تظهر مشكلات النقل والتخصيص في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثيرا ما تسيير البضائع عبر طرق مختلفة من مواقع عديدة لإيصالها إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة.

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من استخدامها هو إيجاد أسلوب التوزيع الأمثل للوحدات أو المنتوجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ، مراكز تسويقية) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل كلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت، وهي تعالج بصفة عامة مشاكل نقل البضائع وتوزيعها، إلا هذا لا يمنع من استخدام نموذج مشكلة النقل بعد تعديله في حل مشاكل أخرى مماثلة من حيث التكوين ولا يشترط أن يكون لها علاقة بالمواصلات ونقل البضائع مثل خطط التمويل، التخطيط للدعاية والإعلان وغيرها.

كما يعتبر مسالة التخصيص حالة خاصة من حالات النقل والتي تستخدم في تخصيص أوامر الإنتاج وأوامر العمل على الآلات بما يهدف إلى تقليل الوقت أو التكلفة أو تعظيم الإرباح.



## المطلب الأول: مشكلة النقل

تعتبر مشكلة النقل حالة خاصة من البرمجة الخطية والتي يمكن حلها بطريقة بطريقة "simplex" ولكن نظرا لصعوبة تكوين البرنامج الخطي لمشكلة النقل وكذلك طبيعة الجدول الكبير والمعقد الممثل للمشكلة النقل ما يصعب التعامل مع الأرقام الموجودة فيه، فعادة ما تستعمل طرق أخرى أكثر سهولة، ولكن تسير بنفس مبادئ طريقة "simplex"، أي إيجاد حل قاعدي أو ابتدائي، ثم محاولة تحسين الحل الابتدائي حتى الوصول للحل الأمثل.

في ما يخص بالمرحلة الأولى (مرحلة إيجاد الحل القاعدي) هناك ثلاث طرق مختلفة من حيث السهولة وقربها من الحل الأمثل يمكن اعتمادها في هذه المرحلة منها:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛
- الحل بطريقة أقل التكاليف؛
- طريقة الفروقات الكبرى (طريقة "فوجل" "R.W.Vogel").

أما في ما يخص بالمرحلة الثانية (مرحلة إيجاد الحل الأمثل) فهناك عدة طرق نذكر منها:

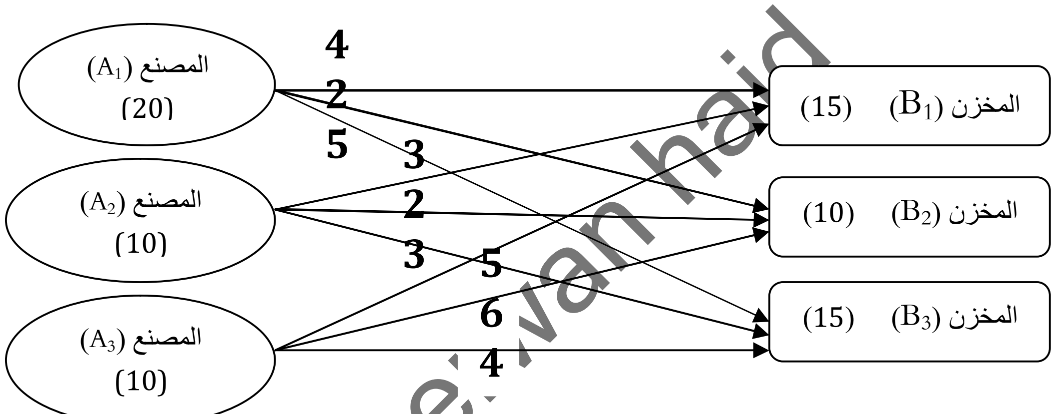
- طريقة التجريب.
- طريقة التحويل.

ورغبة منا في تقديم أفضل الطرق التي يمكن أن توصلنا إلى الحل الأمثل، سنعتمد حسب رأينا على طريقة الفروقات الكبرى في المرحلة الأولى، وطريقة (التحويل) في المرحلة الثانية.

**أولا: مشكلة النقل في حالة تساوي العرض مع الطلب.**

يمكن توضيح الخصائص العامة لهذه المشكلة من خلال المثال التالي:

**مثال (1)**: نفرض أن مشروعا معينا في مدينة ما، يمتلك ثلاث مصانع ($A_3$،$A_2$،$A_1$) تنتج نوع من الثلاجات، وان الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع الثلاثة هي على التوالي:(20،10،10)، ونفرض أيضا أن هذا الإنتاج (الثلاجات) يتم نقله إلى ثلاث مخازن ($B_3$،$B_2$،$B_1$) في أماكن مختلفة طاقتها التخزينية هي على التوالي:(15،10،15)، ويتم نقل هذه الثلاجات من المصنع ($A_1$) إلى المخازن ($B_3$،$B_2$،$B_1$) بتكلفة (4،2،5)ون للثلاجة الواحدة على التوالي، كما يتم نقل الثلاجات من المصنع ($A_2$) إلى المخازن الثلاثة بتكلفة (3،2،3)ون على التوالي، كذلك يتم نقل الثلاجات من المصنع ($A_3$) إلى المخازن ($B_3$،$B_2$،$B_1$) بتكلفة (5،6،4)ون للثلاجة الواحدة على التوالي.
ألان يمكن توضيح هذه المشكلة بيانيا بحيث تتضح فيها المصانع الثلاثة والمخازن الثلاثة، مصحوبة بالطاقات الإنتاجية، كما تمثل الأسهم خطوط النقل من المصانع إلى المخازن مع تكلفة نقل كل وحدة.






**المطلوب**: تحديد أحسن شبكة لنقل الثلاجات إلى المخازن بأقل تكلفة ممكنة.

- ❖ إذا رمزنا للكمية من الثلاجات التي يجب نقلها من كل المصنع (Ai) إلى كل المخزن (Bj) بـ ($X_{ij}$).

i: رقم المصنع j: رقم المخزن

مثلا: الكمية التي يجب نقلها من المصنع ($A_2$) إلى كل المخزن ($B_1$) هي: ($X_{21}$)

- ❖ إذا رمزنا لتكلفة نقل الثلاجات من كل المصنع إلى كل المخزن بـ ($C_{ij}$).

مثلا: تكلفة نقل ثلاجة واحدة من المصنع ($A_2$) إلى كل المخزن ($B_1$) هي: ($C_{21}=3$)

ومنه التكلفة الكلية التي يجب تخفيضها لنقل كل الوحدات من الثلاجات تكون على النحو التالي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n:\text{عدد المصانع}} \sum_{j=1}^{m:\text{عدد المخازن}} C_{ij} * X_{ij}.$$

- ❖ إذا فرضنا أن الكميات المتاحة التي ينتجها كل مصنع تنقل كلها إلى المخازن (العرض40=الطلب40).
- ❖ إذا رمزنا للطاقة الإنتاجية للمصانع بـ ($a_i$) والطاقة التخزينية بـ ($b_j$) فإن القيود المشكلة سوف تكون على النحو التالي:

الطاقة الإنتاجية

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = a_1 = 20. \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = a_2 = 10. \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} = a_3 = 10. \end{cases}$$

… … … … … … … … … … … … ….

الطاقة التخزينية

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} = b_1 = 15. \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = b_2 = 10. \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = b_3 = 15. \end{cases}$$

$$X_{ij} \geq 0.$$

من اجل حل مشكلة النقل أعلاه يمكن استعمال طريقة "simplex"، ولكن نظرا لصعوبة حلها تستعمل طرق أخرى أكثر سهولة، منها طريقة (فوجل) لإيجاد الحل الابتدائي، وطريقة (التحويل) لإيجاد الحل الأمثل.

**1– المرحلة الأولى: إيجاد الحل الابتدائي (طريقة الفروقات الكبرى "طريقة فوجل")**: تسمح لنا هذه الطريقة بإيجاد جدول الحل الابتدائي عادة ما يكون قريب من جدول الحل الأمثل مقارنة بالطرق الأخرى، ويمكن تلخيص خطوات إيجاد التكلفة القاعدية حسب هذه الطريقة في النقاط التالية:

❖ رسم جدول التكاليف الأحادية كما هو موضح في ما يلي:

| المصانع / المخازن | B1 | B2 | B3 | $b_j$ |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 4 | 2 | 5 | 15 |
| A2 | 3 | 2 | 3 | 10 |
| A3 | 5 | 6 | 4 | 15 |
| $a_i$ | 20 | 10 | 10 | 40 |



❖ نقوم بتحديد اقل تكلفتين في كل صف وعمود من الجدول، ثم نحسب الفرق بينهما في كل صف ونسجلهم على يسار الجدول، وفي كل عمود ونسجلهم أعلى الجدول، ثم نحدد العمود أو الصف الذي يقابل اكبر فرق.

| | المصانع / المخازن | B1 | B2 | B3 | $b_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 4-3=1 | 6-2=4 | 4-3=1 | |
| 4-2=2 | A1 | 4 | 2 | 5 | 15 |
| 3-2=1 | A2 | 3 | 2 | 3 | 10 |
| 5-4=1 | A3 | 5 | 6 | 4 | 15 |
| | $a_i$ | 20 | 10 | 10 | 40 |

**ملاحظة (1)**: في حالة وجود عدة فروق كبرى متساوية، يجب أن نختار ذلك الفرق الذي يقابل العمود أو الصف الذي توجد فيه أصغر تكلفة نقل ($C_{ij}$)، وإذا كانت الخانات ذات التكلفة الأصغر أيضا متساوية (متعددة)، فنختار تلك التي يكون مجموع الفروق المقالة لها في الصف والعمود هو الأكبر.

**ملاحظة (2)**: إذا كانت تكلفتان صغيرتان أو أكثر في العمود أو الصف متساويتان؛ فنحسب الفرق بين إحدى هاتين المتكلفتين والتكلفة الأكبر منها مباشرة.

