1

Qu'est-ce qu'un qubit ?

1.1 Introduction

L'information quantique est la théorie de l'utilisation de spécificités de la physique quantique pour le traitement et la transmission de l'information.

Toutefois il convient de bien s'entendre sue cet énoncé, car tout objet physique, si on l'analyse suffisamment en détail, est un objet quantique, ce Rolf Landauer a exprimé dans une formule provocatrice: "Un tournevis est un objet quantique".

De fait, les propriétés conductrices de la lame métallique du tournevis font fondamentalement appel aux propriétés quantique de la propagation des électrons dans un milieu cristallin, tandis que le manche est un isolant électrique car les électrons sont piégés dan un milieu désordonné. C'est la mécanique quantique qui permet d'expliquer que la lame, conducteur électrique, est aussi un conducteur thermique, tandis que la manche, isolant électrique, est aussi un isolat thermique.

1.2 Qubit ou bit quantique

L'unité fondamentale de l'information classique est le bit (de l'anglais binary digit). Un bit peut prendre deux valeurs que l'on note habituellement 0 et 1.

En effet, la valeur 0 d'un bit peut être représentée physiquement dans un ordinateur par un condensateur non chargé et la valeur de 1 représentée par la même condensateur chargé. La différence entre les deux états (chargé et non chargé) se traduis par le déplacement de plusieurs millions d'électrons. Ainsi, un bit d'information classique implique environ 10^9 électrons dans la mémoire vive d'un ordinateur.

Un exemple pour illustrer cette notion: dans une expérience de TP classique, on excite de la vapeur de sodium par un arc électrique, et on observe une lumière jaune, la fameuse " raie jaune du sodium". Mais on n'observe pas le comportement d'un atome individuel, la cellule contient typiquement 10^{20} atomes.

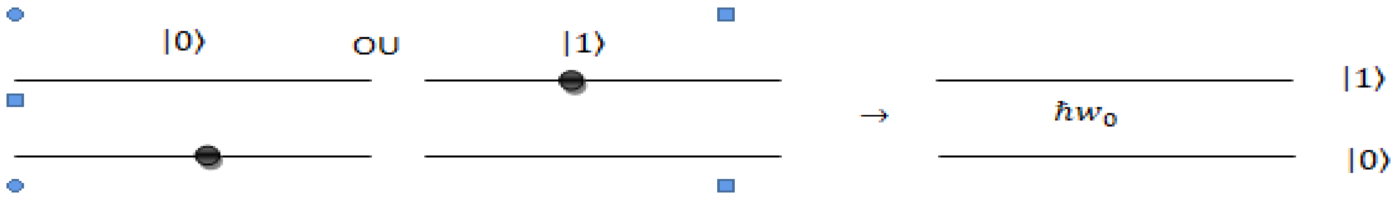
L'unité fondamentale de l'information quantique est le bit quantique ou, plus simplement, qubit (de l'anglais quantum bit). Il est superficiellement similaire au bit classique, mais comme nous le ferons, il est fondamentalement différent et cette différence fondamentale permet le traitement de l'information de façons nouvelles et très prometteuses.

Comme le bit, le qubit peut être dans un des états 0 ou 1. Pour une raison qu'on expliquera d'après, on notera ces états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ (ket de 0 et ket de 1) cette notation est appelée notation de Dirac et représente un vecteur d'état.

A la différence du bit classique, le qubit peut être à la fois dans l'état $|0\rangle$ et $|1\rangle$, on dit alors qu'il est dans état superposé que l'on note $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, où α et β sont des nombres complexes qui vérifient $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, appelée relation de complétude ou condition de normalisation du qubit.

1- On trouve le qubit $|\psi\rangle$ dans l'état $|0\rangle$ avec la probabilité $|\alpha|^2$.

2- On trouve le qubit $|\psi\rangle$ dans l'état $|1\rangle$ avec la probabilité $|\beta|^2$.



Exemple Pour les qubit suivantes, calculer les probabilités de chaque état.

