استخدام البرمجة الخطية في معالجة المشاكل التسويقية.

1.9. طبيعة المشاكل التسويقية في المنشأة.

إن إدارة التســويق في المنشأة، من أجل أن تفعل نشاطاتها ورفع كفاءة استخدام ما هــو متاح لديها من الموارد، تبحث في إيجاد إجابة للكثير من التساؤلات التي ترد في مجال نشاطات التسويق المختلفة، ومن هذه التساؤلات، هي:

1. كيف يمكن بلوغ حالة الاستغلال الأمثل لما هو متاح من موارد مالية معدة لأغراض تغطية نفقات الترويج والتوزيع.
2. كــيف يــتم التوصــل إلــى تحديد التشكيلة المثلى من المنتجات أو السلع والبضائع ضمن الحملة التسويقية التي تقودها المنشأة لطرح منتجات جديدة أو منتجات تم تطويرها أو عند الدخول لسوق جديدة وما شابه ذلك.
3. كيف تتم عملية التخصيص المثلى لرجال البيع في مواقع البيع بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.
4. ويمكــن أن يــرد في هذا المجال الكثير من المشاكل التسويقية المشابهة لما ورد أعــلاه بحيث يكون القاسم المشترك الأعظم فيها هو تحقيق الاستغلال الأمــثل لما هو متوفر من موارد مالية أو بشرية وتكون الإيرادات المتوقعة أعلــى مــا يمكن وتدنية التكاليف الكلية إلى أدنى مستوى ممكن. وفي هذه الحالــة ينبغي البحث عن أساليب كمية تتفق وهكذا نوع من المشاكل، وعند العــودة إلــى أدبــيات المــنهج الكمي نجد أن أسلوب البرمجة الخطية هو المرشح لمعالجة هكذا نوع من المشاكل، ويتضح ذلك من خلال الشكل (9 -1)

2.9. مفهوم البرمجة الخطية وطرق الحل فيها:

ان البرمجة الخطية هي أحد الأدوات المهمة ضمن علم بحوث العمليات حيث تؤلف معظـــم مكونـــات هـــذا العلم الحساس، الذي هو بمثابة المدخل الكمي لدراسة إدارة الأعمـــال وكذلك ما يعرف بالإدارة العلمية. ان البرمجة الخطية تعرف بأنها إدارة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة معينة في واقع الحال. وقد شاع استخدام البرمجة الخطية في مجال إدارة الأعمال وبالتحديد في معالجة مشاكل إدارة الإنـــتاج وإدارة التســـويق. تستخدم طرق مختلفة في حل مشاكل البرمجة الخطية، ومن أهم هذه الطرق هي:

1. طريقة الرسم Graphical Method
2. الطريقة الجبرية Algebric Method
3. الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) Simplex Method

مـــن أجـــل حـــل المشكلة باستخدام طريقة البرمجة الخطية وبالتحديد باستخدام أحد الطـــرق المشـــار إلـــيه أعلاه، يتطلب الأمر في البداية صياغة النموذج الرياضي للمشكلة، وذلك وفق الخطوات التالية:

أولاً: تحديد الهدف والمتغيرات والعوامل المؤثرة على هذا الهدف مع إمكانية الحصول على قيمة رقمية لهذا الهدف، ومحاولة تعظيم هذه القيمة إذا كان الهدف المنشود ربحاً أو تقليل القيمة إذا كان الهدف تكلفة.

ثانياً: وضع القيود اللازمة للمشكلة وعرض هذه القيود بشكل متباينات أو معادلات ترتبط بطبيعة المشكلة.

ثالثاً: تحديد شروط عدم السلبية وكذلك توضيح طبيعة العلاقة التي تربط المتغيرات مع بعضها البعض.

وفيما يلي مثال تطبيقي يوضح فكرة البرمجة الخطية وبالتحديد بناء النموذج الرياضي:

ترغب إحدى المنشآت الإنتاجية في تسويق منتج معين. يدخل في تركيب هذا المنتج اثنين من الموارد، وهما المادة (X1) والمادة (X2). ان كلفة المادة الأولى تعادل دينارين للوحدة الواحدة، وكلفة المادة الثانية (4) دنانير للوحدة الواحدة. ان المنشأة بحاجة إلى 50 ساعة عمل أو أقل من المادة الأولى، وعلى الأقل 100 ساعة من المادة الثانية. وتحتاج المنشأة إلى ما مجموعه 200 ساعة للمادتين.

المطلوب:صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية لهذه المشكلة.

الحل:

القيود الأساسية للمشكلة هي:

$$(1) \; \ldots\ldots\ldots \; X1 \le 50$$
$$(2) \; \ldots\ldots\ldots \; X2 \ge 100$$
$$(3) \; \ldots\ldots\ldots \; X1+X2 = 200$$

دالة الهدف هي:

$$Z=2X1+4X2 \rightarrow \text{Min}$$

قيود اللاسلبية هي:

$$X1,X2 \ge 0$$

يــتم حـــل هكذا نوع من النماذج الرياضية عادة باستخدام طريقة الرسم. وفيما يلي توضيح لفكرة هذه الطريقة:

طريقة الرسم: Graphical Method

ان هـــذه الطريقة تقوم على أساس التعبير عن قيود النموذج ودالة الهدف من خلال رســمها فـــي إطـــار اثنيـــن من المحاور الخاصة تعرف بالمحور الأفقي والمحور العمـــودي. ويـــتم عـــادة تحديد منطقة الحلول الممكنة من خلال تقاطع المستقيمات الخاصة بالقيود، وفي إطار هذه المنقطة يتم إيجاد ثلاثة أنواع من الحلول، وهي:

1. الحل الممكن Feasible Solution
2. الحل الأفضل Best Solution
3. الحل الأمثل Optimal Solution

وتســتخدم هـــذه الطـــريقة عندما يكون عدد متغيرات النموذج الرياضي اثنين فقط (X1, X2). وفيما يلي توضيح لفكرة استخدام هذه الطريقة في معالجة أحد المشاكل التسويقية في الواقع العملي.

مثال رقم (1):

منشـــأة متخصصة بصناعة المعلبات الغذائية. ترغب هذه المنشأة في تسويق اثنين من منتجاتها وهي:

1) اللحوم المجمدة.
2) اللحوم الطازجة.

ان تســـويق هـــذه المنـــتجات من اللحوم يتطلب وسائل نقل وتسويق تتلاءم وطبيعة اللحـــوم المسوقة. حيث أن تسويق اللحوم المجمدة يتطلب استخدام شاحنات مبردة. بيـــنما تسويق اللحوم الطازجة يتطلب شاحنات عادية ولكن بمواصفات خاصة. وقد علمت ما يلي:

أولاً: التخصصات المالية المتوفرة لتغطية نفقات التسويق باستخدام

1. الشاحنات المبردة 13 ألف دينار.
2. الشاحنات ذات المواصفات الخاصة 14 ألف دينار

ثانياً: ان الربح المتوقع من تسويق المنتج رقم (1) هو 1 دينار ومن تسويق المنتج رقم (2) هو 2 دينار.