❖ من العمود المحدد في الخطوة السابقة، نحدد اقل تكلفة منه، ثم نملؤها بأقل قيمة من ($b_j$ و $a_i$) المقابلتان لها.

| | | 1 | 4 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المصانع / المخازن | B1 | B2 | B3 | $b_j$ |
| 2 | A1 | 4 | 2 / 10 | 5 | 15 |
| 1 | A2 | 3 | 2 | 3 | 10 |
| 1 | A3 | 5 | 6 | 4 | 15 |
| | $a_i$ | 20 | 10 | 10 | 40 |

❖ بعد هذا نشطب الصف أو العمود الذي تشبع تماما ونعيد حساب الفروقات الجديدة.

| | | 1 | - | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المصانع / المخازن | B1 | B2 | B3 | $b_j$ |
| 1 | A1 | 4 | 2 / 10 | 5 | 5 |
| 1 | A2 | 3 | 2 | 3 | 10 |
| 1 | A3 | 5 | 6 | 4 | 15 |
| | $a_i$ | 20 | 0 | 10 | 40 |



❖ نعيد العمليات السابقة من جديد حتى تستهلك كل الكميات المتاحة لدى المصانع وتشبع كل المخازن لنحصل في كل مرحلة على الجداول التالية:

نلاحظ من الجدول السابق وجود عدة فروقات كبرى متساوية ذات القيمة (1) (العمود الأول والثالث والصف الأول والثاني والثالث) ، وحسب الملاحظة (1) سنختار الصف أو العمود الذي يحتوي على اقل تكلفة (الصف الثاني أو العمود الأول والثالث) ونلاحظ كذلك وجود عدة تكاليف متساوية ذات القيمة (3)، وعند حساب مجموع الفروق القابلة لكل قيمة سنجدها متساوية:

(فرق العمود الأول مع فرق الصف الثاني 1+1=2)

(فرق العمود الثالث مع فرق الصف الثاني 1+1=2)

(فرق الصف الثاني مع فرق العمود الأول 1+1=2)

(فرق الصف الثاني مع فرق العمود الثالث 1+1=2)

في هذه الحالة نختار عشوائيا الصف الثاني لان كل الحالات ستعطينا نفس النتائج.

| | | 1 | - | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المصانع / المخازن | B1 | B2 | B3 | $b_j$ |
| 1 | A1 | 4 | 2<br>10 | 5 | 5 |
| - | A2 | 3<br>10 | 2 | 3 | 0 |
| 1 | A3 | 5 | 6 | 4 | 5 |
| | $a_i$ | 10 | 0 | 10 | 40 |

| | | 1 | - | - | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المصانع / المخازن | B1 | B2 | B3 | $b_j$ |
| 1 | A1 | 4 | 2<br>10 | 5 | 5 |
| - | A2 | 3<br>10 | 2 | 3 | 0 |
| 1 | A3 | 5 | 6 | 4<br>10 | 5 |
| | $a_i$ | 10 | 0 | 0 | 40 |

| | | 4 | - | - | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المصانع / المخازن | B1 | B2 | B3 | $b_j$ |
| 4 | A1 | 4 | 2 (10) | 5 | 5 |
| - | A2 | 3 (10) | 2 | 3 | 0 |
| 5 | A3 | 5 (5) | 6 (0) | 4 (10) | 0 |
| | $a_i$ | 5 | 0 | 0 | 40 |

| | | - | - | - | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المصانع / المخازن | B1 | B2 | B3 | $b_j$ |
| - | A1 | 4 (5) | 2 (10) | 5 | 0 |
| - | A2 | 3 (10) | 2 | 3 | 0 |
| - | A3 | 5 (5) | 6 | 4 (10) | 0 |
| | $a_i$ | 0 | 0 | 0 | 40 |

شبكة النقل والكميات المنقولة في الحل الابتدائي حسب هذه الطريقة هي:

$A_1 \to B_1 = X_{11} = 5$    $A_1 \to B_2 = X_{12} = 10$    $A_1 \to B_3 = X_{13} = 0.$

$A_2 \to B_1 = X_{21} = 10$    $A_2 \to B_2 = X_{22} = 10$    $A_2 \to B_3 = X_{23} = 0.$

$A_3 \to B_1 = X_{31} = 5$    $A_3 \to B_2 = X_{32} = 0$    $A_3 \to B_3 = X_{33} = 10.$

التكلفة الإجمالية للحل الابتدائي:

$$(5*4)+(10*2)+(0*5)+(10*3)+(0*2)+(0*3)+(5*5)+(0*6)+(10*4)=135.$$

ولاختبار قبول هذا الحل نقوم بحساب عدد طرق نقل المستعملة ونقارنها مع القيمة (m+n−1):

| |
|---|
| عدد الطرق =5 / (m+n−1)=(3+3−1)=5 / **عدد الطرق المستعملة =m+n−1** |

جدول الحل الابتدائي هو حل مقبول، ويجب مواصلة الحل بالبحث عن حل أمثل باستخدام طريقة التحويل.

**2- المرحلة الثانية (طريقة التحويل)**: تنقسم هذه الطريقة إلى جزأين:

**الجزء الأول: دراسة إمكانية تحسين الحل**: يمكن اختبار إمكانية تحسين أي حل بإتباع الخطوات التالية:

**الخطوة الأولى**: نكون أربعة جداول بنفس أبعاد جدول التكاليف الأحادية (m*n) حيث (n=3) عدد الصفوف و(m=3) عدد الأعمدة، بعد ذلك نشطب في الجدول الأول الخانات المقابلة للخانات غير المستعملة في شبكة النقل داخل جدول الحل الابتدائي (الخانات الفارغة)، وبالعكس نشطب في الجداول الثلاثة الباقية الخانات المقابلة للخانات المستعملة في شبكة النقل في الجدول الحل الابتدائي.

(1)

| | | |
|---|---|---|
| | | – |
| | – | – |
| | – | |

(2)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | |
| – | | |
| – | | – |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | |
| – | | |
| – | | – |

(4)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | |
| – | | |
| – | | – |

**الخطوة الثانية:** نكتب في الخانات الفارغة بعد الشطب في الجدول الأول والجدول الثالث التكاليف الأحادية ($C_{ij}$).

(1)

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 2 | – |
| 3 | – | – |
| 5 | – | 4 |

(2)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | |
| – | | |
| – | | |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | 5 |
| – | 2 | 3 |
| – | 6 | – |

(4)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | |
| – | | |
| – | | – |

**الخطوة الثالثة:** نضيف عمود وصف على يمين وأسفل الجدول الأول والثاني، ثم نملأ قيمهما حسب المعادلة التالية:

$$C_{ij} = \mathbf{f}_i + \mathbf{s}_j.$$

$f_i$: قيم العمود المضاف.

$s_j$: قيم الصف المضاف.

مع إعطاء دائما $(f_1)$ أو $(s_1)$ القيمة $(0)$ لبدأ عملية الحساب.

(1)

| | | | | $f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | – | 4 |
| | 3 | – | – | 3 |
| | 5 | – | 4 | 5 |
| $S_J$ | 0 | −2 | −1 | |

2 3 4

1 5 6

1.......$s_1=0$ 2.......$f_1=4-0=4$ 3.......$f_2=3-0=3$

4.......$f_3=5-0=5$ 5.......$s_2=2-4=-2$ 6........$s_3=4-5=-1$

**الخطوة الرابعة:** نحول قيم $(f_i)$ و$(s_j)$ المحسوبة من الجدول الأول إلى الجدول الثاني ونحسب قيم التكاليف الجديدة $(p_{ij})$ في الخانات غير المشطوبة حسب المعادلة التالية: $p_{ij} = f_i + s_j$

(2)

| | | | | $f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | – | – | 3 | 4 |
| | – | 1 | 2 | 3 |
| | – | 3 | – | 5 |
| $S_J$ | 0 | −2 | −1 | |

1 2 3 4

1.......$p_{13}=4+(-1)=3$ 2.......$p_{22}=5+(-2)=3$

3.......$p_{24}=5+(-1)=4$ 4.......$p_{32}=5(-2)=3$

**الخطوة الخامسة:** نحسب الفرق بين قيم الجدول الثالث وقيم الجدول الثاني ونضعها في الجدول الرابع.

(1)

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 2 | – |
| 3 | – | – |
| 5 | – | 4 |

(2)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | 3 |
| – | 1 | 2 |
| – | 3 | – |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | 5 |
| – | 2 | 3 |
| – | 6 | – |

(4)

| | | |
|---|---|---|
| – | – | 2 |
| – | 1 | 1 |
| – | 3 | – |

❖ إذا كانت كل قيم الجدول الرابع موجبة فإن الحل الابتدائي المحصل عليه يعتبر حلا امثلا ولا يوجد إمكانية لتحسينه (135ون)، أما إذا كان الجدول الرابع يحتوي على الأقل قيمة واحدة سالبة، فهذا يعني إن جدول الحل الابتدائي لا يعتبر حلا امثلا، مع وجود إمكانية تحسين هذا الحل، بإكمال الجزء الثاني من طريقة التحويل.

في هذا المثال تحقق الحل الأمثل في خطوة واحدة دون اللجوء للجزء الثاني من طريقة التحويل، وهذا لا يحصل في كل المسائل، ولنوضح ذلك في المثال التالي:

**مثال2**: ليكن لدينا جدول التكاليف الأحادية التالي:

**الزبائن**

**مواقع البيع**

| | A | B | C | D | E | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 10 | 5 | 9 | 18 | 11 | 150 |
| II | 13 | 19 | 6 | 12 | 14 | 270 |
| III | 3 | 2 | 4 | 4 | 5 | 300 |
| IV | 18 | 9 | 12 | 17 | 15 | 120 |
| | 320 | 100 | 180 | 140 | 100 | 840<br>840 |

**المطلوب**: تحديد أحسن شبكة لنقل البضائع إلى الزبائن بأقل تكلفة ممكنة.

❖ **إيجاد الحل الابتدائي**: يمكن تلخيص كل مراحل **طريقة الفروقات الكبرى** في جدول واحد على النحو التالي:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | ~~5~~ | | | | ~~1~~ | |
| | | | | | ~~3~~ | ~~4~~ | ~~3~~ | | ~~3~~ | |
| | | | | | ~~7~~ | ~~3~~ | ~~2~~ | ~~8~~ | ~~6~~ | |
| | ~~1~~ | ~~5~~ | ~~4~~ | 4 | 10<br>150 | 5 | 9 | 18 | 11 | ~~150~~ ~~0~~ |
| ~~14~~ | ~~1~~ | 1 | ~~7~~ | ~~6~~ | 13<br>10 | 19 | 6<br>180 | 12 | 14<br>80 | ~~270~~ ~~90~~ ~~80~~ |
| | | | ~~1~~ | 1 | 3<br>160 | 2 | 4 | 4<br>140 | 5 | ~~300~~ ~~160~~ 0 |
| ~~15~~ | ~~3~~ | ~~6~~ | ~~3~~ | 3 | 18 | 9<br>100 | 12 | 17 | 15<br>20 | ~~120~~ ~~20~~ 0 |
| | | | | | ~~320~~<br>~~160~~<br>~~10~~<br>0 | ~~100~~<br>0 | ~~180~~<br>0 | ~~140~~<br>0 | ~~100~~<br>0 | 840 |

كمية البضاعة المنقولة إلى الزبائن من مواقع البيع حسب الحل الابتدائي هي:

$X_{11} = 150 \quad X_{12} = 0 \quad X_{13} = 0 \quad X_{14} = 0 \quad X_{15} = 0$ .

$X_{21} = 10 \quad X_{22} = 0 \quad X_{23} = 180 \quad X_{24} = 0 \quad X_{25} = 80.$

$X_{31} = 160 \quad X_{32} = 0 \quad X_{33} = 0 \quad X_{34} = 140 \quad X_{35} = 0.$

$X_{41} = 0 \quad X_{42} = 100 \quad X_{43} = 0 \quad X_{44} = 0 \quad X_{45} = 20.$

التكلفة الإجمالية للحل الابتدائي:

$$(150 * 10) + (10 * 13) + (180 * 6) + (80 * 14) + (160 * 3) + (140 * 4) + (100 * 9) + (20 * 15) = 6070.$$

❖ **اختبار القبول الحل الابتدائي:**

**m+n−1 = عدد الطرق المستعملة** / (m+n−1)=(5+4−1)=8 / عدد طرق النقل =8

جدول الحل الابتدائي مقبول، لذا سندرس إمكانية تحسين هذا الحل بالذهاب للمرحلة الثانية (طريقة التحويل).

