienne de rapport $k(t) = |t|$ (continue sur $\mathbb{R}$), car pour tout $y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 |f(t, y) - f(t, z)| &\leq |t| \frac{|y^2 - z^2|}{\sqrt{t^2 + y^2} + \sqrt{t^2 + z^2}} \\
 &\leq |t| \frac{(|y| + |z|)|y - z|}{\sqrt{t^2 + y^2} + \sqrt{t^2 + z^2}} \\
 &\leq |t||y - z|
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

puisque

$$|t| \frac{|y - z|}{\sqrt{t^2 + y^2} + \sqrt{t^2 + z^2}} \leq 1.$$

D'après le Théorème précédant 1.8 toute solution maximale de (1.15) est globale.

Théorème 1.9. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que :

$$\|f(x, y)\| \leq \alpha(t) + \beta(t)\|y\|,$$

pour α, β positives et continues. Alors les solutions du problème :

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sont globales.

Théorème 1.10. Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et bornée. Alors toute solution de :

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale.

Remarque 1.9. La solution unique du problème de Cauchy peut être construit par la méthode approximation successives suivante :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_1(t) &= \int_{t_0}^t f(t, y_0(t)) dt + y_0 \\ y_2(t) &= \int_{t_0}^t f(t, y_1(t)) dt + y_0 \\ &\vdots \\ y_n(t) &= \int_{t_0}^t f(t, y_{n-1}(t)) dt + y_0. \end{aligned}$$

Exercice 1.5. 1. Montrer que la fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + y^2$ est localement lipschitzienne par rapport à y sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6. Montrer que toute solution maximale de

$$\begin{cases} y' = t\sqrt{t^2 + y^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale

Exercice 1.7. On considère l'équation différentielle $(E_3) : y' = (1 + \cos t)y - y^3$.

— Soient $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, Étudier l'existence et l'unicité de la solution maximale y de l'équation (E_3) qui vérifie $y(t_0) = y_0$

Exercice 1.8. 1. Les fonctions suivantes sont-elles lipschitziennes en y .

$$f_1(t, y) = \ln(t^2 + y^2 + 1)$$

$$f_2(t, y) = 2\sqrt{y}, y \in [1, +\infty[$$

2. Montrer que la fonction φ définie sur $] -\infty, 2]$ par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$ est une solution maximale de l'équation $y' = y^3$.

Exercice 1.9. 1. Étudier la lipschitzienne au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = 3\sqrt{|y|}$.

2. Soit $a \geq 0$. Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \frac{9}{4}(t - a)^2, t \geq a \\ 0, t \leq a. \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy $y' = 3\sqrt{|y(t)|}$ avec $y(0) = 0$.