النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية

تطورات البرمجة الخطية كانت في مجال النظرية الثنائية أو طريقة النموذج المقابل "The Dual"، فإذا كانت المسألة الأولية للبرمجة الخطية خاصة بتعظيم الإرباح فان المسألة الثانية (المقابلة) تكون خاصة بتخفيض التكاليف، وكذلك أذا كانت المسألة الأولية للبرمجة الخطية خاصة بتخفيض التكاليف فان هناك مسألة ثانية تكون خاصة بتعظيم الإرباح، حيث لوحظ وبعد حل النموذجين (النموذج الأصلي والنموذج الثنائي المقابل له) أن الحل الأمثل لدالة الهدف في المسألة الأولية والمسألة الثانية (المقابلة) متطابقتان دائماً، وان هناك إمكانية الحصول على قيم الحل الأمثل للمسألة الثنائية من قيم الحل الأمثل للمسألة الأولية أو العكس.

<u>المطلب الأول: تشكيل النموذج الثنائي والتفسير الاقتصادي له.</u>

أولا: تشكيل النموذج الثنائي.

إذا ما أريد تحويل المسألة الأولية (أو الأصلية) "The Primal" إلى المسألة الثنائية (أو المقابلة) "Dual The" يتطلب الأمر تتبع الخطوات التالية:

- ❖ نحدد متغير بديل غير المتغير المشكلة الأولية حسب عدد القيود الموجودة فيه، وليكن $(\mathbf{y}_i)$، حيث (i=1…m) / m: عدد القيود المجودة في النموذج الأصلي.
- ❖ يعكس مقياس الأمثلة دالة الهدف (Z)، فإذا كانت تعظيم Max دالة الهدف في النموذج الأولي فيقلب إلى Min في دالة الهدف (W) النموذج الثنائي، أو العكس، فإذا كانت تدنية Min دالة الهدف في النموذج الأولي فيقلب إلى Max في النموذج الثنائي.
- ❖ معاملات دالة الهدف (C_i) في المشكلة الأولية تصبح ثوابت الطرف الأيمن $(\grave{\mathbf{b}}_i)$ لقيود المسالة الثنائي.
- ❖ ثوابت الطرف الأيمن (b_i) في المشكلة الأولية تصبح معاملات دالة الهدف $(\grave{C}_i)$ في المشكلة الثنائية.
- ❖ مصفوفة قيود النموذج الأولي (الأصلي) تقلب على النحو التالي في كل الحالات (≤،≥،=):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \dots & \mathbf{a_{mn}} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{21}} & \cdots & \mathbf{a_{m1}} \\ \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a_{1n}} & \mathbf{a_{2n}} & \dots & \mathbf{a_{mn}} \end{Bmatrix}$$

مثلا يحول عمود الأول من مصفوفة عوامل نموذج البرنامج الأصلي إلى عوامل صف الأول من مصفوفة نموذج برنامج الثنائي(الذي يمثل عوامل القيد الأول من نموذج الثنائي):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} \\ \mathbf{a_{21}} \\ \mathbf{a_{31}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\mathbf{a_{11}} \quad \mathbf{a_{21}} \quad \mathbf{a_{31}} \quad \cdots \quad \mathbf{a_{m1}}]$$

وهكذا بالنسبة لكل أعمدة مصفوفة عوامل نموذج البرنامج الأصلي، حتى يتم تشكيل عوامل مصفوفة نموذج برنامج الثنائي.

- ❖ بالنسبة لاتجاه (≤،≥،=) قيود النموذج الأصلي فإننا عند تحويلها ستواجهها عدة حالات:
- ✓ **الحالة الأولى**: إذا كان اتجاه كل القيود الفنية في النموذج الابتدائي على شكل أكبر أو تساوي (≥) فيجب عكسها في النموذج الثنائي وتصبح كلها على شكل أصغر أو تساوي (≤) والعكس أيضا صحيح.
- ✓ **الحالة الثانية**: إذا كانت كل قيود النموذج الأصلي على شكل معادلات (=) مع العلم أن كل معادلة (=) يمكن كتابتها على شكل مراجحتين من اتجاهين مختلفين على النحو التالي:

$$\boldsymbol{A = b \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A \geq B \\ A \leq B \end{Bmatrix}}$$

في هذه الحالة يجب أن نحول كل قيود الشكل الأصلي للنموذج الخطي من الشكل أقل أو يساوي (≤) إذا كان مقياس الأمثلة لدالة الهدف هو (Max)، أو تحويلها إلى شكل أكبر أو تساوي (≥) في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في شكل (Min)، ثم بعد ذلك نقوم بتشكيل النموذج الثنائي حسب الخطوات السابقة.