❖ **اختبار إمكانية تحسين الحل الابتدائي:**



(1)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | – | – | – | – | 10 |
| 13 | – | 6 | – | 14 | 13 |
| 3 | – | – | 4 | – | 3 |
| – | 9 | – | – | 15 | 14 |
| 0 | –5 | 7– | 1 | 1 | $f_i$ / $S_j$ |

(2)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| – | 5 | 3 | 11 | 11 | 10 |
| – | 8 | – | 14 | – | 13 |
| – | –2 | 4– | – | 4 | 3 |
| 14 | – | 7 | 15 | – | 14 |
| 0 | –5 | 7– | 1 | 1 | |

(3)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | 5 | 9 | 18 | 11 |
| – | 19 | – | 12 | – |
| – | 2 | 4 | – | 5 |
| 18 | – | 12 | 17 | – |

(4)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | 0 | 6 | 7 | 0 |
| – | 11 | – | 2– | – |
| – | 4 | 8 | – | 1 |
| 4 | – | 5 | 2 | – |

يوجد قيمة واحدة سالبة في الجدول الرابع، هذا يعني إن جدول الحل الابتدائي لا يعتبر حلا امثلا، مع وجود إمكانية تحسين هذا الحل، وذلك بالانتقال إلى الجزء الثاني من طريقة التحويل (مرحلة تكوين حلقة التحويل).

**الجزء الثاني: مرحلة تكوين حلقة التحويل (تحسين الحل)**: أن عملية تحسين أي حل والبحث عن الحل الأمثل حسب هذه المرحلة تتطلب أن الخانة (طريق النقل) التي تحتوي على أصغر قيمة سالبة من الجدول الرابع، يجب أن تتلقى كمية من البضائع أو المنتوج الناقص، والتي تحول إليها من الخانات المجاورة وفق دورة أو حلقة تحويل، وذلك حسب الخطوات التالية:

- ➢ نضع على رؤوس زوايا الحلقة إشارات (+) و(−) بالتناوب، بحيث نبدأ بوضع الإشارة (+) على رأس الزاوية الموجودة في الخانة التي نريد ملؤها (اصغر قيمة سالبة)، وهذا يعني أننا نريد أن نضيف طريق نقل، حيث تنقل كمياته من الخانات (الطرق) المجاورة والتي تشكل معه حلقة التحويل، بمعنى آخر أن الخانات التي عليها علامة (+) سنضيف إليها كميات من البضائع من الخانات التي عليها علامة (−).
- ➢ الكمية المنقولة عبر الحلقة هي اصغر قيمة موجودة على رؤوس زوايا الحلقة، والتي خانتها تحتوي على إشارة (−)، وبذلك تصبح قيمة هذه الخانة تساوي (0)، وقيمة الخانة المراد ملؤها مساوية للقيمة المنقولة، مع طرح أو جمع نفس القيمة حسب الإشارة (−) أو (+) الموجودة داخل خانات رؤوس زوايا الحلقة.

**عند تشكيل الحلقة يجب الأخذ بعين الاعتبار القواعد التالية:**

- ✓ حلقة التحويل يجب أن تكون حسب دورة مشكلة من خطوط منكسرة مغلق، رؤوسه هي زوايا قائمة، كل خانة من خانات جدول النقل التي تشكل جزء من هذه الحلقة وتساهم في عملية التحويل يجب أن تشكل زاوية لهذه الحلقة.
- ✓ التنقل داخل هذه الحلقة يجب أن يكون عموديا أو أفقيا فقط.
- ✓ كل رأس من رؤوس هذه الحلقة يجب أن يكون ناتجا من التقاء خطين فقط من خطوط الحلقة (واحد أفقي والآخر عمودي)، لهذا لا يجب أن يكون هناك ثلاث رؤوس متتالية على نفس الخط المشكل لهذه الحلقة.
- ✓ الخطوط المشكلة لهذه الحلقة يمكن أن تقطع بعضها البعض ولكن نقاط التقاطع لا يمكن اعتبارها رؤوسا لهذه الحلقة.
- ✓ الخانات الفارغة لا يمكن أن اعتبارها رأسا من رؤوس هذه الحلقة ماعدا تلك التي نريد ملأها.
- ✓ في كل حلقة تحويل عدد الرؤوس يجب أن يكون دائما عددا زوجيا.
- ✓ في كل محاولة تحسين الحل هناك دائما دورة تحويل واحدة فقط صحيحة.

❖ **تحسين الحل الابتدائي:** مما سبق يمكن تشكيل حلقة التحويل الأولى لمثالنا السابق على النحو التالي:

❖ **تحسين حل (المحاولة الأولى) :**

**جدول المحاولة (1)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 150 | | | | |
| −10 | | 180 | + | 80 |
| +160 | | | −140 | |
| | 100 | | | 20 |

جدول المحاولة (2)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 150 | | | | |
| | | 180 | 10 | 80 |
| 170 | | | 130 | |
| | 100 | | | 20 |

$$(150*10)+(180*6)+(80*14)+(10*12)+(170*3)+(130*4)+(100*9)+(20*15)=6070.$$

❖ **اختبار قبول حل المحاولة الثانية:**

**m+n−1 = عدد الطرق المستعملة** / (m+n−1)=(5+4−1)=8 / 8= عدد الطرق

جدول المحاولة الثانية مقبول.

❖ **اختبار إمكانية تحسين حل المحاولة الثانية:**



(1)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | – | – | – | – | 10 |
| – | – | 6 | 12 | 14 | 11 |
| 3 | – | – | 4 | – | 3 |
| – | 9 | – | – | 15 | 12 |
| 0 | 3– | 5– | 1 | 3 | $f_i$ / $S_j$ |

(2)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| – | 7 | 5 | 11 | 13 | 10 |
| 11 | 8 | – | – | – | 11 |
| – | 0 | 2– | – | 6 | 3 |
| 12 | – | 2– | 13 | – | 12 |
| 0 | 3– | 5– | 1 | 3 | |

(3)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | 5 | 9 | 18 | 11 |
| 13 | 19 | – | – | – |
| – | 2 | 4 | – | 5 |
| 18 | – | 12 | 17 | – |

(4)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | 2– | 4 | 7 | 2– |
| 2 | 11 | – | – | – |
| – | 2 | 6 | – | −1 |
| 6 | – | 14 | 4 | – |

نلاحظ أنه يوجد ثلاث قيم سالبة كل قيم الجدول الرابع للمحاولة الثانية، لذا يمكنا القول أن جدول المحاولة الثانية هو ليس جدول الحل الأمثل، نقوم بعملية التحويل باختيار اقل قيمة سالبة، فلاحظ انه يوجد قيمة متساويتين (−2)، فنقوم باختيار واحدة من القيمتين عشوائيا.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −150 | + | | | |
| | | 180 | +10 | −80 |
| +170 | | | −130 | |
| | −100 | | | +20 |

جدول المحاولة (2)

**جدول المحاولة (3)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 70 | 80 | | | |
| | | 180 | 90 | |
| 250 | | | 50 | |
| | 20 | | | 100 |

$$(70*10)+(80*5)+(180*6)+(90*12)+(50*4)+(250*3)+(20*9)+(100*15)=5890.$$

❖ **اختبار قبول حل المحاولة الثانية:**

**m+n−1 = عدد الطرق المستعملة** / (m+n−1)=(5+4−1)=8 / 8= عدد الطرق

جدول المحاولة الثانية مقبول.

❖ **اختبار إمكانية تحسين حل المحاولة الثانية:**

(1)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 5 | – | – | – | 10 |
| – | – | 6 | 12 | – | 11 |
| 3 | – | – | 4 | – | 3 |
| – | 9 | – | – | 15 | 14 |
| 0 | 5– | 5– | 1 | 1 | $f_i$ / $S_j$ |

(2)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| – | – | 9 | 11 | 11 | 10 |
| 11 | 6 | – | – | 13 | 11 |
| – | 2– | 2– | – | 4 | 3 |
| 14 | – | 9 | 15 | – | 14 |
| 0 | 5– | 5– | 1 | 1 | |

(3)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | – | 9 | 18 | 11 |
| 13 | 19 | – | – | 14 |
| – | 2 | 4 | – | 5 |
| 18 | – | 12 | 17 | – |

(4)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | – | 0 | 7 | 0 |
| 2 | 13 | – | – | 1 |
| – | 4 | 6 | – | |
| 4 | – | 3 | 2 | – |

نلاحظ أنه كل قيم الجدول الرابع للمحاولة الثالثة غير سالبة(موجبة أو مساوية للصفر)، لذا يمكنا القول أن جدول المحاولة الثالثة هو جدول الحل الأمثل، الشبكة النقل المثلى هي كالتالي:

$\mathrm{I}\rightarrow A=70$ $\mathrm{I}\rightarrow B=80$ $\mathrm{I}\rightarrow C=0$ $\mathrm{I}\rightarrow D=0$ $\mathrm{I}\rightarrow E=0.$

$\mathrm{II}\rightarrow A=0$ $\mathrm{II}\rightarrow B=0$ $\mathrm{II}\rightarrow C=180$ $\mathrm{II}\rightarrow D=90$ $\mathrm{II}\rightarrow E=0.$

$\mathrm{III}\rightarrow A=250$ $\mathrm{III}\rightarrow B=0$ $\mathrm{III}\rightarrow C=0$ $\mathrm{III}\rightarrow D=50$ $\mathrm{III}\rightarrow E=0.$

$\mathrm{IV}\rightarrow A=0$ $\mathrm{IV}\rightarrow B=20$ $\mathrm{IV}\rightarrow C=0$ $\mathrm{IV}\rightarrow D=50$ $\mathrm{IV}\rightarrow E=100.$

**مثال3 (حالة تعظيم)**: ليكن لدينا أربعة منافذ للتوزيع إلى ثلاث مراكز للبيع، الجدول أسفله يوضح الربح الوحدوي المحقق من كل طريق نقل والطاقة الإنتاجية لكل منفذ توزيع، والطاقة التخزينية لكل مركز، والمطلوب تحديد شبكة النقل المثلى التي تحقق لهذه المنافذ اكبر ربح ممكن؟

| | B1 | B2 | B3 | |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 6 | 4 | 7 | 320 |
| A2 | 4 | 6 | 2 | 370 |
| A3 | 3 | 5 | 3 | 280 |
| A4 | 5 | 3 | 5 | 520 |
| | 540 | 450 | 500 | 1490 |



كما رأينا في هذا المثال فالهدف في بعض الأحيان يكون البحث عن أعلى ربح ممكن، في هذه الحالة نتبع كل الإجراءات التي اتبعناها في حالة التدنية (تخفيض التكاليف)، ما عدا الاختلاف يكون في النقاط التالية:

- الاختلاف يكون في كيفية الاختيار للقيمة من الخانات التي تقابل اكبر فرق من الفروقات المحسوبة، ففي حالة اقل التكاليف كانت القيمة التي يجب اختيارها تمثل اقل قيمة من العمود أو الصف الذي يقابل اكبر فرق، لكن في حالة اكبر ربح يجب اختيار اكبر قيمة.
- كذلك يكون الاختلاف في كيفية الاختبار للقيمة من الخانات التي لم تستغل، ففي حالة اقل التكاليف كانت القيمة التي يجب اختيارها تمثل اقل قيمة سالبة، لكن في حالة اكبر ربح يجب اختيار القيمة التي تمثل اكبر قيمة موجبة، والتي تعني أن هذه القيمة سوف ترفع الإرباح بوحدة واحدة.
- طريقة تحديد الجدول النهائي الذي يمثل الحل الأمثل، ففي حالة اقل التكاليف يحدد الجدول النهائي بأنه هو الحل الأمثل عن طريق ملاحظة القيم الموجودة في الجدول الرابع من الجداول الأربعة المكونة لاختبار الامثلية، والتي يجب أن تكون كلها اكبر آو مساوية للصفر (غير سالبة)، بينما في حالة تعظيم الأرباح تكون هذه القيم كلها اصغر آو مساوية للصفر (غير موجبة) لتحديد جدول الحل الأمثل والنهائي.