ثالثاً: بسبب حجم المنتجات وتركيبها الغذائي، فإن كل واحد منها يتطلب خدمات تسويقية مغايرة في كل واحدة من وسائل النقل والتسويق بحيث يترتب على ذلك نفقات تسويق مختلفة، وذلك كما هو واضح في المصفوفة التالية:

$$\begin{array}{c}2\\1\end{array}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وعلى أساس ما تقدم يمكن جمع البيانات الخاصة بهذه المشكلة كما في الجدول التالي:

المنتجات / أسلوب التسويق	المنتج No-1	المنتج No-2	المتوفر من التخصصات المالية
التسويق بواسطة الشاحنات المبردة	2	3	13
التسويق بواسطة الشاحنات الخاصة	1	4	14
الأرباح المتوقعة	1	2	

المطلوب: ما هي كمية ونوعية الإنتاج المطلوب تسويقه بحيث يتم تحقيق الاستغلال الأمثل لما هو متوفر من تخصصات مالية وتحقيق أعلى مقدار ممكن من الأرباح الكلية، مستخدماً في عملية الحل الطرق التالية:

1. الطريقة البيانية (الرسم) Graphical Method
2. الطريقة الجبرية Algebric Method

الحل:

أولاً: الحل بطريقة الرسم

نفرض أن كمية الإنتاج المطلوب تسويقه هو: X

كمية المنتج رقم 1 هو X1

كمية المنتج رقم 2 هو X2

مقدار الأرباح الكلية المتوقعة نفرض يساوي ← Z

وبناءً على ما تقدم فإن الصيغة الرياضية للمشكلة هي:

$$2X1+3X2 \leq 13 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$

$$X1+4X2 \leq 14 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$

$$Z = X1+2X2 \rightarrow \text{Max}$$

$$X1 , X2 \geq 0$$

الخطوة التالية هو تحديد قيم النقاط لكل واحدة من العلاقات الرياضية السابقة تمهيداً لعملية رسمها وذلك كما يلي:

$$2X1+3X2 \leq 13$$

نفرض أنه تم استخدام كل ما هو متوفر من تخصصات مالية، أي أن:

$$2X1+3X2 = 13$$

نفرض أن التخصصات المتوفرة (13) استخدمت لتسويق المنتج No-1 فقط، لذلك فإن:

$$(6.5,0)\quad \begin{cases} X2 = 0 \\ 2X1 = 13 \\ X1 = \frac{13}{2} = 6.5 \end{cases}$$

نفــرض ان التخصصات المتوفر (13) استخدمت لتسويق المنتج No-2 فقط، لذلك فإن:

$$(0,4.3)\quad \begin{cases} X1 = 0 \\ 3X2 = 13 \\ X2 = \frac{13}{3} = 4.3 \end{cases}$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للعلاقة الرياضية الثانية، حيث نحصل على ما يلي:

$$X1+4X2 \leq 14$$

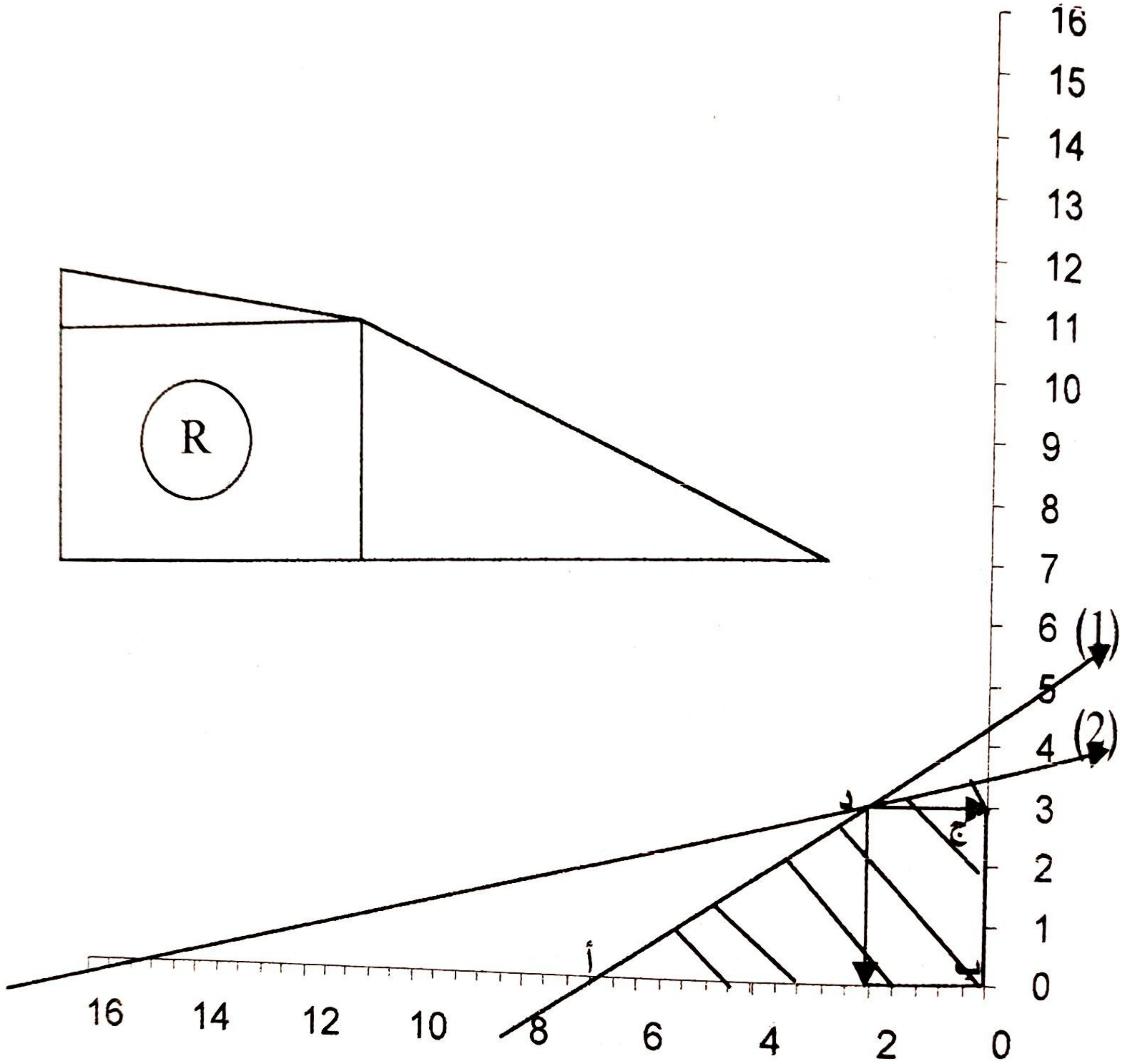
وعليه فإن:

$$X1+4X2 = 14$$

نفرض أن:

$$(0,3.5)\quad \begin{cases} X1 = 0 \\ 4X2=14 \\ X2 = \frac{14}{4} = 3.5 \end{cases}$$

وعلــى أســاس مــا تقــدم يتم رسم العلاقات الرياضية السابقة باعتبارها تعبر عن معادلات لمستقيمات من الدرجة الأولى. وذلك كما يلي:



يتم حساب احداثيات النقطة(د) المجهولة باستخدام أحد الطرق التالية:

1) حل المعادلات الآنية.

2) إنزال المساقط العمودية على المحور الأفقي والعمودي.

