**Université de Djillali Bounaama Khemis Miliana Année Universitaire 2022/2023**

**Faculté des Sciences et de la Technologie Information quantique**

**Département sciences de la matière 2ième année Master Physique Théorique**

***Série 01***

***Exercice 01:***

Deux vecteurs en $C^{3}$sont donné par $\left|\left.a\right〉\right.=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\begin{matrix}-2\\4i\end{matrix}}{1}\right)$ et $\left|\left.b\right〉\right.=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}{i}\right)$.

Calculer $\left〈\left.a\right|\right.,\left〈\left.b\right|, \left⟨b\right⟩, \left⟨a\right⟩\right.$, $\left|\left.c\right〉\right.=\left|\left.a\right〉\right.+2\left|\left.b\right〉\right.$ et $\left⟨a\right⟩$

***Exercice 02:***

Soit un système quantique décrit dans la base d’états $\left\{\left|\left.a\right〉, \left|\left.b\right〉\right., \left|\left.c\right〉\right.\right.\right\}$. Dans cette représentation, les états $\left|\left.ψ\right〉\right.$ et $\left|\left.φ\right〉\right.$ ont les amplitudes

$\left⟨ψ\right⟩=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\left⟨ψ\right⟩=0$, $\left⟨ψ\right⟩=i\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\left⟨φ\right⟩=\frac{1+i}{\sqrt{3}}$, $\left⟨φ\right⟩=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\left⟨φ\right⟩=\frac{1}{\sqrt{6}}.$

Calculer la probabilité de trouver le système $P\_{φψ}$.

***Exercice 03:***

Soit les trois qubits suivantes :

1. $\left|\left.ψ\_{1}\right〉\right.=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\left.0\right〉\right.+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\left.1\right〉\right.$, b- $\left|\left.ψ\_{2}\right〉\right.=\frac{i}{2}\left|\left.0\right〉\right.+\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\left.1\right〉\right.$, c- $\left|\left.ψ\_{3}\right〉\right.=\frac{1+i}{\sqrt{3}}\left|\left.0\right〉\right.-\frac{i}{\sqrt{3}}\left|\left.1\right〉\right.$

Trouver pour chaque état la probabilité de trouver l’état $\left|\left.0\right〉\right.$ en état $\left|\left.ψ\_{i}\right〉\right.$, la même question pour l’état $\left|\left.1\right〉\right.$.

***Exercice 04:***

Dans la base $\left\{\left|\left.0\right〉\right., \left|\left.1\right〉\right.\right\}$ calculer la trace de l’opérateur :

$$A=2 i \left.\left|0\right.\right〉\left.\left〈0\right.\right|+3\left.\left|0\right.\right〉\left.\left〈1\right.\right|-2\left.\left|1\right.\right〉\left.\left〈0\right.\right|+4\left.\left|1\right.\right〉\left.\left〈1\right.\right|$$

***Exercice 05:***

Dans la base $\left\{\left|\left.0\right〉\right., \left|\left.1\right〉\right., \left|\left.2\right〉\right.\right\}$ nous écrivons la matrice A comme :

$A\left|\left.0\right〉\right.=\left.\left|1\right.\right〉$, $A\left|\left.1\right〉\right.=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left.\left|0\right.\right〉+\left.\left|1\right.\right〉\right)$, $A\left|\left.2\right〉\right.=\left.\left|0\right.\right〉$

Ecrire la valeur moyenne de A par rapport $\left|\left.ψ\_{1}\right〉\right.=\frac{1}{2}\left|\left.0\right〉\right.-\frac{i}{2}\left|\left.1\right〉\right.+\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left.2\right〉\right.$.

***Exercice 06:***

Un photon polarisé suivant un angle $α$ avec $Ox$ est envoyé sur un analyseur qui fait un angle $θ$ avec $Ox$.

1. Exprimer l’état $\left|\left.θ\right〉\right.$ et l’état orthogonal $\left|\left.θ\_{⊥}\right〉\right.$ dans la base $\left(\left|\left.x\right〉\right., \left|\left.y\right〉\right.\right) $; Exprimer l’état $\left|\left.α\right〉\right.$ toujours dans la base $\left(\left|\left.x\right〉\right., \left|\left.y\right〉\right.\right).$
2. Etablir que $\left|\left.α\right〉=cos⁡(α-θ)\right. \left|\left.θ\right〉\right.+sin⁡(α-θ)\left|\left.θ\_{⊥}\right〉\right.$.
3. En déduire que la probabilité pour que le photon traverse l’analyseur est

$$P\left(θ\rightarrow α\right)=cos^{2}\left(α-θ\right)$$

**Université de Djillali Bounaama Khemis Miliana Année Universitaire 2022/2023**

**Faculté des Sciences et de la Technologie Information quantique**

**Département sciences de la matière 2ième année Master Physique Théorique**

***Série 02***

***Exercice 01:***

1. Les états $\left|\left.0\right〉\right.$ et $\left|\left.1\right〉\right. $sont états propres d’un observable $Z$ avec les valeurs propres $+1$ et $-1$ respectivement :