❖ **إيجاد الحل الابتدائي.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | ~~4~~ | |
| | | | | | | ~~6~~ | 4 | |
| | | | | | ~~4~~ | ~~1~~ | ~~1~~ | |
| | | | | | 4 | ~~3~~ | 1 | |
| | | | | ~~6~~ | 9<br>320 | 2 | 8 | ~~320~~ 0 |
| | | | ~~4~~ | ~~3~~ | 6 | 7<br>370 | 3 | ~~370~~ 0 |
| | | | ~~2~~ | ~~2~~ | 2 | 6<br>80 | 4<br>200 | ~~280~~ ~~200~~ 0 |
| | | | ~~4~~ | ~~2~~ | 7<br>220 | 5 | 9<br>300 | ~~520~~ ~~300~~ 0 |
| | | | | | ~~540~~<br>~~220~~<br>0 | ~~450~~<br>~~80~~<br>0 | ~~500~~<br>~~200~~<br>0 | 1490 |

❖ **اختبار قبول حل الابتدائي:**

عدد الطرق =6 / $(m+n-1)=(4+3-1)=6$ / **عدد الطرق المستعملة = m+n−1**

جدول الحل الابتدائي مقبول.

شبكة النقل حسب جدول الحل الابتدائي:

$A_1 \rightarrow B_1 = X_{11} = 320$ $\quad A_1 \rightarrow B_2 = X_{12} = 0$ $\quad A_1 \rightarrow B_3 = X_{13} = 0.$

$A_2 \rightarrow B_1 = X_{21} = 0$ $\quad A_2 \rightarrow B_2 = X_{22} = 370$ $\quad A_2 \rightarrow B_3 = X_{23} = 0.$

$A_3 \rightarrow B_1 = X_{31} = 0$ $\quad A_3 \rightarrow B_2 = X_{32} = 80$ $\quad A_3 \rightarrow B_3 = X_{33} = 200.$

$A_4 \rightarrow B_1 = X_{31} = 220$ $\quad A_4 \rightarrow B_2 = X_{32} = 0$ $\quad A_4 \rightarrow B_3 = X_{33} = 300.$

الربح الإجمالي للحل الابتدائي:

$$(320 * 9) + (370 * 7) + (80 * 6) + (200 * 4) + (220 * 7) + (300 * 9) = 10990.$$

### ❖ اختبار إمكانية تحسين الحل الابتدائي:

(1)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | – | – | 9 |
| – | 7 | – | 3 |
| – | 6 | 4 | 2 |
| 7 | – | 9 | 7 |
| 0 | 4 | 2 | |

(2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 13 | 11 | 9 |
| 3 | – | 5 | 3 |
| 2 | – | – | 2 |
| – | 11 | – | 7 |
| 0 | 4 | 2 | |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| – | 2 | 8 |
| 6 | – | 3 |
| 2 | – | – |
| – | 5 | – |

(4)

| | | |
|---|---|---|
| – | 11– | 3– |
| 3 | – | 2– |
| 0 | – | – |
| – | 6– | – |

نلاحظ وجود قيمة موجبة في الجدول الرابع (3)، ما يدفعنا للقول أن جدول الحل الابتدائي لا يمثل جدول الحل الأمثل، مع إمكانية تحسين هذا الحل.

### ❖ تحسن حل الجدول الابتدائي:

| | | |
|---|---|---|
| 320 | | |
| + | –370 | |
| | +80 | –200 |
| –220 | | +300 |

**جدول المحاولة الاولى**

| | | |
|---|---|---|
| 320 | | |
| 200 | 170 | |
| | 280 | |
| 20 | | 500 |

الربح الإجمالي المحقق بعد المحاولة الأولى:

$$(320 * 9) + (200 * 6) + (170 * 7) + (280 * 6) + (20 * 7) + (500 * 9) = 11590.$$

تحسن الربح من (10990) إلى (11590).

### ❖ اختبار قبول حل المحاولة الأولى:

عدد الطرق =6 / (m+n−1)=(4+3−1)=6 / **عدد الطرق المستعملة = m+n−1**

جدول المحاولة الأولى مقبول.

❖ **اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الأولى:**

(1)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | – | – | 9 |
| 6 | 7 | – | 6 |
| – | 6 | – | 5 |
| 7 | – | 9 | 7 |
| 0 | 1 | 2 | |

(2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 10 | 11 | 9 |
| – | – | 8 | 6 |
| 5 | – | 7 | 5 |
| – | 8 | – | 7 |
| 0 | 1 | 2 | |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| – | 2 | 8 |
| – | – | 3 |
| 2 | – | 4 |
| – | 5 | – |

(4)

| | | |
|---|---|---|
| – | 8– | –3 |
| – | – | 5– |
| 3– | – | 3– |
| – | 3– | – |

نلاحظ عدم وجود قيم موجبة في الجدول الرابع، ما يدفعنا للقول أن جدول المحاولة الأولى يمثل جدول الحل الأمثل.

**3– مشكلة التحلل**: مشكلة التحلل تحدث عندما تقوم بإجراءات أو خطوات الحل لمشكلة معينة، فيتضح من احد الجداول أن التوزيع الجديد ترتب عليه انخفاض في عدد الخلايا المستغلة (عدد الطرق المستعملة اقل من القيمة (m+n–1))، مما يصبح معه من المستحيل إيجاد قيمة بعض الخلايا، ولتوضيح أكثر هذه الحالة سنستعين بالمثال التالي:

**مثال 1**: ليكن لدينا جدول الحل الابتدائي التالي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4<br>300 | 2 | 6 | 5 |
| 3<br>50 | 7<br>200 | 2 | 6 |
| 3 | 3<br>150 | 5<br>200 | 4<br>250 |

❖ **اختبار قبول الحل الابتدائي:**

عدد الطرق =6 / (m+n–1)=(4+3–1)=6 / **عدد الطرق المستعملة = m+n–1**

جدول الحل الابتدائي مقبول.

❖ **اختبار إمكانية تحسين الحل الابتدائي:**

(1) (2)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | – | – | – | 4 |
| 3 | 7 | – | – | 3 |
| – | 3 | 5 | 4 | 1– |
| 0 | 4 | 6 | 5 | |

(3)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 2 | 6 | 5 |
| – | – | 2 | 6 |
| 3 | – | – | – |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | 8 | 10 | 9 | 4 |
| – | – | 9 | 8 | 3 |
| 1– | – | – | – | 1– |
| 0 | 4 | 6 | 5 | |

(4)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 6– | 4– | 4– |
| – | – | 7– | 2– |
| 4 | – | – | – |

❖ تحسن حل الجدول الابتدائي:

جدول الحل الابتدائي

| | | | |
|---|---|---|---|
| 300 | | | |
| 50 | −200 | + | |
| | +150 | −200 | 250 |

جدول المحاولة الاولى

| | | | |
|---|---|---|---|
| 300 | | | |
| 50 | | 200 | |
| | 350 | | 250 |

❖ اختبار قبول حل المحاولة الأولى:

عدد الطرق =5 / (m+n−1)=(4+3−1)=6 / **عدد الطرق المستعملة ≠ m+n−1**

جدول المحاولة الأولى غير مقبول (مشكلة تحلل عدد الطرق المستعملة من 6 إلى 5).

يمكن علاج هذه المشكلة عن طريق إضافة خلية أخرى للخلايا المستعملة حتى نتمكن من رفع عدد الطرق إلى القيمة (m+n−1)، وللحفاظ على شرط توازن العرض مع الطلب لا يمكن إضافة أي قيمة غير القيمة (0)، ونضعها في الخانة ذات اقل تكلفة، ونتعامل معها كأي قيمة أخرى.

في مثالنا اقل تكلفة من الخانات غير المستغلة هي القيمة (2)، نضع فيها الكمية (0)، ليتحقق شرط عدم التحلل (**عدد الطرق المستعملة = m+n−1**)، ويصبح جدول المحاولة الأولى على النحو التالي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 300 | 0 | | |
| 50 | | 200 | |
| | 350 | | 250 |

### ❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الأولى:

(1)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | – | – | 4 |
| 3 | – | 2 | – | 3 |
| – | 3 | – | 4 | 5 |
| 0 | 2– | −1 | 1– | |

(2)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | – | 3 | 3 | 4 |
| – | 1 | – | 2 | 3 |
| 5 | – | 4 | – | 5 |
| 0 | 2– | 1– | 1– | |

(3)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | – | 6 | 5 |
| – | 7 | – | 6 |
| 3 | – | 5 | – |

(4)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | – | 3 | 2 |
| – | 6 | – | 4 |
| 2– | – | 1 | – |

### ❖ تحسن حل جدول المحاولة الأولى:

جدول المحاولة الاولى

| | | | |
|---|---|---|---|
| −300 | +0 | | |
| 50 | | 200 | |
| + | −350 | | 250 |

جدول المحاولة الثانية

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 300 | | |
| 50 | | 200 | |
| 300 | 50 | | 250 |

### ❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الثانية:

(1)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – | 2 | – | – | 2 |
| 3 | – | 2 | – | 3 |
| 3 | 3 | – | 4 | 3 |
| 0 | 0 | 1– | 1 | |

(2)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | – | 1 | 3 | 2 |
| – | 3 | – | 4 | 3 |
| – | – | 2 | – | 3 |
| 0 | 0 | 1– | 1 | |

(3)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | – | 6 | 5 |
| – | 7 | – | 6 |
| – | – | 5 | – |

(4)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | – | 5 | 2 |
| – | 4 | – | 4 |
| – | – | 3 | – |

كل القيم موجبة، جدول المحاولة الثانية هو جدول الحل الأمثل.

**ثانيا: مشكلة النقل في حالة عدم تساوي العرض مع الطلب.**

في بعض الحالات نجد أن عدد الوحدات المعروضة لا تتساوى مع عدد الوحدات المطلوبة، أو عكس، فيحدث ما يسمى بعدم التوازن بين العرض والطلب، ولإيجاد اقل تكلفة لمشكلة النقل في حالة النموذج غير المتوازن لابد من موازنته، ثم بعد ذلك يمكن استخدام الطرق المذكورة سابقا وبنفس الخطوات، ولفهم أكثر لهذه الحالة سنقوم بحل مثالين حسب الحالات الممكنة لمشكلة عدم توازن البرنامج:

**المثال (1) (العرض اكبر من الطلب)**: الجدول التكاليف الأحادية التالي يمثل حالة عدم توازن الطلب مع العرض، والمطلوب تحديد شبكة نقل المنتجات بأقل تكلفة؟

| | A | B | C | D | E | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | 10 | 15 | 8 | 12 | 11 | 500 |
| G | 15 | 16 | 12 | 10 | 19 | 450 |
| K | 13 | 15 | 10 | 10 | 9 | 300 |
| | 350 | 200 | 180 | 250 | 100 | 1250 / 1080 |



نلاحظ من الجدول أعلاه أن مجموع عرض (K،G،F) (1250وحدة) اكبر من طلب (E،D،C،B،A) (1080وحدة) بقيمة (170وحدة)، ولموازنة هذا النموذج لابد من إضافة عمود وهمي (جديد)، تكون فيه قيمة الطلب مساوية لقيمة الفرق (170) وتكلفة النقل فيه من كل مصادر العرض (K،G،F) مساوي لـ(0)، ليصبح الجدول أعلاه على النحو التالي:

| | A | B | C | D | E | L | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | 10 | 15 | 8 | 12 | 11 | 0 | 500 |
| G | 15 | 16 | 12 | 10 | 19 | 0 | 450 |
| K | 13 | 15 | 10 | 11 | 9 | 0 | 300 |
| | 350 | 200 | 180 | 250 | 100 | 170 | 1250 / 1250 |

بعد عملية الموازنة يمكن استخدام الخطوات السابقة في الحل لإيجاد تكلفة النقل، مع اعتبار التكاليف الصفرية (قيم (0)) المضافة كغيرها من القيم الأخرى، هذا يعني:

- تكاليف الصف أو العمود الوهمي تعتبر التكاليف الدنيا في الصف أو العمود الذي توجد فيه.
- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود يجب أن يأخذ بعين الاعتبار التكلفة الصفرية.