ولو تم اعتماد الأسلوب الأول فإن:

$$\begin{array}{ll} & 2X1 + 3X2 = 13 \\ \underline{X\text{-}2} & \underline{X1 + 4X2 = 14} \\ & 2X1 + 3X2 = 13 \\ & \underline{-2X1 + 8X2 = -28} \\ X\text{-}1 & -5X2 = -15 \\ & 5X2 = 15 \\ & X2 = \frac{15}{5} = 3 \end{array}$$

وبالتعويض في العلاقة الرياضية الأولى نحصل على ما يلي:

$$2X1+3(3) = 13$$
$$2X1+9 = 13$$
$$2X1 = 13-9$$
$$2X1 = 4$$
$$X1 = \frac{4}{2} = 2$$

احداثيات نقطة ء هي (2 , 3)

وعلـــيه فـــإن النقاط الأربعة التي تعبر عن الحل الأفضل للمشكلة والتي هي بمثابة خطط إنتاج بديلة، هي:

$$Z = X1 + 2X2 \rightarrow Max$$

$Z = 6.5 + 2(0) \rightarrow 6.5$ (6.5,0) أ

$Z = 0 + 2(0) \rightarrow 0$ (0,0) ب

$Z = 0 + 2(3.5) \rightarrow 0$ (0,3.5) ج

$Z = 2 + 2(3) \rightarrow 8$ (2,3) ء

وبعد التعويض في معادلة دالة الهدف يتضح لنا أن الخطة الأمثل هي عند النقطة (د) وذلك لكونها تحقق أعلى ربح ممكن. بموجب هذه الخطة ينبغي تسويق 2 وحدة من المنتج No-1، و 3 وحدة من المنتج No-2 وعندها تحصل المنشأة على 8 وحدات نقدية كربح نتيجة لاعتماد هذه الخطة.

الطريقة الجبرية:

بموجب هذه الطريقة، تتم عملية تحويل العلاقات الرياضية من كونها مكتوبة بصيغة المتباينات إلى معادلات رياضية مستقرة وذلك بإضافة المتمم الرياضي Slack Variable ويرمز له (S).

كذلك ينبغي التمييز بين نوعين من المتغيرات، وهي المتغيرات الأساسية Basic Variable حيث بموجبها تكون (Xj>0) والمتغيرات غير الأساسية Non-Basic

Variable (Xj=0). ويتم الحل في إطار جدول خاص لذلك. وفي البداية يتم تحويل العلاقات الرياضية من الصيغة القانونية Canonical form إلى الصيغة القياسية Standard form وذلك كما يلي:

$$2X1 + 3X2 \leq 13$$
$$X1 + 4X2 \leq 14$$
$$Z = X1 + 2X2 \rightarrow Max$$
$$X1 , X2 \geq 0$$

وباضافة المتمم الرياضي نحصل على ما يلي:

$$2X1 + 3X2 + S1 = 13$$
$$X1 + 4X2 + S2 = 14$$
$$Z = X1 + 2X2 + 0.S1 + 0.S2 \rightarrow Max$$
$$X1 , X2 \geq 0$$
$$S1 , S2 \geq 0$$

الحل الأمثل هو في المحاولة الأخيرة والتي عندها قيمة:

$$X1 = 2$$
$$X2 = 3$$
$$Z \rightarrow 8$$

وهي نفس النتائج التي تم الحصول عليها عند تطبيق طريقة الرسم.

جدول (9-1) مراحل عملية الحل وفق الطريقة الجبرية

رقم المحاولة	المتغيرات غير الأساسية Xj=0	Si=0	المتغيرات الأساسية Xj>0	Si>0	قيمة دالة الهدف
1	X1=0	X2=0	S1=13	S2=14	Z=0
2	X1=0	S1=0	X2=4.3	S2=-3.2	Z=8.6 // يهمل
3	X1=0	S2=0	X2=3.5	S1=2.5	Z=7
4	X2=0	S1=0	X2=6.5	S2=7.5	Z=6.5
5	X2=0	S2=0	X1=14	S1=-15	Z=14 // يهمل
6	S1=0	S2=0	X1=2	X2=3	Z=8 *

مثال رقم 2:

تعاقدت إحدى المنشآت المتخصصة بصناعة المواد من المواد الغذائية الخاصة بالأطفال مع إحدى دور الحضانة على تجهيزها بنوعين من المواد الغذائية، بحيث يحتوي كل نوع من هذه المواد الغذائية على نوعين من الفيتامينات، وهي Vitamin A، Vitamin B، وكلما كان مقدار هذه الفيتامينات كبيراً، كلما كان ذلك من مصلحة الأطفال حيث سوف تزداد القيمة الغذائية لهذه المواد. وقد علمت أن لكل واحدة من هذه المواد الغذائية كلفة معينة وأن مقدار الفيتامينات الداخلة في عملية الإنتاج والبيانات الأخرى المتعلقة بهذه المشكلة موضحة في الجدول التالي:

جدول رقم (9-2) بيانات المشكلة

المنتجات / Vitamins الفيتامينات	المنتج No-1	المنتج No-2	مقدار الفيتامينات المطلوبة في المواد الغذائية
Vitamin A	2	6	72
Vitamin B	40	4	100
Expected التكاليف المتوقعة cost	10	12	

المطلوب:

حل المشكلة بطريقة الرسم موضحاً كمية ونوعية الإنتاج الذي ينبغي تسويقه إلى دار الحضانة بحيث تكون كمية الفيتامينات التي تؤخذ من قبل الأطفال عند تناول هذه المواد الغذائية أكبر ما يمكن.

الحل:

من أجل حل هذه المشكلة لطريقة الرسم يتطلب الأمر في البداية وضع الافتراضات التالية:

نفرض أن كمية المطلوب تسويقه إلى دار الحضانة هو X

كمية الإنتاج No-1 ← X1

كمية الإنتاج No-2 ← X2

مقدار التكاليف الكلية المتوقعة هو ← Z

النموذج الرياضي هو

$2X1 + 6X2 \geq 72$ ________ (1) قيد الفيتامين A

$10X1 + 4X2 \geq 100$ ________ (2) قيد الفيتامين B

$Z = 10X1 + 12X2 \rightarrow Min$

$X1 , X2 \geq 0$

يتم ايجاد النقاط الخاصة بكل علاقة رياضية تمهيداً لرسمها كما مر معنا في المثال السابق:

$2X1 + 6X2 \geq 72$

نفــرض أن دار الحضـــانة تقــبل بتسويق إليها مواد غذائية تحتوي على كمية من فيتامين A يساوي تماماً المقدار 72، وعليه فإن:

$2X1 + 6X2 = 72$

نفــرض أن دار الحضـــانة قــررت استلام فقط المنتج No-1 وان كل المقدار 72 متوفر فيه، أي أن

$X2 = 0$

$2X1 = 72$ $X1 = \frac{72}{2} = 36$	(36,0)

نفــرض أن دار الحضانة قررت استلام فقط المنتج No-2، وان كل المقدار متوفر فيه، أي أن:

$$(0,12) \quad \begin{cases} X1 = 0 \\ 6X2 = 72 \\ X2 = \frac{72}{6} = 12 \end{cases}$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقيد الثاني، نحصل على ما يلي:

$$10X1 + 4X2 \geq 100$$

حيث أن:

$$10X1 + 4X2 = 100$$

نفرض أن:

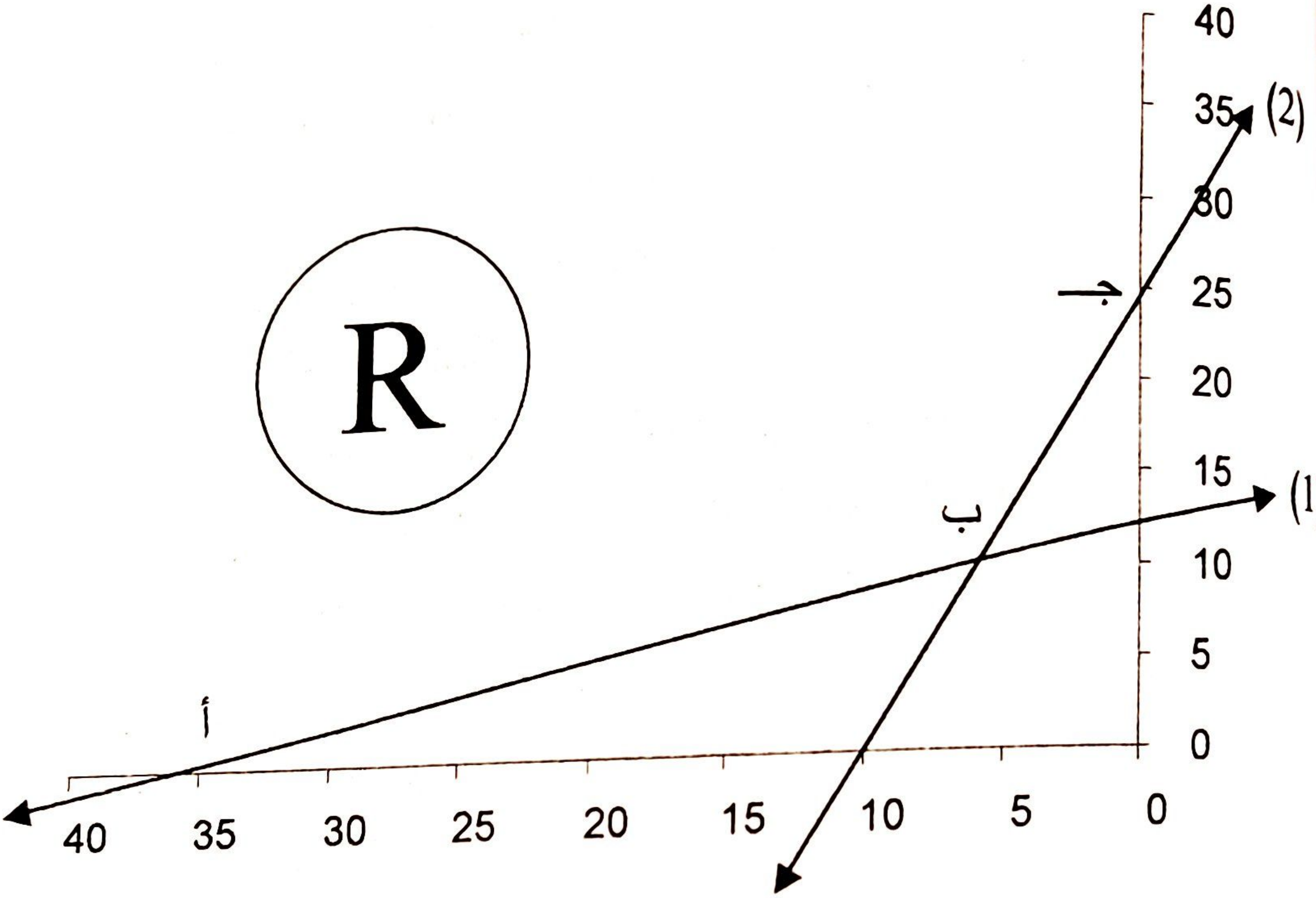
$$(10,0) \quad \begin{cases} X2 = 0 \\ 10X1 = 100 \\ X1 = \frac{100}{10} = 10 \end{cases}$$

$$(0,25) \quad \begin{cases} X1 = 0 \\ 4X2 = 100 \\ X2 = \frac{100}{4} = 25 \end{cases}$$

وعلى أساس ما تقدم يتم رسم المستقيمات التي تعبر عن القيود الوارد ذكرها أعلاه كما يلي:

احداثيات النقطة ب تحسب كما يلي:

$$\begin{array}{ll} X\text{-}5 & 2X1 + 6X2 = 72 \\ & \underline{10X1 + 4X2 = 100} \\ \hline & -10X1 - 30X2 = -360 \\ & \underline{+10X1 + 4X2 = +100} \\ \hline X\text{-}1 & -26X2 = -260 \\ & 26X2 = 260 \\ & X2 = \frac{260}{26} = 10 \end{array}$$



قيمة X1 تحسب كما يلي:

$$X21 + 6(10) = 72$$
$$2X1 + 60 = 72$$
$$2X1 = 72 - 60$$
$$2X1 = 12$$
$$\frac{X1}{2} = 12 = 6$$

وعليه فإن نقطة الحل الأمثل ونقاط الحل الأفضل تحسب عندها التكاليف الكلية كما يلي:

$Z = 10X1 + 12X2 \rightarrow Min$

أ. $(36,0)$ $\quad Z = 10(36) + 12(0) \rightarrow 360$

ب. $(6,10)$ $\quad Z = 10(6) + 12(10) \rightarrow 180$

جـ. $(0,25)$ $\quad Z = 10(0) + 12(25) \rightarrow 300$

الحل الأمثل هو عند النقطة ب، حيث أن المفروض في دار الحضانة إطعام الأطفال 6 وحدات من المنتج الأول و 10 وحدات من المنتج الثاني وعندها تكون كمية الفيتامينات المأخوذة من قبل الأطفال أكبر ما يمكن، وإن التكاليف الكلية لتسويق هذه الأغذية من المنشأة إلى دار الحضانة سوف تكون أقل ما يمكن.

طريقة السمبلكس Simplex Method

وهي من الطرق المهمة في البرمجة الخطية، حيث يتم اللجوء إليها لحل المشاكل في الواقع العملي التي تتكون من متغيرات كثيرة (اثنين فأكثر). ان فكرة هذه الطريقة هو تغيير عملية الحل للمشكلة في إطار جدول خاص يعرف لجدول السمبلكس كما هو واضح في الجدول رقم (3-9). وتمر عملية الحل بعدة مراحل حيث يتم إجراء عدد من العمليات الحسابية في كل مرحلة. ان المرحلة الأولى تكون عادة مخصصة للحل الممكن، والمراحل التي تليها تكون مخصصة للحل الأفضل، أما المرحلة الأخيرة فهي عادة تمثل الحل الأمثل. ان جدول السمبلكس يعرض خلال مراحل الحل قيمة دالة الهدف وقيم متغيرات المشكلة.

