Université Djilali Bounaàma, Khemis-Miliana

Faculté des sciences de la matières et Informatique

Département de Mathématiques

Eenseignante : Dr M. Boukedroun | **L2 :** Mathématique

Module : : Probabilités | **Année :** 2023/2024

Solution de série d'exercice N°4

Lois de probabilités usuelles

- **Exercice 1 :**
- **Exercice 2 :**

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}.$$
$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}.$$

La loi de probabilité de la v.a. X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = X^2 - 1$ et donner sa fonction de répartition :

$$Y(\Omega) = \{-1, 0, 3, 8\}.$$

y_i	-1	0	3	8
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

• **Exercice 3 :**

1. Pour que la loi de probabilité de la v.a. X soit parfaitement déterminée, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=n)=1 &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} k\frac{3^{n-1}}{n!}=1\\ &\Longrightarrow \frac{k}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}=1\\ &\Longrightarrow \frac{k}{3}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}-1\Big)=1\\ &\Longrightarrow \frac{k}{3}(e^3-1)=1\\ &\Longrightarrow k=\frac{3}{e^3-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^* : P(X=n)=\left(\frac{1}{e^3-1}\right)\frac{3^n}{n!}$.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{e^3-1}\right)\frac{3^n}{n!}\\ &= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)e^3\\ &= \frac{3e^3}{e^3-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{1}{e^3-1}\right)\frac{3^n}{n!}\\ &= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)4e^3\\ &= \frac{12e^3}{e^3-1}.\end{aligned}$$

En effet

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=(xe^x)'=(x+1)e^x.$$

Donc :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) + [E(X)]^2 \\ &= \frac{12e^3}{e^3-1} - \left(\frac{3e^3}{e^3-1}\right)^2 \\ &= \frac{3e^3(e^3-4)}{(e^3-1)^2}. \end{aligned}$$

- **Exercice 4 :**

1. La loi de la v.a. X dans le cas où le joueur choisit de répondre à la question facile en premier :

$$X(\Omega) = \{0, 1000, 4000\}.$$

x_i	0	1000	4000
$P(X = x_i)$	$0,4$	$0,42$	$0,18$

Le gain moyen du joueur est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) \\ &= 0 \times (0,4) + 1000 \times (0,42) + 4000 \times (0,18) \\ &= 1140 \ DA. \end{aligned}$$

2. La loi de la v.a. X dans le cas où le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier :

$$X(\Omega) = \{0, 3000, 4000\}.$$

x_i	0	3000	4000
$P(X = x_i)$	$0,7$	$0,12$	$0,18$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) \\ &= 0 \times (0,7) + 3000 \times (0,12) + 4000 \times (0,18) \\ &= 1080 \ DA. \end{aligned}$$

3. **La déduction :** On déduit qu'il est plus avantageux au joueur de choisir de répondre à la question la plus facile en premier.

- **Exercice 5 :**

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :

   On a

$$P(X=1)=\frac{1}{4}.$$

$$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.$$

$$P(X=4)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

$$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4}.$$

   La loi de probabilité de la v.a. X :

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

   Puisque $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)$, on déduit que la v.a. X suit une loi uniforme, on écrit $X\hookrightarrow U_{\{1,2,3,4\}}$.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X)=\frac{n+1}{2}=\frac{5}{2}.$$

$$V(X)=\frac{n^2-1}{12}=\frac{5}{4}.$$

- **Exercice 6 :**

1. La loi de probabilité de la v.a. X :

$$X=\sum_{i=1}^{8}X_i\ tel\ que\ X_i\hookrightarrow B(0,1),\ quadi=1,\cdots,8.$$

   Donc, la v.a. X suit une loi binomiale de paramètre $n=8$ et $p=0,1$, on écrit $X\hookrightarrow B(8;0,1)$, et on a :

$$P(X=k)=C_8^k(0,1)^k(0,9)^{8-k}.$$

2. La probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut :

$$P(X=0)=C_8^0(0,1)^0(0,9)^{8-0}=(0,9)^8=0,43.$$

3. La probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,43 = 0,57.$$

4. La probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut :

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \sum_{i=0}^{1} C_8^i (0,1)^i (0,9)^{8-i} \\ &= 0,813. \end{aligned}$$