❖ **إيجاد الحل الابتدائي.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ~~3~~ | ~~1~~ | ~~2~~ | ~~1~~ | ~~10~~ ~~2~~ | ~~0~~ | |
| 3 ~~2~~ ~~8~~ | 10 (350) | 15 | 8 (150) | 12 | 11 | 0 | ~~500~~ ~~150~~ 0 |
| 4 ~~2~~ ~~10~~ | 15 | 16 (30) | 12 | 10 (250) | 19 | 0 (170) | ~~450~~ ~~280~~ ~~30~~ 0 |
| 5 ~~1~~ ~~9~~ | 13 | 15 (170) | 10 (30) | 11 | 9 (100) | 0 | ~~300~~ ~~200~~ ~~170~~ 0 |
| | ~~350~~ 0 | ~~200~~ ~~170~~ 0 | ~~180~~ ~~30~~ 0 | ~~250~~ 0 | ~~100~~ 0 | ~~170~~ 0 | |



❖ **اختبار قبول حل المحاولة الأولى:**

عدد الطرق =8 / $8=(3+6-1)=(m+n-1)$ / **عدد الطرق المستعملة $= m+n-1$**

❖ **اختبار إمكانية تحسين جدول الحل الابتدائي:**

(1)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | – | 8 | – | – | – | 10 |
| – | 16 | – | 10 | – | 0 | 13 |
| – | 15 | 10 | – | 9 | – | 12 |
| 0 | 3 | −2 | −3 | −3 | −13 | |

(2)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – | 13 | – | 7 | 7 | −3 | 10 |
| 13 | – | 11 | – | 10 | – | 13 |
| 12 | – | – | 9 | – | −1 | 12 |
| 0 | 3 | −2 | −3 | −3 | −13 | |

(3)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| – | 15 | – | 12 | 11 | 0 |
| 15 | – | 12 | – | 19 | – |
| 13 | – | – | 11 | – | 0 |

(4)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| – | 2 | – | 5 | 4 | 3 |
| 2 | – | 1 | – | 9 | – |
| 1 | – | – | 2 | – | 1 |

جدول الحل الابتدائي هو جدول حل الأمثل، والتكلفة الإجمالية تساوي:

$$(350 * 10) + (150 * 8) + (30 * 16) + (250 * 10) + (170 * 0) + (170 * 15) + (30 * 10) + (100 * 9) = 11430.$$

**المثال (2) (الطلب اكبر من العرض)**: الجدول الأرباح الحادية التالي يمثل حالة عدم توازن الطلب مع العرض، والمطلوب تحديد شبكة نقل المنتجات التي تعود على المورد بأكبر ربح ممكن؟

| | A | B | C | |
|---|---|---|---|---|
| D | 30 | 31.7 | 40 | 180 |
| E | 21.6 | 37.5 | 28.9 | 200 |
| F | 18.8 | 16.4 | 15 | 130 |
| | 250 | 160 | 160 | 510 / 570 |

نلاحظ من الجدول أعلاه أن مجموع الوحدات المطلوبة (570وحدة) اكبر من العرض (510وحدة) بقيمة (60وحدة)، ولموازنة هذا النموذج لابد من إضافة صف وهمي (جديد)، تكون فيه قيمة الطلب مساوية لقيمة الفرق (60) وتكلفة النقل فيه من كل مصادر العرض مساوي لـ(0)، ليصبح الجدول أعلاه على النحو التالي:

| | A | B | C | |
|---|---|---|---|---|
| D | 30 | 31.7 | 40 | 180 |
| E | 21.6 | 37.5 | 28.9 | 200 |
| F | 18.8 | 16.4 | 15 | 130 |
| G | 0 | 0 | 0 | 60 |
| | 250 | 160 | 160 | 510 / 570 |

بعد عملية الموازنة يمكن استخدام الخطوات السابقة في الحل لإيجاد اكبر ربح ممكن.

❖ إيجاد الحل الابتدائي:

| | ~~18.8~~ | ~~16.6~~ | ~~15~~ | |
|---|---|---|---|---|
| ~~1.7~~ | 30<br>180 | 31.7 | 40 | ~~180~~ 0 |
| ~~8.6~~ ~~7.3~~ | 21.6<br>70 | 37.5<br>130 | 28.9 | ~~200~~ ~~130~~ 0 |
| ~~15~~ ~~1.4~~ | 18.8 | 16.4<br>30 | 15<br>100 | ~~130~~ ~~100~~ 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0<br>60 | ~~60~~ 0 |
| | ~~250~~<br>~~70~~<br>0 | ~~160~~<br>~~30~~<br>0 | ~~160~~<br>~~60~~<br>0 | 570 |

❖ اختبار قبول حل الحل الابتدائي:

عدد الطرق =6 / $(m+n-1)=(3+4-1)=6$ / عدد الطرق المستعملة = $\mathbf{m+n-1}$

الربح الإجمالي:

$$(180*30)+(70*21.6)+(130*37.5)+(30*16.4)+(100*15)+(60*0)=13779.$$

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول الحل الابتدائي:

(1)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 | – | – | 30 |
| 21.6 | 37.5 | – | 21.6 |
| – | 16.4 | 15 | 0.5 |
| – | – | 0 | −14.5 |
| 0 | 15.9 | 14.5 | |

(2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 45.9 | 44.5 | 30 |
| – | – | 36.1 | 21.6 |
| 0.5 | – | – | 0.5 |
| −14.5 | 1.4 | – | −14.5 |
| 0 | 15.9 | 14.5 | |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| – | 31.7 | 40 |
| – | – | 28.9 |
| 18.8 | – | – |
| 0 | 0 | – |

(4)

| | | |
|---|---|---|
| – | −14.2 | −4.5 |
| – | – | −7.2 |
| 18.5 | – | – |
| 14.5 | −1.4 | – |

❖ تحسين جدول الحل الابتدائي

| | | |
|---|---|---|
| 180 | | |
| −70 | +130 | |
| + | −30 | 100 |
| | | 60 |

جدول المحاولة الأولى

| | | |
|---|---|---|
| 180 | | |
| 40 | 160 | |
| 30 | | 100 |
| | | 60 |

❖ اختبار قبول حل المحاولة الأولى:

**عدد الطرق المستعملة = m+n−1** / (m+n−1)=(3+4−1)=6 / عدد الطرق =6

الربح الإجمالي الجديد:

$$(180*30)+(40*21.6)+(160*37.5)+(30*18.8)+(100*15)+(60*0)=14328.$$

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الأولى:

(1)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 | – | – | 30 |
| 21.6 | 37.5 | – | 21.6 |
| 18.8 | – | 15 | 18.8 |
| – | – | 0 | 3.8 |
| 0 | 15.9 | 3.8– | |

(2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 45.9 | 26.2 | 30 |
| – | – | 17.8 | 21.6 |
| – | 34.7 | – | 18.8 |
| 3.8 | 19.7 | – | 3.8 |
| 0 | 15.9 | 3.8– | |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| – | 31.7 | 40 |
| – | – | 28.9 |
| – | 16.4 | – |
| 0 | 0 | – |

(4)

| | | |
|---|---|---|
| – | 14.2– | 13.8 |
| – | – | 11.1 |
| – | 18.3– | – |
| 3.8– | 19.7– | – |

❖ تحسين جدول المحاولة الأولى:

| | | |
|---|---|---|
| −180 | | + |
| 40 | 160 | |
| +30 | | −100 |
| | | 60 |

جدول المحاولة الثانية

| | | |
|---|---|---|
| 80 | | 100 |
| 40 | 160 | |
| 130 | | |
| | | 60 |

❖ اختبار قبول حل المحاولة الثانية:

**عدد الطرق المستعملة = m+n−1** / (m+n−1)=(3+4−1)=6 / عدد الطرق =6

الربح الجمالي الجديد:

$$(80*30)+(40*21.6)+(160*37.5)+(130*18.8)+(100*40)+(60*0)=15708.$$

❖ **اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الثانية:**

(1)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 | – | 40 | 30 |
| 21.6 | 37.5 | – | 21.6 |
| 18.8 | – | – | 18.8 |
| – | – | 0 | 10– |
| 0 | 15.9 | 10 | |

(2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 45.9 | – | 30 |
| – | – | 31.6 | 21.6 |
| – | 34.7 | 28.8 | 18.8 |
| 10– | 5.9 | – | 10– |
| 0 | 15.9 | 10 | |

(3)

| | | |
|---|---|---|
| – | 31.7 | – |
| – | – | 28.9 |
| – | 16.4 | 15 |
| 0 | 0 | – |

(4)

| | | |
|---|---|---|
| – | 14.2– | – |
| – | – | 2.7– |
| – | 18.3– | 13.8– |
| 10 | 5.9– | – |

❖ **تحسين جدول المحاولة الثانية:**

| | | |
|---|---|---|
| −80 | | +100 |
| 40 | 160 | |
| 130 | | |
| + | | −60 |

**جدول المحاولة الثالثة**

| | | |
|---|---|---|
| 20 | | 160 |
| 40 | 160 | |
| 130 | | |
| 60 | | |

❖ **اختبار قبول حل المحاولة الثانية:**

عدد الطرق =6 / (m+n−1)=(3+4−1)=6 / **عدد الطرق المستعملة = m+n−1**

**الربح الجمالي الجديد:**

$$(20 * 30) + (40 * 21.6) + (160 * 37.5) + (130 * 18.8) + (160 * 40) + (60 * 0) = 16308.$$

❖ **اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الثالثة:**

**(1)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 | – | 40 | 30 |
| 21.6 | 37.5 | – | 21.6 |
| 18.8 | – | – | 18.8 |
| 0 | – | – | 0 |
| 0 | 15.9 | 10 | |

**(2)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 45.9 | – | 30 |
| – | – | 31.6 | 21.6 |
| – | 34.7 | 28.8 | 18.8 |
| – | 5.9 | 10 | 0 |
| 0 | 15.9 | 10 | |

**(3)**

| | | |
|---|---|---|
| – | 31.7 | – |
| – | – | 28.9 |
| – | 16.4 | 15 |
| – | 0 | 0 |

**(4)**

| | | |
|---|---|---|
| – | 14.2– | – |
| – | – | 2.7– |
| – | 18.3– | 13.8– |
| | 5.9– | 10– |

نلاحظ أن كل القيم في الجدول الرابع سالبة (غير موجبة)، ومنه يمكن القول أن جدول المحاول الثالثة هو جدول الحل الأمثل، واكبر ربح محقق هو (16308ون).