1- $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle$,

2- $|\psi\rangle = \frac{i}{2}\,|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|1\rangle$,

3- $|\psi\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{3}}\,|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}\,|1\rangle$,

1.3 Espace de Hilbert

L'espace mathématique où ont lieu les calculs quantiques est espace de Hilbert H, qui est un espace euclidien complexe, muni d'un produit scalaire. C'est un espace de dimension infinie, mais nous nous limiterons dans cette section au cas de la dimension finie.

1- Le kit $|i\rangle$ est un vecteur de l'espace des états où espace de Hilbert.

2- Le bra $\langle f|$ est un vecteur de l'espace H^*, autrement, c'est la conjugué hermitien du $|f\rangle$.

$$(|f\rangle)^+ = \langle f| \, .$$

1.3.1 Base hilbertienne

Définition: L'ensemble $B = \{|i\rangle\}$ est une base hilbertienne, si

$$\langle i| \, j\rangle = \delta_{i,j}$$

et

$$\sum_{i \in B} |i\rangle \langle i| = 1$$

cette relation est la relation du fermeture permet la projection d'un vecteur d'état dans la base B.

Exemple: Le ket $|y\rangle$ se développe dans la base hilbertienne B, compte, sous la forme

$$\begin{aligned} |y\rangle &= \sum_{i \in B} |i\rangle \langle i| \, y\rangle \\ &= \sum_{i \in B} \alpha_i \, |i\rangle \end{aligned}$$

avec $\alpha_i = \langle i| \, y\rangle$ considérée ici comme la coordonnée ou la projection ou plus précisément l'amplitude de probabilité de projection de $|y\rangle$ suivant $|i\rangle$.

Par suite

$$\begin{aligned} \langle y| &= \sum_{i \in B} \langle y \, |i\rangle \langle i| \\ &= \sum_{i \in B} \alpha_i^* \langle i \end{aligned}$$

où $\alpha_i^* = \langle y|\ i\rangle$ implique $\alpha_i = \langle i|\ y\rangle$

si on a deux vecteurs $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$, nous pouvons calculer l'amplitude $\langle\psi\ |\varphi\rangle$.

$|\psi\rangle = \sum\limits_{i\in B}\alpha_i\,|i\rangle$, $|\varphi\rangle = \sum\limits_{j\in B}\beta_j\,|j\rangle$

$$\begin{aligned}\langle\psi\ |\varphi\rangle &= \sum_{i,j}\alpha_i^*\,\langle i\ |j\rangle\,\beta_j \\ &= \sum_{i\in B}\alpha_i^*\beta_i\end{aligned}$$

Exemple d'application on a $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

et deux vecteurs dans même espace $\nu = B = R^3$.

$$A = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

$$B = \sum_{i\in B}e_i\,(e_i\cdot B) = \sum_{i\in B}e_iB_i = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

alors

$$A\cdot B = \sum_{i=1}^{3}(e_i\cdot A)\,(e_i\cdot B) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

1.3.2 Produit scalaire

Si on a $\langle x\ |y\rangle = 0$

alors $|x\rangle$ et $|y\rangle$ sont orthogonaux.

La symétrie hermitienne du produit scalaire $\langle x\ |y\rangle^* = \langle y\ |x\rangle$.

Implique que $\langle y\ |y\rangle$ est un nombre réel définie positif.

$$\langle y\ |y\rangle \geq 0$$

et $\langle y\ |y\rangle = 0$ implique $|y\rangle = 0$

La norme d'un vecteur d'état $|y\rangle$ est définie par

$$\||y\rangle\| = \sqrt{\langle y\ |y\rangle}$$

lorsque $\langle x | x \rangle = 1$

on dit que le vecteur d'état $|x\rangle$ est normalisé.