هذا يعني أن القيود من الشكل (=) في النموذج الأصلي:

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1}$$

تحول إلى الشكل:

$$\boldsymbol{\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \end{Bmatrix}}$$

-إذا كانت دالة الهدف من الشكل (Max) فان القيد السابق يصبح:

$$\boldsymbol{\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \leq -b_1 \end{Bmatrix}}$$

-إذا كانت دالة الهدف من الشكل (Min) فان القيد السابق يصبح:

$$\boldsymbol{\begin{Bmatrix} -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \geq -b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \end{Bmatrix}}$$

مع الإشارة أن المتغير (y_i) في البرنامج الثنائي المقابل للقيد الذي من الشكل معادلة (=) في البرنامج الأصلي، على انه متغير (حر) أو (غير مقيد)، مثلا إذا كان البرنامج الخطي مشكلا من ثلاث قيود على شكل معادلات، ففي البرنامج

الثنائي له، فإن المتغيرات (y_1،y_2،y_3) لا تكتب على أنها اكبر من (0) ($y_1 \geq 0$،$y_2 \geq 0$،$y_3 \geq 0$)، بل تكتب على أنها حرة من هذا الشكل ((y_1(حر)، y_2(حر)، y_3(حر))

- ✓ **الحالة الثالثة**: إذا كان البرنامج الأصلي يحتوي على متغير (حر) أو (غير مقيد)، تعتبر هذه الحالة، الحالة العكسية للحالة الثانية، فمثلا إذا كان في البرنامج الأصلي ((y_2(حر))، فان القيد الثاني من البرنامج الثنائي سيكون على شكل معادلة (=).
- ✓ **الحالة الرابعة**: إذا كان البرنامج الأصلي يحتوي على قيود مختلفة من الشكل (≤ و ≥ و =)، يمكن الاستعانة بكل الحالات السابقة لتشكيل البرنامج الثنائي الخاص به، بداية بتحويل الشكل الابتدائي (الأصلي) للنموذج الخطي إلى الشكل الذي تكون قيوده الفنية كلها من الشكل أقل أو تساوي (≤) إذا كانت دالة الهدف (Max)، وإلى الشكل الذي تكون قيوده الفنية كلها من الشكل اكبر أو تساوي (≥) إذا كانت دالة الهدف (Min)، والجدول التالي يوضح أكثر هذه الحالة:

دالة الهدف	اتجاه القيود في البرنامج الأصلي	اتجاه القيود الذي يجب أن يكون عليه قبل تشكيل البرنامج الثنائي	اتجاه القيود في البرنامج الثنائي المقابل له
دالة الهدف من الشكل (**Max**)	≤	**يبقى كما هو (≤)**	≥
	≥	**يجب تحويل القيد إلى (≤) بضرب القيد الأصلي في (−1)**	≥
	=	**نعوض المعادلة (=) بمتراجحتين متعاكستي الاتجاه (≤،≥) ثم نضرب المتراجحة ذات الاتجاه (≥) في (−1) لتصبح من الاتجاه (≤)، ونبقي المتراجحة ذات الاتجاه (≤) على حالها**	≥

دالة الهدف	اتجاه القيود في البرنامج الأصلي	اتجاه القيود الذي يجب أن يكون عليه قبل تشكيل البرنامج الثنائي	اتجاه القيود في البرنامج الثنائي المقابل له
دالة الهدف من الشكل (**Min**)	≤	**يجب تحويل القيد إلى (≥) بضرب القيد الأصلي في (−1)**	≤
	≥	**يبقى كما هو (≥)**	≤
	=	**نعوض المعادلة (=) بمتراجحتين متعاكستي الاتجاه (≤،≥) ثم نضرب المتراجحة ذات الاتجاه (≤) في (−1) لتصبح من الاتجاه (≥)، ونبقي المتراجحة ذات الاتجاه (≥) على حالها**	≤