ان تصميم جدول السمبلكس في حالة تعظيم دالة الهدف (Max) أو في حالة تصغير دالة الهدف (Min) تعتمد على الصيغة العامة الرياضية للبرمجة الخطية، وكذلك الصيغة التفصيلية لها. وان هذه الصيغ موضحة كما هو وارد أدناه:

الصيغة العامة للبرمجة الخطية

General form of linear programming

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj \quad \leq , = , \geq \ bi \longleftarrow$$ القيود الأساسية

$$Z = \sum_{j=1}^{n} CjXj \quad \rightarrow \quad Max \quad .or \quad .Min \longleftarrow$$ دالة الهدف

$$Xj \geq 0 \longleftarrow$$ قيد اللاسلبية

ويمكن فتح هذا النموذج ليصبح على النحو التالي:

إذا كان لدينا

عدد القيود $i=1,2,\ldots,m$

عدد المتغيرات $j=1,2,\ldots,n$

فإن:

$$\begin{array}{llc}
 & & j \rightarrow n \\
\text{القيود الأساسية} & i \downarrow & a11X1 + a12X2 + \ldots + a1nXn \leq , = , \geq b1 \\
 & & a21X1 + a22X2 + \ldots + a2nX2 \leq , = , \geq b2 \\
 & & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
 & m & am1X1 + am2X2 + \ldots + amnXn \leq , = , \geq bm
\end{array}$$

دالة الهدف $Z = C1X1 + C2X2 + \ldots + C2X2 \rightarrow$ Max or Min

قيود اللاسلبية $X1, X2, \ldots, Xn \geq 0$

وفـيما يلــي توضيح وعرض لهذه النماذج في حالة تطبيق طريقة السمبلكس عند تعظيم وتصغير دالة الهدف.

3.9. استخدام طريقة السمبلكس في حالة تعظيم دالة الهدف في المشكلة التسويقية:

في هذه الحالة يكون المطلوب هو الحصول على أكبر قدر ممكن لقيمة (Z) التي تعبر عن الأرباح الكلية. ان النموذج الرياضي الذي يعبر عن هذه الحالة هو:

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj \leq bi...(i = 1,2,...,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} CjXj \rightarrow Max$$

$$Xj \geq 0$$

ويتم تحول هذا النموذج إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغير الراكد (S) وذلك كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj + Si = bi$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} CjXj + 0.Si \rightarrow Max$$

$$Xj, Si \geq 0$$

وفيما يلي مثال لتوضيح هذه الطريقة.

مثال رقم (1):

ترغب إحدى المنشآت الإنتاجية في تسويق خمسة أنواع من المنتجات الجديدة للسنة القادمـــة وذلك بعد أن اجتازت هذه المنتجات مرحلة الإنتاج التجريبي لها خلال هذه الســـنة. تـــتوفر لدى هذه المنشآت تخصصات مالية محجوزة للأغراض التسويقية وبالـــتحديد لأغراض الترويج والتوزيع. المبلغ الكلي لهذه التخصصات هو (900) وحـــدة نقدية. ثم تجزئة هذا المبلغ بين فقرات فصل الترويج والاعلان، وذلك وفق حســـابات معيـــنة لا يمكـــن معها إجراء المناقلة بين الفصول أو الفقرات. ثم تقسيم المبلغ المشار إليه أعلاه بين فقرات أساسية، وهي كما يلي:

1) مبلغ التخصصات المالية في T.V ← 300 وحدة نقدية

2) مبلغ التخصصات المالية في الصحف والمجلات ← 360 وحدة نقدية

3) مبلغ التخصصات المالية لإقامة المعارض وتوزيع النماذج ← <u>240</u> وحدة نقدية

<u>900</u>

جدول رقم(3-9)

السمبلكس (Simplex Table)

المتغيرات Xj Variables		X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	قيمة المتغير الأساسي b_i	معامل المتغير الأساسي في دالة الهدف C_B
معامل Cj المتغيرات في دالة الهدف											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											دالة الهدف ← Z
(Cj – Zj)											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											دالة الهدف ← Z
(Cj – Zj)											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											دالة الهدف ← Z
(Cj – Zj)											

ترغب هذه المنشأة في تسويق منتجاتها الجديدة على أساس أن لكل واحدة من هذه المنتجات يمكن أن تحقق هامش ربح مختلف، وذلك كما يلي:

المنتج رقم (1) ← 4 وحدة نقدية

المنتج رقم (2) ← 2 وحدة نقدية

المنتج رقم (3) ← 8 وحدة نقدية

المنتج رقم (4) ← 4 وحدة نقدية

المنتج رقم (5) ← 2 وحدة نقدية

ان كـل واحـدة من هذه المنتجات الخمس الجديدة المقترحة في خطة تسويق للسنة القادمـة تحـتاج إلـى صرف مبالغ نقدية تختلف بعضها عن البعض الآخر، وذلك بالسنة لكل واحد من أساليب الترويج المشار إليها أعلاه، كما هو واضح في الجدول التالي:

المنتجات المطلوب تسويقها / وسائل الترويج البديلة	المنتج No-1	المنتج No-2	المنتج No-3	المنتج No-4	المنتج No-5
الإعلان في التلفزيون .T.V	8	2	3	5	0
الإعلان في الصحف والمجلات	4	6	2	4	14
الإعلان من خلال المعارض وتوزيع النماذج	0	4	4	0	4

المطلوب:

في ضوء المعطيات أعلاه بماذا تنصح إدارة المنشأة المذكورة بخصوص تسويق المنتجات الخمسة. أي بعبارة أخرى ما هي كمية ونوعية المنتجات التي ينبغي تسويقها بحيث تحقق المنشأة أعلى مستوى ممكن من الأرباح وتحقق الاستغلال الأمثل لما هو متوفر من تخصصات مالية لأغراض الترويج والإعلان. استخدم في عملية الحل والإجابة على هذا التساؤل طريقة السمبلكس (Simplex Method).

الحل:

من أجل حل هكذا نوع من المشاكل يتطلب الأمر في البداية إعادة تنظيم بيانات المشكلة أعلاه في إطار جدول واحد خاص بكافة تفاصيل المشكلة وذلك كما يلي:

جدول رقم (9-4)

بيانات المشكلة الكاملة

مقدار المتوفر من التخصصات المالية	المنتج No-5	المنتج No-4	المنتج No-3	المنتج No-2	المنتج No-1	المنتجات المطلوب تسويقها / وسائل الترويج البديلة
300 وحدة نقدية	0	5	3	2	8	الإعلان في التلفزيون T.V.
360 وحدة نقدية	14	4	2	6	4	الإعلان في الصحف والمجلات
240 وحدة نقدية	4	0	4	4	0	الإعلان من خلال المعارض وتوزيع النماذج
	2	4	8	2	4	الأرباح المتوقعة

على أساس الجدول السابق يتم صياغة النموذج الرياضي للمشكلة وذلك كما يلي:

نفرض أن كمية الإنتاج بشكل عام ← X

كمية المنتج No-1 ← X1

كمية المنتج No-2 ← X2

كمية المنتج No-3 ← X3

كمية المنتج No-4 ← X4

كمية المنتج No-5 ← X5

مقدار الأرباح الكلية المتوقعة ← Z

وعلى أساس هذه الافتراضات والبيانات الواردة في الجدول أعلاه يتم صياغة النموذج الرياضي للمشكلة الحالية وذلك كما يلي:

$8X1 + 2X2 + 3X3 + 5X4 \leq 300$ ______ (1) قيد .T.V

$4X1 + 6X2 + 2X3 + 4X4 + 14X5 \leq 360$ ___ (2) قيد الصحف

$4X2 + 4X3 + \quad + 4X5 \leq 240$ ______________ (3) قيد المعارض

$Z = 4X1 + 2X2 + 8X3 + 4X4 + 2X5 \rightarrow Max$ دالة الهدف

$X1 , X2 , X3 , X4 , X5 \geq 0$ قيد اللاسلبية

ان الصيغة السابقة تعرف بالصيغة القانونية، حيث تكون القيود مكتوبة بصيغة متراجحات. ومن أجل البدء بعملية حل هذا النموذج يتطلب ذلك تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية، وهي الصيغة التي تكون منها القيود عبارة عن معادلات مستقرة. ويتطلب ذلك إضافة المتغير الراكد (Stack Variable) وذلك كما يلي:

نفرض أن مقدار التخصصات غير المستغلة هي ← S

مقدار التخصصات المالية للإعلان في .T.V غير المستغلة ← S1

مقدار التخصصات المالية للصحف والمجلات غير المستغلة ← S2

مقدار التخصصات المالية للمعارض والنماذج غير المستغلة ← S3

وعليه فإن صيغة النموذج الرياضي السابقة تصبح كما يلي:

$$(1) \_\_\_\_\_\_ \quad 8X1 + 2X2 + 3X3 + 5X4 + \quad + S1 = 300$$

$$(2) \_\_\_ \quad 4X1 + 6X2 + 2X3 + 4X4 + 14X5 + S2 = 360$$

$$(3) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad 4X2 + 4X3 + \quad + 4X5 + S3 = 240$$

$$Z = 4X1 + 2X2 + 8X3 + 4X4 + 2X5 + 0.S1 + 0.S2 + 0.S3 \rightarrow$$

Max

$X1, X2, X3, X4, X5 \geq 0$

$S1, S2, S3 \geq 0$

يــتم حــل هذا النموذج الرياضي بموجب طريقة السمبلكس وذلك في إطار جدول السـمبلكس (Simplex Table) وذلــك كمــا في الجدول رقم(9–5) .ومن بيانات الجدول يتضح الآتي:

جدول رقم (9-5) الحل وفق طريقة السمبلكس Simplex Method

المتغيرات Xj Si		X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	قيمة المتغير الأساسي b_i	معامل التغير الأساسي في دالة الهدف C_B
معاملات دالة الهدف Cj		4	2	8	4	2	0	0	0		
المتغيرات الأساسية Basic Variables	S1	8	2	3	5	0	1	0	0	300	0
	S2	4	6	2	4	14	0	1	0	360	0
	S3 ←	0	4	4	0	4	0	0	1	240	0
Zj		0	0	0	0	0	0	0	0	0	دالة الهدف ← Z
(Cj – Zj)		4	2	8	4	2	0	0	0		
المتغيرات الأساسية Basic Variables	S1 ←	8	-1	0	5	-3	1	0	-3/4	120	0
	S2	4	4	0	4	12	0	1	-1/2	240	0
	→ X3	0	1	1	0	1	0	0	1/4	60	8
Zj		0	8	8	0	8	0	0	2	480	دالة الهدف ← Z
(Cj – Zj)		4	-6	0	4	-6	0	0	-2		
المتغيرات الأساسية Basic Variables	→ X4	8/5	-1/5	0	1	-3/5	1/5	0	-15/4	24	4
	S2	-12/5	24/5	0	0	72/5	-4/5	1	10	144	0
	X3	0	1	1	0	1	0	0	1/4	60	8
Zj		32/5	36/5	8	4	28/5	4/5	0	1.4	576	دالة الهدف ← Z
(Cj – Zj)		-2.4	-5.2	0	0	-3.6	-0.8	0	-1.4		

ان على إدارة المنشأة الإنتاجية أن تسوق المنتج No-4 بمقدار 24 وحدة (X4=24) والمنتج No-3 بمقدار 60 وحدة (X3=60) وعدم طرح بقية المنتجات (No-1, No-2, No-3).

ان هــذه الخطة التسويقية سوف تضمن تحقيق الاستغلال الأمثل لما هو متوفر من تخصصـــات مالـــية محجوزة لأغراض الترويج والإعلان، علماً بأنه يبقى (144) وحدة نقدية من التخصصات المالية لأغراض الإعلان في الصحف والمجلات بشكل فائض غير مستقل (S2=144).

إضـــافة إلـــى ما تقدم، يمكن لهذه الخطة التسويقية أن تضمن لإدارة المنشأة أرباح متوقعة بحدود 576 وحدة نقدية.

4.9. اســتخدام طــريقة الســمبلكس فــي حالة تصغير دالة الهدف في المشكلة التسويقية.

فـــي هـــذه الحالة يتم البحث عن أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف التي بدورها تعبر عن التكاليف الكلية. حيث تتناقص قيمة هذه الدالة شيئاً فشيئاً لغاية بلوغ أقل قيمة لها في آخر مرحلة من مراحل جدول السمبلكس. ان التوزيع الرياضي الذي يعبر عن هذه الحالة هو:

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj \geq, = bi$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} CjXj \rightarrow Min$$

$$Xj \geq 0$$

ويتم تحويل هذا النموذج إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغير الفائض (Surpluse S) وكذلك المتغير الاصطناعي (Artificial R)، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj - Si + Ri = bi...(i = 1,2,...,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} CjXj \mp 0.Si \mp Ri \rightarrow Min$$

$$Xj, Si, Ri \geq 0$$

ويمكن توضيح فكرة هذه الطريقة من خلال المثال أدناه:

مثال رقم (1):

منشأة انتاجية متخصصة بصناعة الألبسة الجاهزة تعاقدت مع أحد الأسواق المركزية لتسويق إليه ثلاث من المنتجات الجاهزة يتم بيعها خلال المعرض المباشر العائد للأسواق المذكورة.

تم التعاقد مع السواق المركزية على تسويق المنتجات التالية:

1. البدلة النسائية A التي تستهلك (2.9) متر.
2. البدلة البناتية B التي تستهلك (2.1) متر.
3. البدلة الولادية C التي تستهلك (1.6) متر.

عدد البدلات التي تم التعاقد عليها من كل نوع هو 100 بدلة شهرياً حيث يجري التسويق في بداية كل شهر.

ان المنشأة الإنتاجية لديها قطع ثابتة من الأقمشة وبكميات تكفي لانتاج البدلات المشار إليها أعلاه وبالأعداد المطلوبة. ان مساحة كل قطعة هو (7.4) متر من كافة الألوان والنقشات.

ان إدارة التسويق قررت دراسة هذا العرض التسويقي والاستفادة منه بشكل يحقق الاستغلال الأمثل لما هو متوفر من مواد أصلية وبالتحديد الأقمشة ذات القياسات الثابتة (7.4) متر لذلك أجرت هذه الإدارة دراسة تحليلية لعدد الاحتمالات أو البدائل الممكنة التي بموجبها يمكن تقطيع وقص القماش المتوفر من أجل الحصول على القياسات المطلوبة من الأنواع الثلاث من البدلات. وان كل بديل قص يمكن

أن يــنجم عنه مقدار معين من الفضلات أو التلف يختلف عن البديل الاخر كما هو واضح في الجدول (9–2).