L'inégalité de Cauchy Schwarz

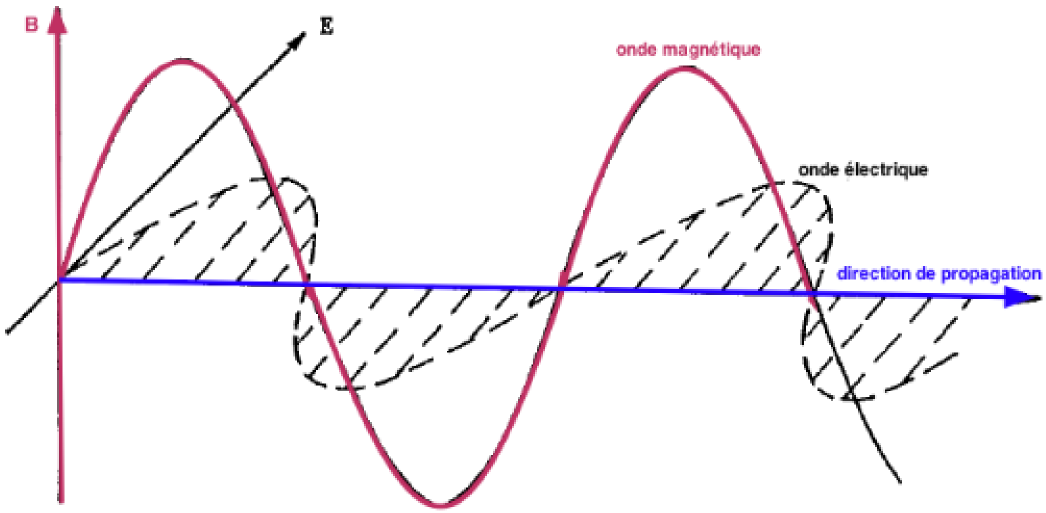
$$\begin{aligned} |\langle x | y \rangle|^2 &\leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle \\ &\leq \| |x\rangle \|^2 \, \| |y\rangle \|^2 \end{aligned}$$

1.4 Polarisation d'un photon

Notre premier exemple de qubit sera fourni par la polarisation d'un photon mais il faut d'abord rappeler brièvement ce qu'est la polarisation de la lumière.

Une lumière polarisée circulairement est une onde lumineuse dont le vecteur $\overrightarrow{E}$ tourne autour de la direction du rayon lumineux avec une fréquence égale à celle de la lumière. La description mathématique d'une onde scalaire progressive de vibration $U(z,t)$ est de la forme

$$U(z,t) = U_0 \cos(\omega t - kz)$$



(3 directions perpendiculaires)

où ω est la fréquence de la vibration $\omega = c\ k$, c étant la vitesse de propagation.

Dans le plan $z = 0$

$$U\,(z = 0, t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Dans le cas d'une onde électromagnétique filtrée par un polaroid, la vibration est un vecteur du plan xOy, traverse à la direction de propagation

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t) \cos(\theta) \\ E_y = E_0 \cos(\omega t) \sin(\theta) \end{cases}$$

où θ dépend de l'orientation du polaroid.

L'intensité (ou l'énergie) lumineuse, mesurée par exemple à l'aide d'une cellule photoélectrique est proportionnelle au carré du champ électrique, $I \propto E_0^2$.