مثال1 (**الحالة الأولى**):

$$Max\ Z = 500x_1 + 250x_2 + 300x_3$$
$$15x_1 + 20x_2 + 12x_3 \le 750$$
$$10x_1 - 8x_2 - 5x_3 \le 450$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

المطلوب: شكل البرنامج الخطي الثنائي للبرنامج الخطي الأصلي أعلاه.

الحل:

- ❖ تعيين متغيرات البرنامج الثنائي حسب عدد قيود البرنامج الأصلي (y_1،y_2).
- ❖ $Max\ Z$ تصبح $Min\ W$.
- ❖ معاملات دالة الهدف (C_i) $\{500 \quad 250 \quad 300\}$ في المشكلة الأولية تصبح ثوابت الطرف الأيمن ($\grave{b}_i$) لقيود المسالة الثنائي.
- ❖ ثوابت الطرف الأيمن (b_i) $\begin{Bmatrix} 750 \\ 450 \end{Bmatrix}$ في المشكلة الأولية تصبح معاملات دالة الهدف ($\grave{C}_i$) في المشكلة الثنائية.
- ❖ مصفوفة قيود النموذج الأولي (الأصلي) تقلب على النحو التالي:

$$\begin{Bmatrix} 15 & 20 & 12 \\ 10 & -8 & -5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 15 & 10 \\ 20 & -8 \\ 12 & -5 \end{Bmatrix}$$

- ❖ بالنسبة لاتجاه قيود النموذج الأصلي يلاحظ أن كلها من الشكل ($\le$) فيجب عكسها في النموذج الثنائي وتصبح كلها على شكل ($\ge$) .
- ❖ وبالتالي يصبح البرنامج الثنائي المقابل للبرنامج الخطي السابق على النحو التالي:

$$Min\ W = 750y_1 + 450y_2$$
$$15y_1 + 10y_2 \ge 500$$
$$20y_1 - 8y_2 \ge 250$$
$$12y_1 - 5y_2 \ge 300$$
$$y_1, y_2, \ge 0$$

مثال2 (**الحالة الأولى**):

$$Min\ Z = 15x_1 + 10x_2$$
$$-8x_1 + 3x_2 \ge 30$$
$$2x_1 - 5x_2 \ge 25$$
$$10x_1 + 8x_2 \ge 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: شكل البرنامج الخطي الثنائي للبرنامج الخطي الأصلي أعلاه.

الحل:

$$Max\ W = 30y_1 + 25y_2 + 10y_3$$
$$-8y + 2y_2 + 10y_3 \leq 15$$
$$3y_1 - 5y_2 + 8y_3 \leq 10$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

المثال3 (**الحالة الثانية**):

$$Max\ Z = 8x_1 + 12x_2 + 2x_3$$
$$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 = 40$$
$$4x_1 + 0x_2 - 6x_3 = 66$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: شكل البرنامج الخطي الثنائي للبرنامج الخطي الأصلي أعلاه.

الحل:

- تحويل كل معادلة إلى متراجحتين متعاكستين.

$$Max\ Z = 8x_1 + 12x_2 + 2x_3$$
$$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 40$$
$$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \geq 40$$
$$4x_1 + 0x_2 - 6x_3 \leq 66$$
$$4x_1 + 0x_2 - 6x_3 \geq 66$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- بما أن دالة الهدف من الشكل (Max)، يجب تحويل كل القيود في الاتجاه ($\leq$) على النحو التالي:

$$Max\ Z = 8x_1 + 12x_2 + 2x_3$$
$$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 40$$
$$-2x_1 - 5x_2 - 12x_3 \leq -40$$
$$4x_1 + 0x_2 - 6x_3 \leq 66$$
$$-4x_1 - 0x_2 + 6x_3 \geq -66$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

