**Université de Khemis miliana LMD S.M**

**Faculté des Sciences et de la technologie Information quantique**

**Niveau : 2ième année Master Physique Théorique 2023/2024**

***Devoir***

On considère deux photons en sens inverse, l’un $(1)$ suivant $oz$ et l’autre $(2)$ suivant $–oz$ comme indiqué sur la figure 1 dans un état de polarisation intriqué

$$\left.\left|ψ\right.\right〉=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left.\left|xy\right.\right〉-\left.\left|yx\right.\right〉\right)$$

Les états $\left.\left|x\right.\right〉$ et $\left.\left|y\right.\right〉$ sont des états de polarisation linéaire suivant $ox$ et $oy$.

y

-z

D

G

D

x

G

 Figure 1

1. L’état de polarisation linéaire suivant la direction $\hat{n\_{θ}}$ du plan $xoy$ est

$$\left.\left|θ\right.\right〉=\left.cos\left(θ\right)\left|x\right.\right〉+\left.sin\left(θ\right)\left|y\right.\right〉$$

et l’état de polarisation orthogonale est

$$\left.\left|θ\_{⊥}\right.\right〉=\left.-sin\left(θ\right)\left|x\right.\right〉+\left.cos\left(θ\right)\left|y\right.\right〉$$

Montrer que

$$\left.\left|ψ\right.\right〉=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left.\left|θ θ\_{⊥}\right.\right〉-\left.\left|θ\_{⊥}θ\right.\right〉\right)$$

L’état $\left.\left|ψ\right.\right〉$ est donc invariant par rotation autour de $oz$.

1. Montrer que $\left.\left|ψ\right.\right〉$ s’écrit, en fonction des états de polarisation circulaire

$$\left.\left|D\right.\right〉=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left.\left|x\right.\right〉+i\left.\left|y\right.\right〉\right)$$

$$\left.\left|G\right.\right〉=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left.\left|x\right.\right〉-i\left.\left|y\right.\right〉\right)$$

En prenant garde au sens de propagation des axes $+oz$ et $–oz$ comme indiqué sur la figure 1,

$$\left.\left|ψ\right.\right〉=\frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\left.\left|DD\right.\right〉-\left.\left|GG\right.\right〉\right)$$

1. Soient $P\_{D}$ et $P\_{G}$ les projecteurs sur les états de polarisation circulaire. On peut associer à la grandeur physique polarisation circulaire l’opérateur

$$Σ\_{z}=P\_{D}-P\_{G}$$

1. Montrer cet opérateur est hermitien et que ses vecteurs propres sont $\left.\left|D\right.\right〉$ et $\left.\left|G\right.\right〉$.
2. En utilisant l’opérateur $Σ\_{z}$, vérifier que $\left.\left|ψ\right.\right〉=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\left.\left|DD\right.\right〉-\left.\left|GG\right.\right〉\right)$ est invariant par rotation autour de $oz.$
3. Alice et Bob analysent la polarisation des photons à l’aide de polariseurs linéaires orientés suivant les directions $\hat{n\_{α}}$ pour le photon 1 et $\hat{n\_{β}}$ pour le photon 2 dans le plan $xoy$. On définit
* $P^{++}\left(α, β\right)$, la probabilité pour que le photon 1 soit polarisé suivant $\hat{n\_{α}}$ et le photon 2 suivant $\hat{n\_{β}} $;
* $P^{+-}\left(α, β\right)$, la probabilité pour que le photon 1 soit polarisé suivant $\hat{n\_{α}}$ et le photon 2 suivant $\hat{n\_{β\_{⊥}}} $;
* $P^{-+}\left(α, β\right)$ et $P^{-+}\left(α, β\right)$ étant de façon analogue.

On définit le coefficient de corrélation de polarisation

$$E\left(α, β\right)=P^{++}\left(α, β\right)+P^{--}\left(α, β\right)-\left[P^{+-}\left(α, β\right)+P^{-+}\left(α, β\right)\right]$$

1. En utilisant l’invariant par rotation de $\left.\left|ψ\right.\right〉$ pour simplifier les calculs, trouver l’expression des probabilités précédentes et montrer que

$$E\left(α, β\right)=-cos\left[-2(α- β)\right]$$

1. Quelles valeurs de $α,α^{'}, β et β^{'}$ doit-on utiliser pour obtenir comme dans le cas des spins $\frac{1}{2}.$

$$X=E\left(α, β\right)+E\left(α, β'\right)+E\left(α', β'\right)-E\left(α', β\right)=-2\sqrt{2 }?$$

1. Montrer que

$$\left.\left|ϕ\right.\right〉=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left.\left|xx\right.\right〉+\left.\left|yy\right.\right〉\right)$$

est également invariant par rotation autour de $Oz$. Donner son expression en fonction des états de polarisation circulaire.