Cas général $I \propto E^2$ et le champ électrique

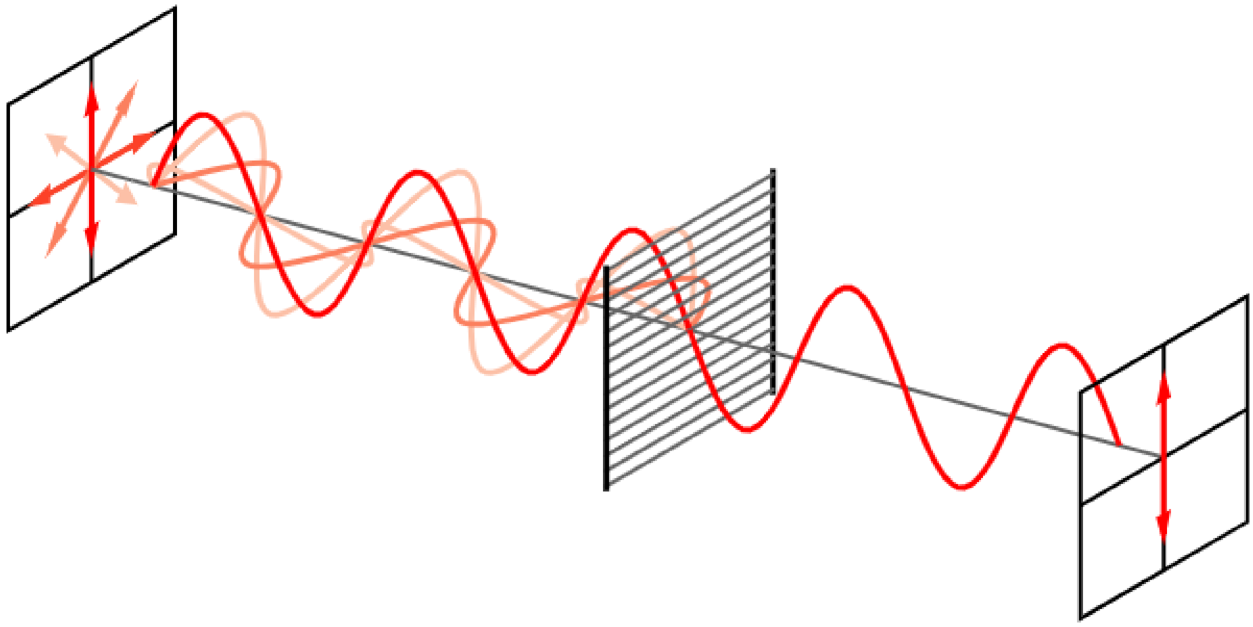
$$\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t)\, \overrightarrow{P}, \quad \overrightarrow{P} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

Si $\theta = 0$ la lumière polarisée suivant Ox.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ la lumière polarisée suivant Oy.

Pour étudier de façon quantitative la polarisation, nous allons nous servir d'un ensemble polariseur/analyseur. Nous faisons d'abord passer la lumière dans un polariseur dont l'axe fait un angle θ avec l'axe Ox, puis dans un second polariseur, appelé analyseur, dont l'axe fait un angle α avec l'axe Ox.

$$\overrightarrow{n} = (\cos(\alpha), \ \sin(\alpha))$$



A la sortée de l'analyseur, le champ électrique $\overrightarrow{E'}$ s'obtient le champ $\overrightarrow{E}$ sur $\overrightarrow{n}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E'} &= \left(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} = E_0\cos(\omega t)\left(\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} \\ &= E_0\cos(\omega t)\left(\cos(\alpha)\cos(\theta)+\sin(\alpha)\sin(\theta)\right)\overrightarrow{n} \\ &= E_0\cos(\omega t)\cos(\theta-\alpha)\overrightarrow{n}\end{aligned}$$

On en déduit la loi de Malus (1809) pour l'énergie

$$I' = I\ (\cos(\theta-\alpha))^2$$

La polarisation linéaire n'est pas la plus générale possible. Une polarisation circulaire s'obtient en choisissant $\theta = \frac{\pi}{4}$ et en en déplaçant la composante Oy de $\pm\frac{\theta}{2}$.

par exemple

$$E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t)$$
$$E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(\omega t)$$

le champ électrique décrit un cercle de rayon $|E_0|$ dans le plan xOy.

Le cas plus général est celui de la polarisation elliptique, où l'extrémité du champ électrique décrit une ellipse.

$$E_x = E_0 \cos\theta \cos(\omega t - \delta_x) = E_0 \ \text{Re}\left[\cos\theta \ e^{-i(\omega t - \delta_x)}\right]$$
$$E_y = E_0 \sin\theta \cos(\omega t - \delta_y) = E_0 \ \text{Re}\left[\sin\theta \ e^{-i(\omega t - \delta_y)}\right]$$

En résumé, la polarisation la plus générale est décrite par un vecteur complexe normalisée à l'unité (ou vecteur unitaire) dans un espace à deux dimensions, de composantes

$$\lambda = \cos\theta \ e^{i\delta_x}, \ \mu = \sin\theta \ \mathrm{e}^{i\delta_y}$$

avec $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$.