❖ تشكيل البرنامج الثنائي:

$$Min\ W = 40\hat{y}_1 - 40\breve{y}_1 + 66\hat{y}_2 - 66\breve{y}_2$$
$$2\hat{y}_1 - 2\breve{y}_1 + 4\hat{y}_2 - 4\breve{y}_2 \geq 8$$
$$5\hat{y}_1 - 5\breve{y}_1 + 0\hat{y}_2 - 0\breve{y}_2 \geq 12$$
$$12\hat{y}_1 - 12\breve{y}_1 + 6\hat{y}_2 - 6\breve{y}_2 \geq 2$$

يمكن كتابة:

$$Min\ W = 40(\hat{y}_1 - \breve{y}_1) + 66(\hat{y}_2 - \breve{y}_2)$$
$$2(\hat{y}_1 - \breve{y}_1) + 4(\hat{y}_2 - \breve{y}_2) \geq 8$$
$$5(\hat{y}_1 - \breve{y}_1) + 0(\hat{y}_2 - \breve{y}_2) \geq 12$$
$$12(\hat{y}_1 - \breve{y}_1) + 6(\hat{y}_2 - \breve{y}_2) \geq 2$$

بتعويض $(\hat{y}_1 - \breve{y}_1)$ بـ (y_1) و $(\hat{y}_2 - \breve{y}_2)$ بـ (y_2)

$$Min\ W = 40y_1 + 66y_2$$
$$2y_1 + 4y_2 \geq 8$$
$$5y_1 + 0y_2 \geq 12$$
$$12y_1 + 6y_2 \geq 2$$
$$y_1(\text{حر}),\ y_2(\text{حر})$$

نلاحظ أن المتغيرين $(y1)$ و $(y2)$ هي متغيرات حرة وليست اكبر من (0).

من الناحية التطبيقية يمكن كتابة مباشرة النموذج الثنائي في صورته النهائية (الأخير) دون المرور بالخطوات الثانوية المذكورة أعلاه، يكفي أن نتذكر أن أي قيد فني في النموذج الابتدائي في شكل معادلة يقابله متغير ثنائي (**حر**) والعكس أيضا صحيح إذا كان أي متغير في النموذج الابتدائي (**حر**) فإن ذلك يعني أن القيد الفني الذي الثنائي الذي يقابله يكون في شكل معادلة (الحالة الثالثة).

مثال4 (**الحالة الثالثة**):

$$Max\ Z = 5x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 10$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$
$$3x_1 + 1x_2 \leq 15$$
$$x_1(\text{حر}),\ x_2(\text{حر})$$

المطلوب: شكل البرنامج الخطي الثنائي للبرنامج الخطي الأصلي أعلاه.

الحل:

مباشرة، بما أن (حر) x_2 و (حر) x_1 فان القيد الأول والقيد الثاني سيكون على شكل معادلة، ومنه البرنامج الثنائي سيكون من الشكل التالي:

$$\begin{gathered}
Min\ W = 10y_1 + 20y_2 + 15y_3 \\
2y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 5 \\
4y_1 + 5y_2 + 1y_3 = 3 \\
y_1، y_2، y_3 \geq 0
\end{gathered}$$

مثال5 (**الحالة الرابعة**):

$$\begin{gathered}
Min\ Z = 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 30 \\
1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 25 \\
3x_1 + 1x_2 + 3x_3 \geq 12 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{gathered}$$

المطلوب: شكل البرنامج الخطي الثنائي للبرنامج الخطي الأصلي أعلاه.

الحل:

- تحويل كل معادلة موجودة في البرنامج الأولى إلى متراجحتين متعاكستين:

$$\begin{gathered}
Min\ Z = 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 30 \\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 30 \\
1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 25 \\
3x_1 + 1x_2 + 3x_3 \geq 12 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{gathered}$$

- بما أن دالة الهدف من الشكل (Min)، يجب تحويل كل القيود في الاتجاه (≥) على النحو التالي:

$$\begin{gathered}
Min\ Z = 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\
-2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \geq -30 \\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 30 \\
-1x_1 - 2x_2 - 1x_3 \geq -25 \\
3x_1 + 1x_2 + 3x_3 \geq 12 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{gathered}$$