ان تنفيذ هذه البدائل بشكل توضيحي هو كما في الشكل رقم (9–2) الذي يوضح البديل رقم (1) والبديل رقم (4).

جدول رقم (9–6) بدائل القص ومقدار التلف وعدد البدلات لكل بديل

بدائل القص / نوع البدلة	Var. No-1	Var. No-2	Var. No-3	Var. No-4	Var. No-5	Var. No-6
البدلة النسائية (A) (2.9) متر	1	1	2	0	1	0
البدلة البناتية (B) (2.1) متر	1	0	0	2	2	1
البدلة الولادية (C) (1.5) متر	1	3	1	2	0	3
مقدار القماش المستغل فعلاً	6.5	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
مقدار التلف (S)	0.9	0	0.1	0.2	0.3	0.8
المجموع الكلي للقماش	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي للمشكلة.

2- اســتخدام طــريقة الســمبلكس لحل هذه المشكلة من أجل تحديد بديل القــص الأمثل الذي يؤمن كميات البدلات المتعاقد عليها مع الأسواق المركــزية من جهة، ويحقق أقل تلف ممكن في الأقمشة المتوفرة من جهة أخرى.

الحل:

لحــل هــذه المشكلة، يتطلب الأمر في البداية تحديد التعاريف والرموز والمتغيرات اللازمــة لصــياغة النموذج الرياضي للمشكلة، حيث يتم تحديدها في ضوء بيانات الجدول السابق، وذلك كما يلي:

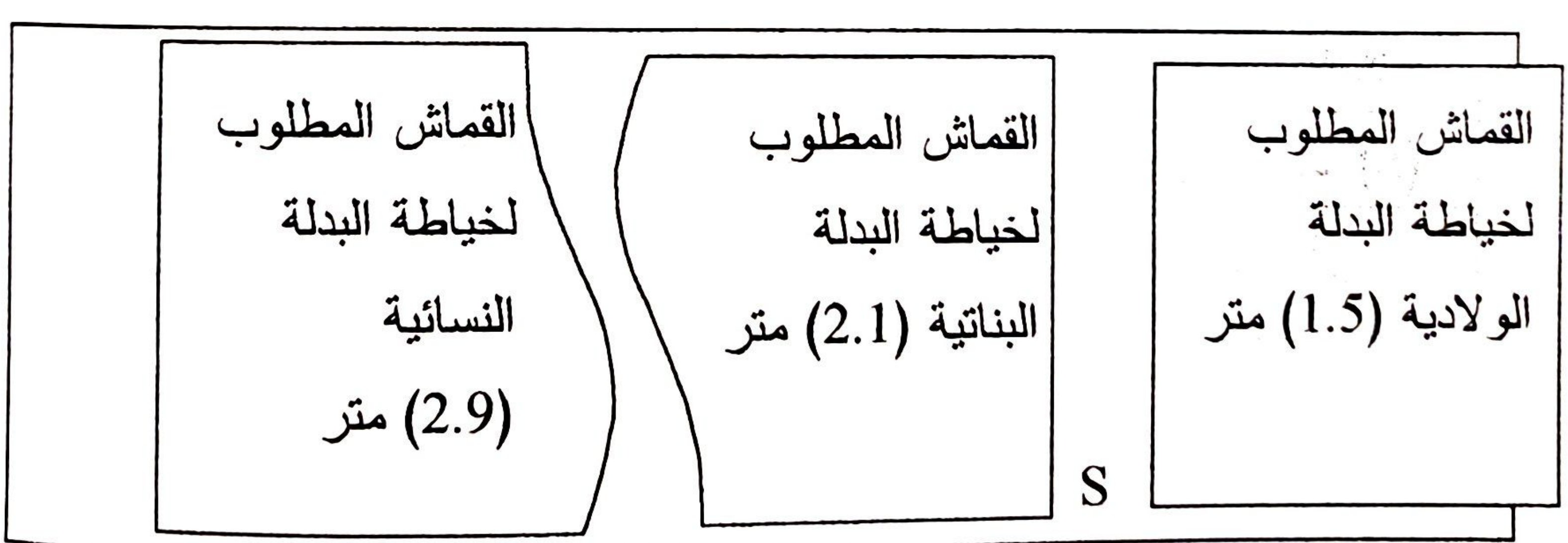
i ← قياس البدلة المطلوبة ($i=1,2,...,m$)

j ← رقم بديل القص (Var. No-) حيث أن ($j=1,2,...,n$)

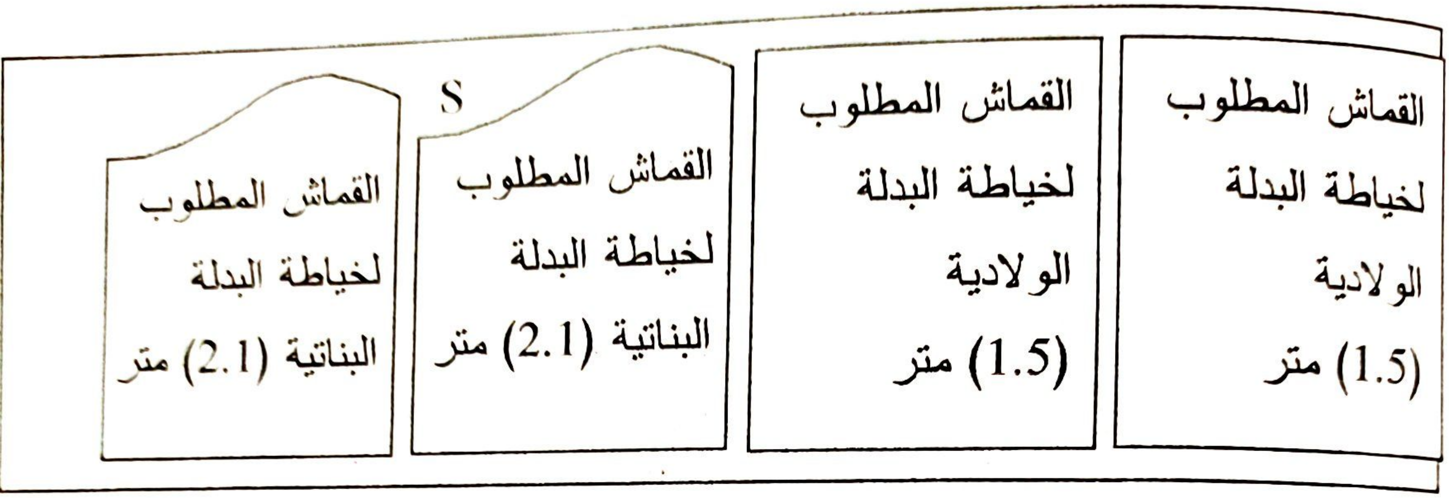
X ← عدد البدلات التي يمكن الحصول عليها.

الشكل رقم (9-2)

البديل رقم (1) والبديل رقم (4)



البديل No-1



البديل No-4

Xj ← عدد البدلات التي يمكن الحصول عليها باستخدام البديل (j).

aij ← معامل يمثل عدد المرات التي بموجبها بنيغي اعتماد البديل (j).

Cj ← مقدار الفضلات أو التلف المتبقي عند استخدام طريقة القص (j).

bi ← العدد الكلي المطلوب تسويقه من البدلات بالقياس (i).