• **Exercice 7 :**

1. La loi de probabilité de la v.a. X :

   La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, on écrit $X \hookrightarrow P(1)$, et on a :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1} \frac{1}{k!}.$$

2. La probabilité de trouver :

   - Aucun médecin est :

$$P(X = 0) = e^{-1} \frac{1}{0!} = e^{-1} = 0,368.$$

   - Entre 2 et 4 médecins (au sens large) est :

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= e^{-1} \Big(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \Big) \\ &= 0,261. \end{aligned}$$

   - Au moins deux médecins est :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 1 - \Big(0,368 + e^{-1} \frac{1}{1!} \Big) \\ &= 0,262. \end{aligned}$$

- **Exercice 8 :**

1. Déterminer si la fonction f est une densité de probabilité :

   - $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R}$.

   On a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dx}_{\text{est égale à 0}} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} 4xe^{-2x}dx}_{\text{intégration par parties}} \\
&= \underbrace{\Big[-2xe^{-2x}\Big]_0^{+\infty}}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx \\
&= \Big[-e^{-2x}\Big]_0^{+\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

   Donc,f est bien une densité de probabilité.

   Déterminer la fonction de répartition F associée à f :

   - Si $x < 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

   - Si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^x 4te^{-2t}dt \\
&= 0 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1 \\
&= 1 - (2x+1)e^{-2x}.
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 0, \\ 1 - (2x+1)e^{-2x} & si \ x \geq 0. \end{cases}$$

2. Déterminer si la fonction g est une densité de probabilité :

   - $g(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   - g est continue sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0dx}_{\text{est égale à 0}} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} \frac{4\ln(x)}{x^3}dx}_{\text{intégration par parties}}$$
$$= \underbrace{\left[\frac{-2\ln(x)}{x^2}\right]_1^{+\infty}}_{\text{est égale à 0}} + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^{+\infty}$$
$$= 1.$$

Donc,g est bien une densité de probabilité.

Déterminer la fonction de répartition G associée à g :

- Si $x < 1$, on a :

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

- Si $x \geq 1$, on a :

$$G(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_1^x \frac{4\ln(t)}{t^3}dt$$
$$= \left[\frac{-2\ln(t)}{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{2}{t^3}$$
$$= 1 - \frac{1}{x^2}(2\ln(x) + 1).$$

Ainsi

$$G(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^2}(2\ln(x) + 1) & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

- **Exercice 9 :**

1. Déterminer si la fonction f est une densité de probabilité :

   - $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

   On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dx}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}dx + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0dx}_{\text{est égale à 0}}$$
$$= \left[-\frac{4}{3}\frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^1$$
$$= 1.$$

Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. Déterminer sa fonction de répartition F :

   - Si $x < 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

   - Si $0 \leq x \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_{0}^{x} (1-t)^{\frac{1}{3}} dt \\ &= \left[-(1-t)^{\frac{4}{3}} \right]_{0}^{x} \\ &= 1 - (1-x)^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

   - Si $x > 1$, on a :

$$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dx}_{\text{est égale à 0}} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} dx}_{\text{est égale à 1}} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} 0dx}_{\text{est égale à 0}}$$

   Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0, \\ 1 - (1-x)^{\frac{4}{3}} & si\ 0 \leq x \geq 1 \\ 1 & si\ x > 1. \end{cases}$$

3. Calculer $P(0,488 < X \leq 1,2)$:

$$\begin{aligned} P(0,488 < X \leq 1,2) &= F(1,2) - F(0,488) \\ &= 1 - (1 - (1 - 0,488)^{\frac{4}{3}}) \\ &= 0,410. \end{aligned}$$