- تشكيل البرنامج الثنائي:

$$Max\ W = 30(-\hat{y}_1 + \breve{y}_1) - 25y_2 + 12y_3$$
$$2(-\hat{y}_1 + \breve{y}_1) - 1y_2 + 3y_3 \leq 8$$
$$4(-\hat{y}_1 + \breve{y}_1) - 2y_2 + 1y_3 \leq 3$$
$$3(-\hat{y}_1 + \breve{y}_1) - 1y_2 + 3y_3 \leq 3$$

بتعويض $(-\hat{y}_1 + \breve{y}_1)$ بـ (y_1)

$$Max\ W = 30y_1 - 25y_2 + 12y_3$$
$$2y_1 - 1y_2 + 3y_3 \leq 8$$
$$4y_1 - 2y_2 + 1y_3 \leq 3$$
$$3y_1 - 1y_2 + 3y_3 \leq 3$$
$$y_1 \left(\text{حر}\right) / y_2 ، y_3 \geq 0$$

مثال6 (الحالة الرابعة):

$$Max\ Z = 7x_1 - 3x_2 + 6x_3$$
$$10x_1 + 12x_2 + 9x_{23} \geq 320$$
$$20x_1 + 16x_2 + 7x_3 \leq 250$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: شكل البرنامج الخطي الثنائي للبرنامج الخطي الأصلي أعلاه.

الحل:

❖ بما أن دالة الهدف من الشكل (Max)، يجب تحويل كل القيود في الاتجاه ($\leq$) على النحو التالي:

$$Max\ Z = 7x_1 - 3x_2 + 6x_3$$
$$-10x_1 - 12x_2 - 9x_3 \leq -320$$
$$20x_1 + 16x_2 + 7x_3 \leq 250$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

❖ تشكيل البرنامج الثنائي:

$$Min\ W = -320y_1 + 250y_2$$
$$-10y_1 + 20y_2 \leq 7$$
$$-12y_1 + 16y_2 \leq -3$$
$$-9y_1 + 7y_2 \leq 6$$
$$y_1 ، y_2 \geq 0$$

ملاحظة: نلاحظ في القيد الثاني أن $(b_2 = -3)$ وهو متنافي مع شروط البرمجة الخطية، وستواجهها مشاكل عند استخدام طريقة (simplex) في حلها، ومن اجل تخطي هذه المشكلة، نضرب فقط القيد الثاني في (-1)، وقلب اتجاه المتراجحة ليصبح البرنامج الثنائي على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{Min\ W = -320y_1 + 250y_2}$$
$$\boldsymbol{-10y_1 + 20y_2 \leq 7}$$
$$\boldsymbol{12y_1 - 16y_2 \geq 3}$$
$$\boldsymbol{-9y_1 + 7y_2 + \leq 6}$$
$$\boldsymbol{y_1 ، y_2 \geq 0}$$

ثانيا: التفسير الاقتصادي لمعنى النموذج الثنائي "Dual".

تستعمل الموارد الاقتصادية المختلفة في مختلف أوجه النشاط الاقتصادي وفي مختلف القطاعات، والحكم على الاستعمال الاقتصادي لهذه الموارد، بمعنى الجدوى الاقتصادية لاستعمال هذه الموارد، هو مقدار العائد الذي يتحصل عليه الأعوان الاقتصاديون عند استعمالهم لهذه الموارد.

وفقاً للنظرية الاقتصادية تمثل المسألة الثنائية الارتباط بين مسألة التخصيص الموارد وتقييم الموارد، أي تقرير الأسعار الملائمة والتي نعني بها أسعار الظل (أو أسعار الفرص البديلة) المستخدمة لتقييم الموارد النادرة، إذ إن المسألة المقابلة توفر أسعارا ضمنية وحسابية من خلال قيم المتغيرات الواردة في الحل الأمثل، وتستخدم هذه الأسعار (أسعار الظل) لاحتساب كفاءة تخصيص الموارد .

يحدد لنا سعر الظل مقدار الفرصة البديلة للوحدة الواحدة من تلك الموارد، أي يوضح لنا الضياع الاقتصادي المتأتي من قصور الإمكانات المتاحة وبالتالي عدم تحقيق هدف المؤسسة للوصول إلى الكفاية الاقتصادية على أسس اقتصادية سليمة.