En effet, en raison de l'arbitraire de phase, le vecteur de composantes $(\lambda', \ \mu')$

$$\lambda' = \lambda e^{i\varphi}, \mu' = \mu e^{i\varphi}$$

représente la même polarisation que $(\lambda, \ \mu)$.

Il est plus correct de dire que la polarisation est représentée mathématiquement par un rayon, c'est a dire un vecteur à une phase près.

Dans le cas des photons, il y a plusieurs questions qui pose. Par exemple quand un photon arrive à l'entrée de la lame?, quel chemin va t il choisir?, comment se fait il qu'une fraction $(\cos(\theta))^2$ va passer d'un coté et qu'une fraction $(\sin(\theta))^2$ va passer de l'autre ?

La réponse est donnée par la mécanique quantique : Le photon est un "objet quantique" on associe un état quantique à chaque vecteur de base de polarisation de l'onde: $|x\rangle$ pour l'état de polarisation suivant l'axe Ox et $|y\rangle$ pour l'état de polarisation suivant l'axe Oy. A l'orientation θ de la polarisation on associe l'état

$$|\theta\rangle = \cos(\theta)\,|x\rangle + \sin(\theta)\,|y\rangle$$

si on a N photons alors le nombre des photons traversant l'axe Ox est $N(\cos(\theta))^2$ et le nombre des photons traversant l'axe Oy est $N(\sin(\theta))^2$.

1.5 Qubits et postulats quantiques

1 - Espace des états (espace de Hilbert H)

l'état dans ce système s'écrit

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i \in B} |i\rangle \langle i|\ \psi\rangle \\ &= \sum_{i \in B} \alpha_i |i\rangle \qquad \text{où} \qquad \alpha_i = \langle i|\ \psi\rangle \in C \end{aligned}$$

2 - Amplitude de probabilité

l'amplitude de probabilité de trouver $|\psi\rangle$ dans l'état $|i\rangle$ est $\alpha_i = \langle i|\ \psi\rangle$, et la probabilité pour l'état $|\psi\rangle$ de passer donc le test $|i\rangle$ est $P(|\psi\rangle) = |\langle i|\ \psi\rangle|^2 = |\alpha_i|^2$.

3 - Grandeur physiques et opérateurs

A toute grandeur physique mesurable A (Position, vitesse, polarisation, ...) est associé un opérateur linéaire A agissant dans A .

A est le representant mathématique de cette grandeur A.

4 - Principe de quantification et de décomposition spectacle

$$A\,|i\rangle = a_i\,|i\rangle$$

alors on peut écrire A sous la décomposition spectacle

$$A = \sum_i |i\rangle\ \ a_i\ \ \langle i|$$

avec a_i une valeur propre de A ou valeur résultant d'une mesure idéale faite sur A.

La probabilité $P(a_i)$ d'obtenir comme resultant la valeur propre a_i de l'operateur hermicien A est

$$\begin{aligned} P(a_i) &= |\langle i|\ \psi\rangle|^2 = \langle \psi|\ i\rangle \langle i|\ \psi\rangle \\ &= |P_i\,|\psi\rangle|^2 \end{aligned}$$

où $P_i = |i\rangle \langle i|$ est l'operateur projection sur la base orthonormie $\{|i\rangle\}$.

5 - Principe de réduction du paquet d'onde

Si la mesure d'une grandeur physique A sur le système dans l'état $|\psi\rangle$ donne le résultat a_i, l'état du système immédiatemment après la mesure est

$$|i\rangle = \frac{P_i\,|\psi\rangle}{\|P_i\,|\psi\rangle\|}$$

la projection normé de $|\psi\rangle$ sue le sous espace propre associé à a_i. Dans la mesure est une projection orthogonale.

6 - Evolution temporelle du système

L'évolution temporelle du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est régit par l'équation de Schrodinger ou équation d'évolution

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

où $H(t)$ est l'opérateur hermitien associé à l'énergie totale du système ou hamiltonien du système.