• **Exercice 11 :**

1. Déterminons la valeur de la constante c :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 &\Longrightarrow \int_{0}^{+\infty} ce^{-2\alpha x}(1-e^{-\alpha x})dx = 1\\ &\Longrightarrow c\int_{0}^{+\infty}(e^{-2\alpha x}-e^{-3\alpha x})dx = 1\\ &\Longrightarrow c\Big[-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha x}+\frac{1}{3\alpha}e^{-3\alpha x}\Big]_0^{+\infty} = 1\\ &= c\Big(0+\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{3\alpha}\Big) = 1\\ &\Longrightarrow c\Big(\frac{3\alpha-2\alpha}{6\alpha^2}\Big) = 1\\ &\Longrightarrow \frac{c}{6\alpha} = 1\\ &\Longrightarrow c = 6\alpha.\end{aligned}$$

2. Déterminons la fonction de répartition F_X de la v.a. X : • Si $x < 0$, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

• Si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à } 0} + \int_{0}^{+\infty}(6\alpha e^{-2\alpha t}(1-e^{-\alpha t}))dt\\ &= 6\alpha\int_{0}^{+\infty}(e^{-2\alpha t}-e^{-3\alpha t})dt\\ &= 6\alpha\Big[-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}+\frac{1}{3\alpha}e^{-3\alpha t}\Big]_0^{x}\\ &= 1-3e^{-2\alpha x}+2e^{-3\alpha x}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0;\\ 1-3e^{-2\alpha x}+2e^{-3\alpha x} & si\ x \geq 0.\end{cases}$$

3. Pour $\alpha = 1$, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0;\\ 1-3e^{-2x}+2e^{-3x} & si\ x \geq 0.\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(-1 \leq X \leq 2,5) &= F_X(2,5) - F_X(-1) \\
&= (1 - 3e^{-2(2,5)} + 2e^{-3(2,5)}) - 0 \\
&= 0,980. \\
P(1,5 \leq X \leq 3,75) &= F_X(3,75) - F_X(1,5) \\
&= (1 - 3e^{-2(3,75)} + 2e^{-3(3,75)}) - (1 - 3e^{-2(1,5)} + 2e^{-3(1,5)}) \\
&= 0,125. \\
P(X > 6) &= 1 - P(X \leq 6) \\
&= 1 - F_X(6) \\
&= 1 - (1 - 3e^{-2(6)} + 2e^{-3(6)}) \\
&= 0,0000184.
\end{aligned}$$

4. pour $Y = e^{-\alpha X}$:

   - Trouvons la densité de probabilité de la v.a. Y :

$$X(\Omega) = [0, +\infty[\Longrightarrow Y(\Omega) = [0, 1].$$

Pour $y \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(e^{-\alpha X} \leq y) \\
&= P(-\alpha X \leq \ln(y)) \\
&= P\Big(X \geq -\frac{\ln(y)}{\alpha}\Big) \\
&= 1 - 8P\Big(X < -\frac{\ln(y)}{\alpha}\Big) \\
&= 1 - F_X\Big(-\frac{\ln(y)}{\alpha}\Big)
\end{aligned}$$

Donc, pour $y \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= F'_Y(y) \\
&= \frac{1}{\alpha y} f_X\Big(-\frac{\ln(y)}{\alpha}\Big) \\
&= \frac{1}{\alpha y}\Big(6\alpha e^{2\alpha\frac{\ln(y)}{\alpha}}\Big(1 - e^{\alpha\frac{\ln(y)}{\alpha}}\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{y}\Big(6e^{2\ln(y)}\Big(1 - e^{\ln(y)}\Big)\Big) \\
&== \frac{1}{y}\Big(6y^2(1-y)\Big) \\
&= 6y - 6y^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 6y - 6y^2 \quad si\ 0 \leq y \leq 1 \\ \\ 0 \qquad sinon. \end{cases}$$