**المطلب الثاني: مشكلة التخصيص (التعيين).**

تعتبر مشكلة التخصيص من إحدى النماذج ألتي تخص مسألة النقل التي هي إحدى تطبيقات نماذج البرمجة الخطية والتي على أساسها نفترض أن لدينا عددا من المصادر يتطلب تخصيصها إلى نفس العدد من مراكز التوزيع، حيث أن المصادر قد تكون أفراد أو وظائف أو أماكن يتطلب تخصيص مراكز توزيعها والتي قد تكون مهمات أو آلات أو مخازن بما يهدف إلى تقليل الوقت أو التكلفة أو تعظيم الإرباح.

يهتم نموذج التخصيص مثلا بحالة أن عدد العمال (n) يمكن تعيينهم (تخصيصهم) على عدد من الآلات (m)، والتي تحتاج إلى تكلفة ($C_{ij}$) حيث: ( $i = 1 \dots n$ ) و($j = 1 \dots m$).

ويظل الهدف لتخصيص وظائف العمال على الآلات لتحقيق اقل تكلفة إجمالية ممكنة أو تحقيق اكبر ربح ممكن.

**أولا: حل مسالة التخصيص في حالة تدنية دالة الهدف.**

يرجع حل هذه المسالة إلى حالة خاصة لمشكلة النقل، حيث العمال يعبرون عن العرض والآلات المستقبلة تعبر الطلب، وان عرض العمال على أي آلة يساوى (1)، هذا يعني أن ($b_i=1$) (العامل لا يقبل العمل إلا في آلة واحدة)، وبالمثل فان طلب الآلات لكل عامل يساوي (1)، هذا يعني أن ($a_i=1$) (الآلة لا تستقبل إلا عامل واحد فقط)، وبهذا يصبح جدول التكاليف الحادية في مشكلة التخصيص على النحو التالي:

جدول التكاليف الأحادية

| العمال / الآلات | 1 | 2 | … | n | $b_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $C_{11}$ | $C_{12}$ | … | $C_{1n}$ | 1 |
| 2 | $C_{21}$ | $C_{22}$ | … | $C_{2n}$ | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋮ |
| m | $C_{m1}$ | $C_{m2}$ | … | $C_{mn}$ | 1 |
| $a_i$ | 1 | 1 | … | 1 | m(≤,=,≥)n |

وعليه يمكن صياغة نموذج التخصيص بصفة عامة رياضية على النحو التالي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اذا كان العامل } i \text{ لم يخصص الى الالة } j \\ 1 & \text{اذا كان العامل } i \text{ خصص الى الالة } j \end{cases}.$$

وقبل البدء بحل مسألة التخصيص يجب أن نشير إلى انه توجد ثلاث حالات لمسائل التخصيص كما يوضحه الجدول أعلاه (حالة ($n = m$) ، حالة ($n > m$) ، حالة ($n < m$))، لذا سنحاول حل بعض الأمثلة حسب كل حالة:

**مثال (1) حالة (n = m)**: شركة لنقل البضائع تملك 5 شاحنات متواجدة في أماكن مختلفة يمكنها نقل البضائع إلى 5 مدن مختلفة، الجدول التالي يبين تكاليف نقل كل شاحنة متوفرة على كل مدينة من المدن الخمسة المخصصة لاستقبال البضائع:

| رقم المدينة / رقم الشاحنة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0001 | 53 | 27 | 33 | 13 | 40 |
| 0002 | 35 | 20 | 34 | 28 | 20 |
| 0003 | 32 | 17 | 44 | 47 | 36 |
| 0004 | 20 | 26 | 24 | 23 | 30 |
| 0005 | 120 | 100 | 125 | 113 | 135 |

**المطلوب**: إيجاد التخصيص الأمثل للشاحنات على المدن بأقل تكلفة.

لحل مشاكل التخصيص سنعتمد على طريقة تسمى "**الطريقة الهنغارية**"، وتمر هذه الطريقة بعدة مراحل تتكون من عدة خطوات كما هو موضح في الشرح التالي:

**المرحلة الأولى**:

❖ تحديد أصغر قيمة في كل صف من صفوف جدول معطيات التخصيص وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك الصف.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 14 | 20 | 0 | 27 |
| 15 | 0 | 14 | 8 | 0 |
| 15 | 0 | 27 | 30 | 19 |
| 0 | 6 | 4 | 3 | 10 |
| 20 | 0 | 25 | 13 | 35 |

❖ تحديد أصغر قيمة في كل عمود من أعمدة جدول التخصيص المحصل عليه من الخطوة الأولى وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك العمود.

**ملاحظة (1)**: العمود أو الصف الذي يوجد فيه (**صفر**) أو أكثر نبقي على قيمه كما هو.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 14 | 16 | 0 | 27 |
| 15 | 0 | 10 | 8 | 0 |
| 15 | 0 | 23 | 30 | 19 |
| 0 | 6 | 0 | 3 | 10 |
| 20 | 0 | 21 | 13 | 35 |

**المرحلة الثانية:**

❖ نفحص كل صف (يمكن أن نبدأ بتفحص الأعمدة) من الأعلى إلى الأسفل (يمكن أن تكون العملية من الأسفل إلى الأعلى)، إذا وجد فيه (0) واحد فقط وغير مخصص وغير مشطوب، فنقوم بوضعه داخل مربع (تخصيصه)، ثم نقوم بشطب كل الاصفار الموجودة في العمود الذي ينتمي إليه الصفر الموضوع داخل المربع.

**ملاحظة (2)**: الصف الذي فيه أكثر من صفر واحد غير مخصص وغير مشطوب لا تخصص أصفاره في المرحلة الأولى، ونتركهم للمرحلة الموالية.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | $\boxed{0}$ | 16 | 14 | 40 |
| 0 | 8 | 10 | $\cancel{0}$ | 15 |
| 19 | 30 | 23 | $\boxed{0}$ | 15 |
| 10 | 3 | 0 | 6 | 0 |
| 35 | 13 | 21 | $\cancel{0}$ | 20 |

❖ نفحص كل عمود من الجدول علبه المحصل من الخطوة السابقة من اليمين إلى اليسار (يمكن أن تكون العملية من اليسار إلى اليمين)، إذا وجد فيه (0) واحد فقط وغير مخصص وغير مشطوب، فنقوم بوضعه داخل مربع (تخصيصه)، ثم نقوم بشطب كل الاصفار الموجودة في الصف الذي ينتمي إليه الصفر الموضوع داخل المربع.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | $\boxed{0}$ | 16 | 14 | 40 |
| $\boxed{0}$ | 8 | 10 | $\cancel{0}$ | 15 |
| 19 | 30 | 23 | $\boxed{0}$ | 15 |
| 10 | 3 | $\cancel{0}$ | 6 | $\boxed{0}$ |
| 35 | 13 | 21 | $\cancel{0}$ | 20 |

❖ نعيد الخطوتين السابقتين من المرحلة الثانية عدة مرات حتى تكون كل الاصفار في الجدول إما مخصصة أو مشطوبة

**ملاحظة (3)**: قبل المرور إلى المرحلة الثالثة من الحل يجب أن تكون كل الاصفار في الجدول إما مخصصة أو مشطوبة.

**ملاحظة (4)**: عندما ننطلق في عملية التخصيص من الصفوف والأعمدة التي تحتوي على صفر واحد فقط، وننتهي من هذه العملية، ثم نلاحظ انه مازالت بعض الصفوف أو الأعمدة تحتوي على أكثر من صفر واحد غير مخصصة وغير مشطوبة ننطلق في عملية التخصيص من الصفوف والأعمدة ذات الصفرين، فنخصص الصفر الأول ونترك الصفر الأخر كما هو ونشطب كل الاصفار في العمود أو الصف الذي ينتمي إليه الصفر المشطوب، فإذا ما انتهت هذه المرحلة الأخيرة ننتقل إلى تلك التي تحتوي على ثلاثة أصفار وهكذا حتى تنتهي عملية التخصيص.

**الملاحظة (5)**: تتطلب عملية التخصيص احترام إجراءات تسلسل عملية التخصيص، هذا يعني إما إجراء كل مراحل عملية التخصيص انطلاقا من الصفوف ثم الأعمدة أو العكس، ومن يمين الجدول إلى يساره أو العكس، وإما كلها من أعلى إلى أسفل الجدول أو العكس.

**المرحلة الثالثة:**

نفحص الجدول المحصل عليه من المرحلة الثانية:

**جدول محاولة التخصيص الأولى**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | $\boxed{0}$ | 16 | 14 | 40 |
| $\boxed{0}$ | 8 | 10 | $\cancel{0}$ | 15 |
| 19 | 30 | 23 | $\boxed{0}$ | 15 |
| 10 | 3 | $\cancel{0}$ | 6 | $\boxed{0}$ |
| 35 | 13 | 21 | $\cancel{0}$ | 20 |

❖ إذا كان الجدول المحصل عليه يحتوي على عدد من الخانات المخصصة (الخانات الصفرية التي هي بداخل المربعات) يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة، وإذا كان كل عمود وكل صف لا يحتوي إلا على خانة مخصصة واحدة، فيمكن القول انه قد تم تحقق شرط الأمثلية، وان الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل، وللحصول على التكلفة الإجمالية نقوم بجمع القيم في الجدول الأول (جدول التكلفة الأحادية) والمقابلة للاصفار المخصصة في جدول الحل الأمثل.

❖ إذا كان أي عمود أو(و) صف أو أكثر يحتوي على أكثر من خانة مخصصة فإن هذا الحل يعتبر غير صحيح (خاطئ) ويجب إعادة مراجعته لأنه لا يحقق الشرط الأساسي لمنهج الطريقة الهنغارية في حل مسائل التخصيص وهو ضرورة تساوي عدد المهام المراد تخصيصها مع عدد المنفذين لهذه المهام.

❖ في حالة ما إذا كان عدد الخانات المخصصة أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة (حالة مثالنا السابق) نستمر في البحث عن الحل الأمثل وذلك بالانتقال إلى المرحلة الرابعة والخامسة.

**المرحلة الرابعة:**

❖ نحدد أي صف لا يحتوي على صفر مخصص بوضع علامة (x) على يمينه.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | $\boxed{0}$ | 16 | 14 | 40 | |
| $\boxed{0}$ | 8 | 10 | $\cancel{0}$ | 15 | |
| 19 | 30 | 23 | $\boxed{0}$ | 15 | |
| 10 | 3 | $\cancel{0}$ | 6 | $\boxed{0}$ | |
| 35 | 13 | 21 | $\cancel{0}$ | 20 | **x** |

❖ نحدد أي عمود يحتوي على صفر مشطوب من الصفوف المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) فوقه.

| | | | x | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | $\boxed{0}$ | 16 | 14 | 40 | |
| $\boxed{0}$ | 8 | 10 | $\cancel{0}$ | 15 | |
| 19 | 30 | 23 | $\boxed{0}$ | 15 | |
| 10 | 3 | $\cancel{0}$ | 6 | $\boxed{0}$ | |
| 35 | 13 | 21 | $\cancel{0}$ | 20 | x |

❖ نحدد أي صف يحتوي على صفر مخصص من الأعمدة المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) على يمينهم.

| | | | x | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | $\boxed{0}$ | 16 | 14 | 40 | |
| $\boxed{0}$ | 8 | 10 | $\cancel{0}$ | 15 | |
| 19 | 30 | 23 | $\boxed{0}$ | 15 | x |
| 10 | 3 | $\cancel{0}$ | 6 | $\boxed{0}$ | |
| 35 | 13 | 21 | $\cancel{0}$ | 20 | x |

❖ نحدد أي عمود **إن وجد** يحتوي على صفر مشطوب من الصفوف المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) فوقه.