Z ← قيمة دالة الهدف التي تمثل مقدار التلف الكلي المتحقق.

ان الصـيغة الرياضـية للـنموذج الرياضي الذي يستخدم لمعالجة هكذا حالة، هو نموذج البرمجة القياسي (Standard) وهو كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj = bi$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} CjXj \rightarrow Min$$

$$Xj \geq 0$$

وبعـد ادخـال المتغـيرات والرموز الوارد ذكرها أعلاه على البيانات الواردة في الجدول وبالتحديد المتغير (Xj) فإننا نحصل على النموذج الرياضي التالي:

(1) ______ $X1 + X2 + 2X3 + \quad + X5 + \quad = 100$

(2) ______ $X1 + X2 + \quad + 2X4 + 2X5 + X6 = 100$

(3) ______ $X1 + 3X2 + X3 + 2X4 + \quad + 3X6 = 100$

$Z = 0.9X1 + 0.0X2 + 0.1X3 + 0.2X4 + 0.3X5 + 0.8X6 \rightarrow$ Min

$X1, X2, \ldots, X6 \geq 0$

ان البدء بحل هكذا نوع من المشاكل يتم بطريقة السمبلكس وبالتحديد وفق طريقة Big-M، ويتطلب ذلك إضافة المتغيرات الاصطناعية Artificial Variables وكالآتي:

$$
\begin{aligned}
&(1) \_\_\_\_\_\_ \quad X1 + X2 + 2X3 + \qquad + X5 \; + \qquad + R1 = 100 \\
&(2) \_\_\_\_\_\_ \quad X1 + X2 + \qquad + 2X4 + 2X5 + X6 + R2 = 100 \\
&(3) \_\_\_\_\_\_ \quad X1 + 3X2 + X3 + 2X4 + \qquad + 3X6 + R3 = 100
\end{aligned}
$$

$Z = 0.9X1 + 0.0X2 + 0.1X3 + 0.2X4 + 0.3X5 + 0.8X6 + MR1 + MR2 + MR3 \rightarrow$ Min

Let $M = 100$

$Z = 0.9X1 + 0.0X2 + 0.1X3 + 0.2X4 + 0.3X5 + 0.8X6 + 100R1 + 100R2 + 100R3 \rightarrow$ Min

$X1, X2, \ldots, X6 \geq 0$

$R1, R2, R3 \geq$

$M \rightarrow 100$

يتم نقل البيانات الواردة في هذا النموذج الرياضي إلى جدول السمبلكس وهو الجدول رقم (9-7)، حيث تتم عمليات الحل وفق نفس القواعد المعتمدة في حالة تعظيم دالة الهدف ما عدا أن:

1. المتغير الداخل هو ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة سالبة.
2. يتم الوصول إلى الحل الأمثل إذا كانت كافة قيم الحقل (Cj-Zj) هي قيم موجبة وأصفار، أي أن:

$(Cj\text{-}Zj) \geq 0$

3. ان قيمة دالة الهدف (Z) تتناقص تدريجياً، لغاية بلوغها أقل قيمة.

ان تحليل نتائج الحل الواردة في العمليات الحسابية للمراحل المختلفة يتضح ما يلي:

جدول رقم (9-7) الحل بموجب طريقة السمبلكس

No. Variables	1	2	3	4	5	6	7	8	9	قيمة المتغيرات الأساسية	معامل المتغيرات الأساسية
معامل المتغيرات في دالة الهدف Cj	9	0	1	2	3	8	100	100	100		
رقم المتغيرات الأساسية											
X7	1	1	2	0	1	0	1	0	0	100	100
X8	1	0	0	2	2	1	0	1	0	100	100
X9	1	3	1	2	0	3	0	0	1	100	100
Zj	300	400	300	400	300	400	100	100	1000	30000	قيمة دالة الهدف
(Cj – Zj)	-291	-400	-299	-398	-297	-329	0	0	0		
X3	0.5	0.5	1	0	0.5	0	0	0	0	50	1
X8	1	0	0	2	2	1	0	1	0	100	100
X9	0.5	2.5	0	2	-0.5	3	0	0	1	50	100
Zj	150.5	250.5	1	400	150	400	0	100	100	15050	دالة الهدف
(Cj – Zj)	141.5	-250.5	0	-398	-147.5	-329	0	0	0		
X3	0.4	0	1	-0.4	0.6	-0.6	0	0	0	40	1
X8	1	0	0	2	2	1	0	1	0	100	100
X2	0.2	1	0	0.8	-0.2	1.2	0	0	0	20	0
Zj	100.4	0	1	144.6	200.6	99.4	0	100	0	10040	دالة الهدف
(Cj – Zj)	91.4	0	0	-179.6	-147.6	91.4	0	0	0		
X3	0.1	0	1	-1	0	-0.9	0	0	0	10	1
X5	0.5	0	0	1	1	0.5	0	0	0	50	3
X2	0.3	0	0	1	0	1.3	0	0	0	30	0
Zj	1.6	0	1	2	3	0.6	0	0	0	160	دالة الهدف
(Cj- Zj)	7.4	0	0	0	0	7.4	0	0	0		
X3	0.4	1	1	0	0	0.4	0	0	0	40	1
X5	0.2	-1	0	0	1	-0.8	0	0	0	20	3
X4	0.3	1	0	1	0	1.3	0	0	0	30	2
Zj	1.6	0	1	2	3	0.6	0	0	0	160	دالة الهدف
(Cj- Zj)	7.4	0	0	0	0	7.4	0	0	0		

أ) أن مقدار التلف الكلي (دالة الهدف) في المرحلة الأولى كان 30 متر
= = = = = في المرحلة الثانية كان 15.050 متر
= = = = في المرحلة الثالثة كان 10.040 متر
= = = = في المرحلة الرابعة كان 0.160 متر
= = = = في المرحلة الخامسة كان 0.160 متر

2) في المرحلة الأخيرة من عملية الحل، نجد أن قيم المتغيرات Xj هي كما يلي:

X3 = 40	X1 = 0
X5 = 20	X2 = 0
X4 = 30	X6 = 0

ولما كان الرمز Xj يعني عدد البدلات التي يتم الحصول عليها باعتماد البديل (j)، عليه فإن على إدارة المنشأة الإنتاجية:

أولاً: اعـــتماد بديل رقم (3) يؤدي إلى الحصول على 40 بدلة نسائية (A) وذلك لأن المتغـــير X3 كـــان ضـــمن العلاقـــة الرياضـــية رقم (1) في جدول السمبلكس.

ثانياً: اعـــتماد بديل القص رقم (5) يؤدي إلى الحصول على 20 بدلة بناتية (B) وذلـــك لأن المتغـــير X5 كان ضمن موقع العلاقة الرياضية رقم (2) في جدول السمبلكس.

ثالثاً: اعـــتماد بديل القص رقم (4) يؤدي إلى الحصول على 30 بدلة ولادية (C) وذلـــك لأن المتغـــير X4 كان ضمن موقع العلاقة الرياضية رقم (3) في جدول السمبلكس.

ولـــو تـــم تعريف هذه القيم في المعادلات السابقة لتحقق الشرط المطلوب ألا وهو الحصـــول على (100) بدلة من كل نوع اللازمة لعملية التسويق طبقاً للعقد المبرم مع الأسواق المركزية.