ويعرف سعر الظل بأنه "السعر الذي ترغب المؤسسة بدفعه لإتاحة وحدة إضافية من المورد المحدود، أو هو قيمة الوحدة الواحدة الإضافية من المورد بشكل وحدة واحدة من ساعات عمل الآلات أو ساعات عمل المستخدمين أو أي مورد محدود آخر"، ويعرف أيضا بأنه "مقدار التغير في دالة الهدف نتيجة زيادة هذا المستخدم بوحدة واحدة ".

والسؤال المطروح كيف يمكن للبرنامج الثنائي تقييم الفرص البديلة لاستعمال الموارد المتاحة ؟

لغرض التبسيط وتسهيل الفهم، سنحاول أن نوضح معنى هذه الفكرة من خلال المثال التالي:

نفرض أن مؤسسة تقوم بإنتاج نوعين من المتوجات (كراسي وطاولات) وذلك باستخدام أربعة أنواع من الموارد (خشب، حديد، ساعات عمل آلات، يد عاملة)، المتاحة بكميات محدودة.

الجدول التالي يوضح الموارد المستعملة من كل وحدة واحدة منتجة، والكميات المتاحة من كل مورد:

	كراسي	طاولات	الكميات المتاحة
خشب	1.5	4	100 طن
حديد	0.5	1	75 طن
آلات	2	3	8 سا/يوم
يد عاملة	1	2	35 عامل

تبيع المؤسسة متوجاتها بـ: 15ون للكرسي و 25ون للطاولة، وتريد تحقيق اكبر عائد ممكن.

كما رأينا في الفقرات السابقة من المثال، معطيات هذه المسألة ممكن أن نضعها في شكل نموذج خطي كالتالي:

$$\boldsymbol{Max\ Z = 15x_1 + 25x_2}$$
$$\boldsymbol{1.5x_1 + 4x_2 \leq 100}$$
$$\boldsymbol{1x_1 + 0.5x_2 \leq 75}$$
$$\boldsymbol{3x_1 + 2x_2 \leq 8}$$
$$\boldsymbol{1x_1 + 2x_2 \leq 35}$$
$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$

الآن نفترض أنه عوض استعمال هذه الموارد في إنتاج المنتجات المذكورة، فإن المؤسسة طرح أمامها خيار أو إمكانية أخرى لاستعمال هذه الموارد المتاحة في نشاط اقتصادي آخر، في هذه الحالة –في هذه العملية البديلة – يلزم تحديد الثمن وبالتالي العائد الذي من أجله توافق المؤسسة على ترك قطاعها الحالي والتوجه بمواردها نحو القطاع البديل.

إن العائد البديل لاستعمال المورد الأول (سعر الخشب) في قطاع آخر هو(y1) وعائد استعمال المورد الثاني (سعر الحديد) هو (y2)، وهكذا حتى العائد البديل لاستعمال المورد (m) (m: عدد القيود=4) هو (y4).

فإذا كان البرنامج الأصلي يبحث عن أكبر كمية ممكنة التي تحقق للمؤسسة أكبر إيراد (Max) من بيع المنتج (x_1، x_2)، فان البرنامج القابل (الثنائي) يبحث عن اقل عائد (Min) يفوق عائد البرنامج الأصلي من استخدام كل الموارد بالكميات المتاحة لديها ($\boldsymbol{Min\ W = 100y_1 + 75y_2 + 8y_3 + 35y_4}$)، في ضل القيود الفنية المشكلة، والعكس صحيح.

بالنسبة للقيود الفنية للبرنامج الثنائي، فهي تعتبر تقييما بديلا لكميات الموارد المستعملة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول، فإننا نضرب هذه الكميات في تكلفتها البديلة، أي($\boldsymbol{1.5y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 1y_4}$)، ثم نقارن مجموع التكلفة البديل لاستعمال هذه الكميات من الموارد مع العائد الحالي لاستعمالها في إنتاج المنتج الأول وهو الربح المحصل عليه من بيع هذا المنتج (C_1=15).