❖ نحدد أي صف يحتوي على صفر مخصص من الأعمدة المحدد في الخطوة السابقة **إن وجد** بوضع علامة (x) على يمينهم.

❖ وهكذا نستمر في عملية التحديد حتى يصبح آخر صف تم تحديده لا يحتوي على صفر مشطوب (الجدول الأخير من مثالنا).

❖ نشطب كل صف غير محدد وبالعكس نشطب كل عمود محدد.

| | | | x | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ~~27~~ | ~~$\boxed{0}$~~ | ~~16~~ | ~~14~~ | ~~40~~ | |
| ~~$\boxed{0}$~~ | ~~8~~ | ~~10~~ | ~~$\cancel{0}$~~ | ~~15~~ | |
| 19 | 30 | 23 | ~~$\boxed{0}$~~ | 15 | x |
| ~~10~~ | ~~3~~ | ~~$\cancel{0}$~~ | ~~6~~ | ~~$\boxed{0}$~~ | |
| 35 | 13 | 21 | ~~$\cancel{0}$~~ | 20 | x |

**المرحلة الخامسة:**

❖ نحدد أقل قيمة من بين القيم المتبقية في الجدول (القيم الموجودة في الصفوف والأعمدة غير المشطوبة).

| | | | x | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ~~27~~ | ~~$\boxed{0}$~~ | ~~16~~ | ~~14~~ | ~~40~~ | |
| ~~$\boxed{0}$~~ | ~~8~~ | ~~10~~ | ~~$\cancel{0}$~~ | ~~15~~ | |
| 19 | 30 | 23 | ~~$\boxed{0}$~~ | 15 | x |
| ~~10~~ | ~~3~~ | ~~$\cancel{0}$~~ | ~~6~~ | ~~$\boxed{0}$~~ | |
| 35 | 13 | 21 | ~~$\cancel{0}$~~ | 20 | x |

❖ نطرح هذه القيمة من نفسها ومن القيم الأخرى غير المشطوبة.

❖ نضيف هذه القيمة إلى القيم التي تقع عند نقاط تقاطع أي خط من خطوط الشطب (مشطوبة مرتين) المشار إليها أعلاه.

❖ نبقي القيم المشطوبة مرة واحدة كما هي ونعيد كتابة كل القيم في جدول جديد .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | 0 | 16 | 27 | 40 |
| 0 | 8 | 10 | 13 | 15 |
| 6 | 17 | 10 | 0 | 2 |
| 10 | 3 | 0 | 19 | 0 |
| 22 | 0 | 8 | 0 | 7 |

❖ بعد ذلك نعيد تطبيق خطوات المرحلة الثانية والثالثة (نجري المحاولة ثانية للتخصيص)، فإذا لم نصل إلى الحل الأمثل نعيد تطبيق خطوات المرحلة الرابعة والخامسة وهكذا حتى نصل إلى الحل الأمثل.

➢ **تخصيص جدول المحاولة الثانية:**

**جدول محاولة التخصيص الثانية**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | $\boxed{0}$ | 16 | 27 | 40 |
| $\boxed{0}$ | 8 | 10 | 13 | 15 |
| 6 | 17 | 10 | $\boxed{0}$ | 2 |
| 10 | 3 | $\cancel{0}$ | 19 | $\boxed{0}$ |
| 22 | $\cancel{0}$ | 8 | $\cancel{0}$ | 7 |

➢ **عدم تحقق شرط الامثلية (نواصل المرحلة الرابعة والخامسة).**

| | x | | x | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | $\boxed{0}$ | 16 | 27 | 40 | x |
| $\boxed{0}$ | 8 | 10 | 13 | 15 | |
| 6 | 17 | 10 | $\boxed{0}$ | 2 | x |
| 10 | 3 | ~~0~~ | 19 | $\boxed{0}$ | |
| 22 | ~~0~~ | 8 | ~~0~~ | 7 | x |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 0 | 14 | 27 | 38 |
| 0 | 10 | 10 | 15 | 15 |
| 4 | 17 | 8 | 0 | 0 |
| 10 | 5 | 0 | 21 | 0 |
| 20 | 0 | 6 | 0 | 5 |

➢ **تخصيص جدول المحاولة الثالثة.**

**جدول محاولة التخصيص الثالثة**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | $\boxed{0}$ | 14 | 27 | 38 |
| $\boxed{0}$ | 10 | 10 | 15 | 15 |
| 4 | 17 | 8 | ~~0~~ | $\boxed{0}$ |
| 10 | 5 | $\boxed{0}$ | 21 | ~~0~~ |
| 20 | ~~0~~ | 6 | $\boxed{0}$ | 5 |

➢ نلاحظ أن الجدول المحصل عليه يحتوي على عدد من الخانات المخصصة يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة، (5=5)، وأن كل عمود وكل صف لا يحتوي إلا على خانة مخصصة واحدة، يمكن القول انه قد تم تحقق شرط الأمثلية، وان الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل.

**التخصيص:**

| رقم المدينة / رقم الشاحنة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0001 | 53 | 27 | 33 | 13 | 50 |
| 0002 | 35 | 20 | 34 | 28 | 20 |
| 0003 | 32 | 17 | 44 | 47 | 36 |
| 0004 | 20 | 26 | 24 | 23 | 30 |
| 0005 | 120 | 100 | 125 | 113 | 135 |

(الشاحنة 0001 مخصص للمدينة 4)(الشاحنة 0002 مخصص للمدينة 5)(الشاحنة 0003 مخصص للمدينة 1)(الشاحنة 0004 مخصص للمدينة 3)(الشاحنة 0005 مخصص للمدينة 2).

**اقل تكلفة ممكنة:**

$$\mathbf{13+20+32+24+100=189}.$$

**مثال (2) حالة ($\mathbf{m<n}$)**: أحدى الشركات لديها أربع مناطق بيعيه مختلفة وتمتلك هذه الشركة خمسة رجال بيع، وتريد الشركة تعيين رجال البيع على مناطق الأربعة بطريقة مثلى، وبما أن رجال البيع ليس كلهم بنفس الخبرة ولا نفس المهارة ولا نفس اللغة مناطق البيع ومتطلباتها مختلفة تكلفة، قامت الشركة بتقدير التكاليف المصاحبة لتعيين كل رجال من رجال البيع على كل منطقة بيعيه كما في الجدول:

| رجل البيع / المناطق | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 10 | 21 | 11 | 12 |
| 2 | 14 | 12 | 10 | 8 | 9 |
| 3 | 17 | 14 | 10 | 19 | 14 |
| 4 | 11 | 19 | 14 | 13 | 12 |

**المطلوب**: إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على مناطق البيع بأقل تكلفة.

من ضمن شروط استعمال الطريقة الهنغارية في حل مسائل التخصيص هو ضرورة تساوي الصفوف والأعمدة في جدول المعطيات وذلك لضرورة تساوي عدد المهام المطلوب تنفيذها مع عدد المنفذين، وفي مثالنا يوجد عدد المنفذين (n) اكبر من عدد المهام المطلوب بتنفيذها (m)، ولمعالجة هذا المشكل وكما رأينا سابقا في مسالة النقل، نضيف عمود وهمي بقيم تخصيص تساوي (0)، ثم مواصلة الحل حسب المراحل والخطوات المشار إليها سابقا.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 11 | 21 | 10 | 24 |
| 9 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 14 | 19 | 10 | 14 | 17 |
| 12 | 13 | 14 | 19 | 11 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

❖ تحديد أصغر قيمة في كل صف من صفوف جدول معطيات التخصيص وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك الصف.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 11 | 0 | 14 |
| 1 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 4 | 9 | 0 | 7 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

❖ تحديد أصغر قيمة في كل عمود من أعمدة جدول التخصيص المحصل عليه من الخطوة الأولى وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك العمود.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 11 | 0 | 14 |
| 1 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 4 | 9 | 0 | 7 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

➢ **تخصيص جدول الأول:**

**جدول محاولة التخصيص الاولى**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 11 | $\boxed{0}$ | 14 |
| 1 | $\boxed{0}$ | 2 | 4 | 6 |
| 4 | 9 | $\boxed{0}$ | 7 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | $\boxed{0}$ |
| $\boxed{0}$ | $\cancel{0}$ | $\cancel{0}$ | $\cancel{0}$ | $\cancel{0}$ |



نلاحظ تحقق شرط الأمثلية دون المرور بالمراحل الباقية (الرابعة والخامسة)، وان الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل.

| E | D | C | B | A | رجل البيع / المناطق |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 11 | 21 | 10 | 24 | 1 |
| 9 | 8 | 10 | 12 | 14 | 2 |
| 14 | 19 | 10 | 14 | 17 | 3 |
| 12 | 13 | 14 | 19 | 11 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |

(البائع A يخصص للمنطقة 4) (البائع B يخصص للمنطقة 1) (البائع C يخصص للمنطقة 3)

(البائع D يخصص للمنطقة 2) (البائع E لاتخصص له منطقة لأنه موجود في الصف الوهمي).

**اقل تكلفة ممكنة:** $\mathbf{10 + 8 + 10 + 11 = 39}$

**مثال (3) حالة $(\mathbf{n < m})$:** تملك شركة للبناء والأشغال العمومية ثلاث آلات مختلفة للحفر وتسوية الأراضي، تبين لهذه الشركة أربعة مشاريع لبناء السكنات، حيث كلفت هذه الشركة مكتب للدراسات بتقييم تكاليف حفر وتسوية أراضي هذه المشاريع حسب كل آلة تملكها، فجاءت نتائج المكتب في الجدول التالي:

| 003 | 002 | 001 | الآلات / المشاريع |
|---|---|---|---|
| 7 | 16 | 9 | 1 |
| 4 | 5 | 12 | 2 |
| 9 | 18 | 8 | 3 |
| 20 | 9 | 11 | 4 |

**المطلوب**: إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على مناطق البيع بأقل تكلفة.

بنفس مبدأ حل الحالة السابقة يمكن حل حالة $(n < m)$، حيث من اجل تساوي عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، والذي يمثل شرط استخدام الطريقة المنغارية، نضيف عمود وهمي بقيم تخصيص تساوي $(0)$، ثم مواصلة الحل حسب المراحل والخطوات المشار إليها سابقا.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 16 | 9 |
| 0 | 4 | 5 | 12 |
| 0 | 9 | 18 | 8 |
| 0 | 20 | 9 | 11 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 16 | 9 |
| 0 | 4 | 5 | 12 |
| 0 | 9 | 18 | 8 |
| 0 | 20 | 9 | 11 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 11 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | 5 | 13 | 0 |
| 0 | 16 | 4 | 3 |



جدول محاولة التخصيص الاولى

| X | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | 3 | 11 | 1 | X |
| ~~0~~ | ~~0~~ | $\boxed{0}$ | 4 | |
| ~~0~~ | 5 | 13 | $\boxed{0}$ | |
| ~~0~~ | 16 | 4 | 3 | X |

جدول محاولة التخصيص الثانية

| X | | | X | |
|---|---|---|---|---|
| ~~0~~ | 2 | 10 | ~~0~~ | X |
| 1 | ~~0~~ | $\boxed{0}$ | 4 | |
| 1 | 5 | 13 | $\boxed{0}$ | X |
| $\boxed{0}$ | 15 | 3 | 2 | X |

جدول محاولة التخصيص الثالثة

| | | | |
|---|---|---|---|
| ~~0~~ | 0 | 8 | ~~0~~ |
| 3 | ~~0~~ | $\boxed{0}$ | 6 |
| 1 | 3 | 11 | $\boxed{0}$ |
| $\boxed{0}$ | 13 | 1 | 2 |

بعد محاولة التخصيص الثالثة نلاحظ تحقق شرط الامثلية.

| المشاريع \ الآلات | 001 | 002 | 003 | 004 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 16 | 7 | 0 |
| 2 | 12 | 5 | 4 | 0 |
| 3 | 8 | 18 | 9 | 0 |
| 4 | 11 | 9 | 20 | 0 |

(الآلة 001 يخصص للمشروع 3) (الآلة 002 يخصص للمشروع 2) (الآلة 003 يخصص للمشروع 1)

(المشروع 4 لا تأخذه المؤسسة بعين الاعتبار لأنه موجود في العمود الوهمي (مكلف جدا))

اقل تكلفة ممكنة: $\mathbf{7 + 5 + 8 = 20}$

**ثانيا: حل مسالة التخصيص في حالة تعظيم دالة الهدف.**

لا تختلف خطوات الحل عندما يكون الهدف تحقيق أقصى عائد عن خطوات الحل حينما يكون الهدف تدنيت التكاليف، **إلا** في بداية الحل، حيث يتم بموجب هذا الهدف تحديد اكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها، فنحصل على جدول جديد، ومن ثم يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.

