Université de Djillali Bounaama Khemis Miliana **Année Universitaire 2022/2023**
Faculté des Sciences et de la Technologie **Information quantique**
Département sciences de la matière **2ième année Master Physique Théorique**

Série 02

Exercice 01:

1- Les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont états propres d'un observable Z avec les valeurs propres $+1$ et -1 respectivement :

$$Z|0\rangle = |0\rangle \text{ et } Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Si on utilise la représentation matricielle des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ l'opérateur Z sera représenté par une matrice 2×2. Construire cette matrice.

2- On construit les opérateurs $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ et $P_1 = |1\rangle\langle 1|$;

a- Donner leur représentation matricielle.

b- Quelle est leur action sur l'état $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$? Evaluer $\langle\psi|P_i|\psi\rangle$.

c- Vérifier que ces opérateurs satisfont $P_i^2 = P_i$, $i = 0,1$

d- Exprimer Z comme une combinaison linéaire de P_0 et P_1; Montrer que $P_0 + P_1 = I$

e- En déduire l'interprétation que l'on peut donner au nombre $\langle\psi|Z|\psi\rangle$.

Exercice 02 : Propriétés des matrices de Pauli

On rappelle l'expression des matrices de Pauli σ_i et de la matrice de Hadamard, H ;

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Elles sont telles que $\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathrm{I}$,

où le symbole de Levi-Civita ε_{ijk} est un tenseur de rang 3 complètement antisymétrique (dans l'échange de n'importe quelle paire indices) :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & pour\ les\ permutations\ circulaires\ droite\ de\ (i,j,k), \\ -1, & pour\ les\ permutations\ circulaires\ de\ 2\ indices\ de\ (i,j,k), \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1- Montrer que les matrices σ_i anti commutent entre elles et en déduire

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z = -\sigma_y\sigma_x\sigma_z = i\mathrm{I}$$

2- On pose $\sigma_0 = I$. Une matrice carrée quelconque Mpeut s'écrire

$$M = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i\sigma_i$$

Montrer que $\lambda_i = \frac{1}{2} tr(M\sigma_i)$

A quelle condition doivent obéir les coefficients λ_i lorsque la matrice M est hermitienne ?

3- Calculer $H\sigma_z H$, $H\sigma_x H$.

Exercice 03 :

On considère un système formé de deux particules de spin ½, dont l'état de spin s'écrit :

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{2}\{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\}$$

01)- Trouver la probabilité de trouver l'état $|\varphi\rangle$ dans l'état $|0\rangle$.

02)- Calculer $\sigma_x \otimes \sigma_z$ et $\sigma_z \otimes \sigma_x$ sous forme matricielle.

03)- Est-ce que l'état $|\varphi\rangle$ est un état corrélé ou non corrélé ? Ecrire ces deux états c'est si possible.

04)- on a l'opérateur de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$

Calculer $H \otimes H|01\rangle$.