أي يجب المقارنة بين المقدار المشار إليه ($\mathbf{1.5y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 1y_4}$)، والربح الأحادي ($C_1=15$)، بمعنى آخر يجب أن نشكل القيد الفني الأول للمنتج الأول وهو للنموذج الثنائي، فهذا القيد الفني يسمح بإجراء هذه المقارنة والحكم للمنتج الأول أو العائد على أي العائدين أكبر:

$$\mathbf{1.5y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 1y_4 \overset{?}{\geq} 15}$$

عند تكوين القيود الفنية الأخرى للنموذج الثنائي نستطيع بنفس المنهج تقييم الفرص البديلة لاستعمال كميات الموارد اللازمة لإنتاج المنتجات الأخرى ومقارنتها بعوائدها البديلة:

$$\mathbf{4y_1 + 0.5y_2 + 2y_3 + 2y_4 \overset{?}{\geq} 25}$$

المطلب الثاني: طريقة "simplex" لحل البرامج الخطية الثنائية والعلاقة بين الحل الأمثل الأصلي والثنائي.

يمكن استخدام طريقة "simplex" لحل البرامج الخطية الثنائية بنفس خطوات حل البرنامج الخطية الأصلية مع اختلاف صغير في حالة المتغيرات الحرة، كما يمكن كذلك استنتاج عناصر الحل الأمثل للنموذج الثنائي من عناصر الحل الأمثل للنموذج الابتدائي والعكس صحيح، ولتوضيح كل هذا يمكن الاستعانة بمثال تطبيقي.

مثال (1): ليكن لدينا البرنامج الخطي الأصلي التالي:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{Min\ Z = 20x_1 + 10x_2} \\
\boldsymbol{15x_1 + 5x_2 = 15} \\
\boldsymbol{8x_1 + 6x_2 \geq 12} \\
\boldsymbol{6x_1 + 12x_2 \leq 48} \\
\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}
\end{gathered}$$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي أعلاه هو كالتالي:

الحل	S_3	F_2	F_1	s_2	x_2	x_1	

x_1	1	0	1	$3/25$	$-1/10$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/10$	$-4/25$	$3/10$	0	$6/5$
S_3	0	0	3	$6/5$	-3	1	30
Z	0	0	0	$4/5$ M	1 M	0	24

$$x_1 = 3/5 \qquad x_2 = 6/5 \qquad Min\,Z = 24$$

البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الأصلي أعلاه هو كالتالي:

$$Max\,W = 15y_1 + 12y_2 - 48y_3$$
$$15y_1 + 8y_2 - 6y_3 \le 20$$
$$5y_1 + 6y_2 - 12y_3 \le 10$$
$$y_1\left(\text{حر}\right)\text{،}\, y_2, y_3 \ge 0$$

يمكن معرفة الحل الأمثل لهذا البرنامج الثنائي بحله باستخدام طريقة "simplex"، أو استنتاجه مباشرة من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي، وذلك بمعرفة العلاقة بين الحل الأمثل الأصلي والثنائي.

أولا: طريقة "simplex" لحل البرامج الخطية الثنائية.

بما أن (y_1) متغير حر فانه يمكن كتابة البرنامج الثنائي أعلاه على النحو التالي:

$$Max\,W = 15(\overline{y}_1 - \overline{\overline{y}}_1) + 12y_2 - 48y_3$$
$$15(\overline{y}_1 - \overline{\overline{y}}_1) + 8y_2 - 6y_3 \le 20$$
$$5(\overline{y}_1 - \overline{\overline{y}}_1) + 6y_2 - 12y_3 \le 10$$
$$y_1\left(\text{حر}\right)\text{،}\, y_2, y_3 \ge 0$$

وبعد توزيع المعاملات يصبح البرنامج على النحو التالي:

$$Max\,W = 15\overline{y}_1 - 15\overline{\overline{y}}_1 + 12y_2 - 48y_3$$
$$15\overline{y}_1 - 15\overline{\overline{y}}_1 + 8y_2 - 6y_3 \le 20$$
$$5\overline{y}_1 - 5\overline{\overline{y}}_1 + 6y_2 - 12y_3 \le 10$$
$$y_1\left(\text{حر}\right)\text{،}\, y_2, y_3 \ge 0$$