**ملاحظة**: في حالة عدم تساوي الصفوف والأعمدة $((m < n)$ أو $(m > n))$ نقوم كمرحلة أولى بالبحث عن اكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها ونطرح باقي القيم منها، ومن الجدول الجديد المتحصل عليه نقوم بإضافة الصف أو العمود الوهمي حسب الحالة بقيم تخصيص صفرية.

**مثال (1) حالة $(\mathbf{n = m})$**: تريد شركة توظيف أربعة مهندسين على أربعة وظائف مختلفة، فتقدم وبعد تجريبهم على الوظائف الأربعة لمدة معينة، سجل رئيس مصلحة المستخدمين الأرباح المحقق لكل مهندس على كل وظيفة في الجدول التالي:

| الوظائف \ المهندسين | احمد | مُحَمَّد | وليد | منير |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 35 | 37 | 22 | 42 |
| 2 | 20 | 14 | 17 | 15 |
| 3 | 15 | 11 | 20 | 10 |
| 4 | 40 | 30 | 25 | 35 |

**المطلوب**: تخصيص الأمثل للمهندسين على الوظائف، ليعود على الشركة بأكبر ربح ممكن.

❖ تحديد اكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 42 | 22 | 37 | 35 |
| 15 | 17 | 14 | 20 |
| 10 | 20 | 11 | 15 |
| 35 | 25 | 30 | 40 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 5 | 7 |
| 27 | 25 | 28 | 22 |
| 32 | 22 | 31 | 27 |
| 7 | 17 | 12 | 2 |

❖ نتبع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 5 | 7 |
| 5 | 3 | 6 | 0 |
| 10 | 0 | 9 | 5 |
| 5 | 15 | 10 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 0 | 7 |
| 5 | 3 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 4 | 5 |
| 5 | 15 | 5 | 0 |



**جدول محاولة التخصيص الاولى**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | x | |
| ~~0~~ | 20 | $\boxed{0}$ | 7 | |
| 5 | 3 | 1 | $\boxed{0}$ | x |
| 10 | $\boxed{0}$ | 4 | 5 | |
| 5 | 15 | 5 | ~~0~~ | x |

**جدول محاولة التخصيص الثانية**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | 20 | ~~0~~ | 8 |
| 4 | 2 | $\boxed{0}$ | ~~0~~ |
| 10 | $\boxed{0}$ | 4 | 6 |
| 4 | 14 | 4 | $\boxed{0}$ |

➢ **تحقق شرط الامثلية.**

**التخصيص**

| الوظائف \ المهندسين | احمد | مُحَمَّد | وليد | منير |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 35 | 37 | 22 | 42 |
| 2 | 20 | 14 | 17 | 15 |
| 3 | 15 | 11 | 20 | 10 |
| 4 | 40 | 30 | 25 | 35 |

➢ **اكبر ربح إجمالي ممكن**: $40 + 14 + 20 + 40 = 116$

**مثال (2) حالة $(\mathbf{n \neq m})$**: نشرت شركة إعلان توظيف في أربعة مناصب مختلفة، فتقدم 6 أشخاص لشركة، وبعد تجريبهم على الوظائف الأربعة لمدة معينة، سجل رئيس مصلحة المستخدمين الأرباح المحقق لكل مترشح على كل وظيفة في الجدول التالي:

| الوظائف \ المهندسين | احمد | مُحَمَّد | وليد | منير | عادل | حاتم |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 35 | 37 | 22 | 40 | 45 | 42 |
| 2 | 20 | 14 | 17 | 15 | 26 | 30 |
| 3 | 15 | 11 | 20 | 10 | 18 | 8 |
| 4 | 40 | 30 | 25 | 35 | 42 | 48 |

**المطلوب**: اختيار وتخصيص الأمثل للمترشحين على الوظائف الأربعة والذي يعود على الشركة بأكبر ربح ممكن.

❖ تحديد اكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 37 | 22 | 40 | 45 | 42 |
| 20 | 14 | 17 | 15 | 26 | 30 |
| 15 | 11 | 20 | 10 | 18 | 8 |
| 40 | 30 | 25 | 35 | 42 | 48 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 11 | 26 | 8 | 3 | 6 |
| 28 | 34 | 31 | 33 | 22 | 18 |
| 33 | 37 | 28 | 38 | 30 | 40 |
| 8 | 18 | 23 | 13 | 6 | 0 |

❖ من اجل مساواة عدد الصفوف مع عدد الأعمدة في الجدول، نضيف صفين وهميين بأرباح صفرية.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 8 | 26 | 11 | 13 |
| 18 | 22 | 33 | 31 | 34 | 28 |
| 40 | 30 | 38 | 28 | 37 | 33 |
| 0 | 6 | 13 | 23 | 18 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

❖ نتبع نفس الخطوات المشار إليها سابقا وصولاً إلى الحل الأمثل.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 5 | 23 | 8 | 10 |
| 0 | 4 | 15 | 13 | 16 | 10 |
| 12 | 2 | 10 | 0 | 9 | 5 |
| 0 | 6 | 13 | 23 | 18 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

⇐

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 5 | 23 | 8 | 10 |
| 0 | 4 | 15 | 13 | 16 | 10 |
| 12 | 2 | 10 | 0 | 9 | 5 |
| 0 | 6 | 13 | 23 | 18 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| x | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $\boxed{0}$ | 5 | 23 | 8 | 10 | |
| $\boxed{0}$ | 4 | 15 | 13 | 16 | 10 | x |
| 12 | 2 | 10 | $\boxed{0}$ | 9 | 5 | |
| ~~0~~ | 6 | 13 | 23 | 18 | 8 | x |
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | $\boxed{0}$ | |
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | $\boxed{0}$ | ~~0~~ | |

| x | x | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | $\boxed{0}$ | 5 | 23 | 8 | 10 | x |
| $\boxed{0}$ | ~~0~~ | 11 | 9 | 12 | 6 | x |
| 16 | 2 | 10 | $\boxed{0}$ | 9 | 5 | |
| ~~0~~ | 2 | 9 | 19 | 14 | 4 | x |
| 4 | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | $\boxed{0}$ | |
| 4 | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | $\boxed{0}$ | ~~0~~ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | $\boxed{0}$ | 1 | 19 | 4 | 6 |
| $\boxed{0}$ | $\cancel{0}$ | 7 | 5 | 8 | 2 |
| 20 | 6 | 10 | $\boxed{0}$ | 9 | 5 |
| $\cancel{0}$ | 2 | 5 | 15 | 12 | $\boxed{0}$ |
| 8 | 4 | $\cancel{0}$ | $\cancel{0}$ | $\boxed{0}$ | $\cancel{0}$ |
| 8 | 4 | $\boxed{0}$ | $\cancel{0}$ | $\cancel{0}$ | $\cancel{0}$ |

➢ **تحقق شرط الامثلية.**

**التخصيص**

| حاتم | عادل | منير | وليد | محمد | احمد | المهندسين / **الوظائف** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | **45** | 40 | 22 | 37 | 35 | 1 |
| **30** | 26 | 15 | 17 | 14 | 20 | 2 |
| 8 | 18 | 10 | **20** | 11 | 15 | 3 |
| 45 | 42 | 35 | 25 | 30 | **40** | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | 5 |
| 0 | 0 | **0** | 0 | 0 | 0 | 6 |

تخصيص (احمد، وليد، عادل،حاتم) في الوظائف (2،1،3،4) على الترتيب، وعدم توظيف (محمد، منير).

**اكبر عائد ممكن:** $45 + 30 + 20 + 40 = 135$

## سلسلة تمارين

1- حل مسائل النقل التالية حسب كل حالة:

**1/Min**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 12 | 8 | 20 | 250 |
| 38 | 25 | 28 | 32 | 100 |
| 5 | 10 | 6 | 14 | 50 |
| 12 | 15 | 22 | 24 | 120 |
| 130 | 200 | 110 | 80 | 510 |

**2/Max**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 10 | 22 | 20 | 12 | 30 |
| 20 | 8 | 29 | 23 | 13 | 40 |
| 25 | 16 | 32 | 25 | 15 | 55 |
| 35 | 20 | 18 | 19 | 17 | 20 |
| 22 | 33 | 45 | 10 | 35 | 145 |

**3/Min**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 29 | 35 | 20 | 455 |
| 15 | 21 | 33 | 42 | 420 |
| 25 | 20 | 12 | 18 | 400 |
| 352 | 235 | 189 | 270 | |

**4/Min**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8.70 | 1.00 | 2.20 | 2.50 | 25 |
| 7.50 | 2.70 | 1.50 | 2.10 | 30 |
| 6.50 | 1.30 | 1.90 | 1.80 | 20 |
| 9.20 | 2.60 | 3.20 | 2.80 | 50 |
| 5.50 | 4.20 | 4.00 | 3.00 | 10 |
| 9.00 | 2.10 | 1.10 | 1.50 | 30 |
| 45 | 30 | 55 | 80 | |

**5/Max**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 20 |
| 4 | 2 | 5 | 20 |
| 3 | 1 | 6 | 20 |
| 25 | 20 | 10 | |

2- حل مسائل التخصيص التالية حسب كل حالة:

**1/Min**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 15 | 12 | 8 | 20 |
| 40 | 38 | 25 | 28 | 32 |
| 8 | 5 | 10 | 6 | 14 |
| 20 | 12 | 15 | 22 | 24 |
| 30 | 8 | 17 | 27 | 10 |

**2/Min**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 6 | 2 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 9 | 7 | 6 | 2 |
| 7 | 9 | 2 | 1 | 4 | 8 |
| 9 | 7 | 3 | 3 | 1 | 7 |
| 4 | 6 | 5 | 8 | 1 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 2 |

**3/Max**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 120 | 130 | 90 |
| 110 | 80 | 180 | 230 |
| 145 | 75 | 105 | 200 |
| 210 | 135 | 150 | 190 |

**4/ Min**

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |
| 6 | 7 | 3 |
| 7 | 5 | 8 |

**5/Max**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 1 | 5 | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 6 | 7 |
| 6 | 7 | 3 | 8 | 2 |