- Déterminons la fonction de répartition de la v.a. Y :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \quad si\ x < 0, \\ \\ 3y^2 - 3y^3\ si\ 0 \leq y \leq 1, \\ \\ 1 \quad six > 1. \end{cases}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
P(Y \leq 0,5) &= F_Y(0,5) \\
&= 3(0,5)^2 - 3(0,5)^3 \\
&= 0,5. \\
P(0,25 < Y \leq 1) &= F_Y(1) - F_Y(0,25) \\
&= 1 - (3(0,25)^2 - 3(0,25)^3) \\
&= 0,843. \\
P(|Y - 0,5| \geq 0,1) &= 1 - P(|Y - 1| < 0,1) \\
&= 1 - P(-0,1 + 0,5 < Y < 0,1 + 0,5) \\
&= 1 - P(0,4 < Y < 0,6) \\
&= 1 - (F_Y(0,6) - F_Y(0,4)) \\
&= 1 - \Big((3(0,6)^2 - 3(0,6)^3) - (3(0,4)^2 - 3(0,4)^3)\Big) \\
&= 0,704.
\end{aligned}$$

- **Exercice 12 :**

1. La fonction de densité de la v.a. X :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

   La fonction de densité de la v.a. X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & si\ x \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2. On pose que $Y = \ln(e^X - 1)$

   - Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. Y :

$$X(\Omega) = [0, +\infty[\Longrightarrow Y(\Omega) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(\ln(e^X - 1) \leq y) \\
&= P(e^X - 1 \leq e^y) \\
&= P(e^X \leq e^y + 1) \\
&= P(X \leq \ln(e^y + 1)) \\
&= F_X(\ln(e^y + 1)) \\
&= 1 - e^{-\ln(e^y+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{e^y + 1}, \ \forall y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- Déterminer la fonction de densité f de la v.a. Y :

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= F'_Y(y) \\
&= \left(1 - \frac{1}{e^y + 1}\right)' \\
&= \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} \ \forall y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- Monter que la fonction f est paire :

On a

$$\begin{aligned}
f_Y(-y) &= \frac{e^{-y}}{(e^{-y} + 1)^2} \\
&= \frac{e^{2y}e^{-y}}{e^{2y}(e^{-y} + 1)^2} \\
&= \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} \\
&= f_Y(y), \ \forall y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc, la fonction f_Y est paire.

- Déduire $E(Y)$:

$$\begin{aligned}
E(Y) = &\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} dy}_{\text{Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Remarque : L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

• **Exercice 13 :**

Rappelons que si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$, alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \quad si \ x \geq 0, \\ \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ :

$$\begin{aligned} P(X > 10) = 0,286 &\Longrightarrow 1 - P(X \leq 10) = 0,286 \\ &\Longrightarrow 1 - (1 - e^{-10\lambda}) = 0,286 \\ &\Longrightarrow e^{-10\lambda} = 0,286 \\ &\Longrightarrow -10\lambda = \ln(0,286) \\ &\Longrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,286)}{-10} \\ &\Longrightarrow 0,125. \end{aligned}$$

2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois :

   Sachant que 6 mois=0,5 année, alors on cherche :

$$\begin{aligned} P(X \leq 0,5) &= F_X(0,5) \\ &= 1 - e^{-0,5 \times 0,125} \\ &= 0,061. \end{aligned}$$

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, calculer la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans :

$$\begin{aligned}
P(X > 10/X > 8) &= \frac{P(X > 10 \cap X > 8)}{P(X > 8)} \\
&= \frac{P(X > 10)}{P(X > 8)} \\
&= \frac{1 - P(X \leq 10)}{1 - P(X \leq 8)} \\
&= \frac{1 - F_X(10)}{1 - F_X(8)} \\
&= \frac{e^{-0,125\times 10}}{e^{-0,125\times 8}} \\
&= 0,779.
\end{aligned}$$

• **Exercice 14 :**

On a : $X \hookrightarrow N(m, \sigma)$.