جدول الحل الابتدائي

	$\bar{y}_1$	$\bar{\bar{y}}_1$	y_2	y_3	s_1	s_2	الحل
S_1	15	-15	8	-6	1	0	20
S_2	5	-5	6	-12	0	1	10
W	-15	15	-12	48	0	0	0

جدول المحاولة الأولى

-5 15

	$\bar{y}_1$	$\bar{\bar{y}}_1$	y_2	y_3	s_1	s_2	الحل
$\bar{y}_1$	1	-1	$8/15$	$-2/5$	$1/15$	0	$4/3$
S_2	0	0	$10/3$	-10	$1/3$	1	$10/3$
W	0	0	-4	42	0	0	20

جدول المحاولة الثانية (جدول الحل الأمثل)

	$\bar{y}_1$	$\bar{\bar{y}}_1$	y_2	y_3	s_1	s_2	الحل
$\bar{y}_1$	1	-1	0	$6/5$	$3/25$	$-8/5$	$4/5$
y_2	0	0	1	-3	$-1/10$	$3/10$	1
W	0	0	0	30	$3/5$	$6/5$	24

$$\boldsymbol{Max\ W = 24}$$

$$\bar{y}_1 = 4/5 \quad \bar{\bar{y}}_1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad y_1 = (\bar{y}_1 - \bar{\bar{y}}_1) = (4/5 - 0) = 4/5$$

$$y_2 = 1$$

$$y_3 = 0$$

ثانيا: العلاقة بين الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأصلي والحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي.

يمكن توضيح العلاقة بين الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأصلي والحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي على النحو التالي:

جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأصلي

	x_1	x_2	s_2	F_1	F_2	S_3	الحل
x_1	1	0	1	$3/25$	$-1/10$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/10$	$-4/25$	$3/10$	0	$6/5$
S_3	0	0	3	$6/5$	-3	1	30
Z	0	0	0	$4/5$ M	1 M	0	24

$Min\ Z = 24$ $\quad x_2 = 6/5$ $\quad x_1 = 3/5$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي

	$\bar{y}_1$	$\bar{\bar{y}}_1$	y_2	y_3	s_1	s_2	الحل
$\bar{y}_1$	1	-1	0	$6/5$	$3/25$	$-4/25$	$4/5$
y_2	0	0	1	-3	$-1/10$	$3/10$	1
W	0	0	0	30	$3/5$	$6/5$	24

$Max\ W = 24$ $\quad y_1 = 4/5$ $\quad y_2 = 1$ $\quad y_3 = 3/5$

من جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأصلي وجدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي يمكن تسجيل عدة ملاحظات تساعدنا في استنتاج عناصر الحل الأمثل للنموذج الثنائي من عناصر الحل الأمثل للنموذج الابتدائي والعكس صحيح:

الملاحظة 1: في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي، معاملات متغيرات الحل الابتدائي (F_1،F_2) للنموذج الأصلي تساوى قيمة متغيرات الحل الأمثل للنموذج الثنائي(y_1،y_2) والعكس أيضا صحيح، أي معاملات

متغيرات الحل الابتدائي للنموذج الثنائي (S_2،S_1) تساوي قيمة متغيرات الحل الأمثل للنموذج الابتدائي(x_2،x_1).

الملاحظة 2: $Max\ W = Min\ Z$ (ما عدا الحالات الخاصة المشار إليها سابقا والتي يكون فيها الحلان غير متساويان).

الملاحظة 3: يمكن حساب قيم (y_2،y_1) حسب المعادلة التالية:

$$[y_i] = [x_i].[A^{-1}]$$

$[y_i]$: صف المتغيرات الناتجة في النموذج المقابل.

$[x_i]$: صف معاملات دالة الهدف الجديدة مرتبة حسب المتغيرات الناتجة بجدول الحل الأمثل في دالة الهدف الجديدة.

$[A^{-1}]$: مصفوفة المتغيرات المكملة كما وردت في جدول الحل الأمثل.