$Z\left|\left.0\right〉=\left|\left.0\right〉\right.\right.$ et $Z\left|\left.1\right〉\right.=-\left|\left.1\right〉\right.$

Si on utilise la représentation matricielle des états $\left|\left.0\right〉\right.$ et $\left|\left.1\right〉\right.$ l’opérateur $Z$ sera représenté par une matrice $2×2$. Construire cette matrice.

1. On construit les opérateurs $P\_{0}=\left|\left.0\right〉\right.\left〈\left.0\right|\right.$ et $P\_{1}=\left|\left.1\right〉\right.\left〈\left.1\right|\right. $;
2. Donner leur représentation matricielle.
3. Quelle est leur action sur l’état $\left|\left.ψ\right〉\right.=α\left|\left.0\right〉+β\left|\left.1\right〉\right.\right. $? Evaluer $\left〈\left.ψ\right|\right.P\_{i}\left|\left.ψ\right〉\right.$.
4. Vérifier que ces opérateurs satisfont $P\_{i}^{2}=P\_{i}$ , $i=0,1$
5. Exprimer $Z$ comme une combinaison linéaire de $P\_{0}$ et $P\_{1}$; Montrer que $P\_{0}+P\_{1}=I$
6. En déduire l’interprétation que l’on peut donner au nombre $\left〈\left.ψ\right|\right.Z\left|\left.ψ\right〉\right.$.

***Exercice 02 :*** Propriétés des matrices de Pauli

 On rappelle l’expression des matrices de Pauli $σ\_{i}$ et de la matrice de Hadamard, H ;

$σ\_{x}=\left(\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}\right),σ\_{y}=\left(\begin{matrix}0&-i\\i&0\end{matrix}\right)$,$σ\_{z}=\left(\begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix}\right) $; $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{matrix}1&1\\1&-1\end{matrix}\right)$

Elles sont telles que $σ\_{i}σ\_{j}=iε\_{ijk}σ\_{k}+δ\_{ij}Ι$,

où le symbole de Levi-Civita $ε\_{ijk}$ est un tenseur de rang 3 complètement antisymétrique (dans l’échange de n’importe quelle paire indices) :

$$ε\_{ijk}=\left\{\begin{array}{c}1, pour les permutations circulaires droite de \left(i,j,k\right), \\-1, pour les permutations circulaires de 2 indices de \left(i,j,k\right),\\0, sinon \end{array}\right.$$

1. Montrer que les matrices $σ\_{i}$ anti commutent entre elles et en déduire

$$σ\_{x}σ\_{y}σ\_{z}=-σ\_{y}σ\_{x}σ\_{z}=iΙ$$

1. On pose $σ\_{0}=I$. Une matrice carrée quelconque $M$peut s’écrire

$$M=\sum\_{i=0}^{3}λ\_{i}σ\_{i}$$

Montrer que $λ\_{i}=\frac{1}{2}tr\left(Mσ\_{i}\right)$

A quelle condition doivent obéir les coefficients $λ\_{i}$ lorsque la matrice $M$ est hermitienne ?

1. Calculer $Hσ\_{z}H$, $Hσ\_{x}H$.

***Exercice 03 :***

On considère un système formé de deux particules de spin ½, dont l’état de spin s’écrit :

$$\left|\left.φ\right〉\right.=\frac{1}{2}\left\{\left|\left.00\right〉\right.-\left|\left.01\right〉\right.+\left|\left.10\right〉\right.-\left|\left.11\right〉\right.\right\}$$

01)- Trouver la probabilité de trouver l’état $\left|\left.φ\right〉\right.$ dans l’état $\left|\left.0\right〉\right.$.

02)- Calculer $σ\_{x}⨂σ\_{z}$ et $σ\_{z}⨂σ\_{x} $sous forme matricielle.

03)- Est-ce que l’état $\left|\left.φ\right〉\right.$ est un état corrélé ou non corrélé ? Ecrire ces deux états c’est si possible.

04)- on a l’opérateur de Hadamard $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(σ\_{x}+σ\_{z}\right)$

Calculer $H⨂H\left|\left.01\right〉\right.$.