On cherche à calculer la moyenne m et l'écart-type σ :

On pose $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow N(0,1)$. On a :

$$\begin{cases} P(X > 60) = 0,0869 \\ P(X < 45) = 0,6406 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(Z > \dfrac{60 - m}{\sigma}) = 0,0869 \\ P(X < \dfrac{45 - m}{\sigma}) = 0,6406 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - P(Z \leq \dfrac{60 - m}{\sigma}) = 0,0869 \\ F_Z\Big(\dfrac{45 - m}{\sigma}\Big) = 0,6406 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F_Z\Big(\dfrac{60 - m}{\sigma}\Big) = 0,9131. \\ F_Z\Big(\dfrac{45 - m}{\sigma}\Big) = 0,6406 \end{cases}$$

En utilisant la table de la loi normale centrée réduite, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{60 - m}{\sigma} = 1,36; \\ \dfrac{45 - m}{\sigma} = 0,36. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma = 15; \\ m = 39,6. \end{cases}$$

- **Exercice 15 :**

On a : $X \hookrightarrow N(20,5)$.
On pose $Z = \dfrac{X-20}{5} \hookrightarrow N(0,1)$.

1. Calculer le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois) :

$$\begin{aligned} P(X<10) &= P\Big(Z < \frac{10-20}{5}\Big) \\ &= P(Z<-2) \\ &= F_Z(-2) \\ &= 1-F_Z(2) \\ &= 1-0,9772 \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

2. Calculer le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois) :

$$\begin{aligned} P(X>30) &= P\Big(Z > \frac{30-20}{5}\Big) \\ &= P(Z>2) \\ &= 1-P(Z\leq 2) \\ &= 1-F_Z(2) \\ &= 1-0,9772 \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

3. Calculer la consommation maximale de 50% des consommateurs :

   On cherche c telle que :

$$\begin{aligned} P(X\leq c)=0,5 &\Longrightarrow P\Big(Z\leq \frac{c-20}{5}\Big)=0,5 \\ &\Longrightarrow F_Z\Big(\frac{c-20}{5}\Big)=0,5 \\ &\Longrightarrow \frac{c-20}{5}=0 \\ &\Longrightarrow c=20. \end{aligned}$$

   Ainsi, la consommation maximale de 50% des consommateurs est de 20 litres.

4. On cherche à calculer c telle que :

$$\begin{aligned}
P(X > c) = 0,33 &\Longrightarrow P\Big(Z > \frac{c-20}{5}\Big) = 0,33\\
&= 1 - P\Big(Z \leq \frac{c-20}{5}\Big) = 0,33\\
&\Longrightarrow F_Z\Big(\frac{c-20}{5}\Big) = 0,67\\
&\Longrightarrow \frac{c-20}{5} = 0,44\\
&\Longrightarrow c = 22,5.
\end{aligned}$$

Ainsi, 33% des consommateurs se trouvent au dessus de 22, 5 litres.

• **Exercice 16 :**

1. Reconnaître la loi de V :

   Par identification : $V \hookrightarrow \Gamma(2, \lambda)$.

   Déterminer la valeur de λ sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h :

$$E(V) = 80 \Longrightarrow \frac{2}{\lambda} = 80 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{40}.$$

2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. V : • Si $x < 0$ alors $F_V(x) = 0$.

   • Si $x \geq 0$ alors

$$\begin{aligned}
F_V(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_V(x)dx\\
&= \int_0^x \Big(\frac{1}{40}\Big)^2 x e^{-\frac{1}{40}x} dx\\
&= 1 - e^{-\frac{1}{40}x}\Big(\frac{1}{40}x + 1\Big).
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{40}x}\Big(\dfrac{1}{40}x + 1\Big) & si\ x \geq 0,\\ 0 & sinon. \end{cases}$$

3. La probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse :

$$\begin{aligned}
P(V \geq 120) &= 1 - P(V < 120)\\
&= e^{-\frac{1}{40}(120)}\Big(\frac{1}{40}(120) + 1\Big)\\
&= 4e^{-3}\\
&= 0,199.
\end{aligned}$$

4. Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a.$T = \dfrac{40}{V}$:

$$V(\Omega) = [0, +\infty[\Longrightarrow T(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) \\ &= P\Big(\frac{40}{V} \leq t\Big) \\ &= P\Big(V \geq \frac{40}{t}\Big) \\ &= 1 - P\Big(V < \frac{40}{t}\Big) \\ &= 1 - F_V\Big(\frac{40}{t}\Big) \end{aligned}$$

Donc, pour $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$f_T(t) = F_T'(t) = \frac{40}{t^2} f_V\Big(\frac{40}{t}\Big).$$

Ainsi,

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} & si\ t \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

L'espérance de la v.a. T est :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \Big[e^{-\frac{1}{t}}\Big]_0^{+\infty} = 1.$$

5. Déterminer la densité de la v.a. $U = \dfrac{1}{20}V$ et reconnaître sa loi :

$$V(\Omega) = [0, +\infty[\Longrightarrow U(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P\Big(\frac{1}{20}V \leq u\Big) \\ &= P(V \leq 20u) \\ &= F_V(20u). \end{aligned}$$

Donc, pour $u \in [0, +\infty[$, on a :

$$f_U(u) = F'_U(u) = 20 f_V(20u).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \begin{cases} \dfrac{1}{4} u e^{-\frac{1}{2}u} & si\ u \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2 u e^{-\frac{1}{2}u} & si\ u \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{aligned}$$

Par identification : $U \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire, $U \hookrightarrow \chi^2(4)$.

• **Exercice 17 :**

1. Calculons k pour que f soit une densité de probabilité :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 &\Longrightarrow \int_0^{e-1} \frac{k}{k+1} dx = 1 \\ &\Longrightarrow k\Big[\ln(x+1)\Big]_0^{e-1} = 1 \\ &\Longrightarrow k(\ln(e) - \ln(1)) = 1 \\ &\Longrightarrow k = 1. \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} f(x)dx & \\ &= \int_1^{e-1} \frac{1}{x+1} dx + \int_{e-1}^{+\infty} 0 dx \\ &= \Big[\ln(x+1)\Big]_1^{e-1} \\ &= 1 - \ln 2 \\ &= 0,306. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
P(0,7 \leq X \leq 1,7) &= \int_{0,7}^{1,7} f(x)dx \\
&= \int_{0,7}^{1,7} \frac{1}{x+1}dx \\
&= \Big[\ln(x+1)\Big]_{0,7}^{1,7} \\
&= \ln(2,7) - \ln(1,7) \\
&= 0,462.
\end{aligned}$$

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \frac{x}{x+1}dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \Big(1 - \frac{1}{x+1}\Big)dx \\
&= \Big[x - \ln(x+1)\Big]_{0}^{e-1} \\
&= e-2 \\
&= 0,718.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \frac{x^2}{x+1}dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \frac{x^2-1+1}{x+1}dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \Big(\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\Big)dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \Big(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}\Big)dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \Big(x-1 + \frac{1}{x+1}\Big)dx \\
&= \Big[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\Big]_{0}^{e-1} \\
&= \frac{(e-1)^2}{2} - e + 2 \\
&= 0,758.
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut déduire que

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 0,758 - 0,718^2 \\ &= 0,242. \end{aligned}$$

4. La fonction de répartition de la v.a. X :

• Si $x < 0$, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \ dt = 0.$$

• Si $0 \leq x \leq e-1$, on a :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \Big[\ln(t+1)\Big]_0^x = \ln(x+1).$$

• Si $x > e-1$, on a :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^{e-1} \frac{1}{t+1} dt + \underbrace{\int_{e-1}^{+\infty} 0dt}_{\text{est égale à 0}} = 1.$$

Ainsi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 0, \\ \ln(x+1) & si \ 0 \leq x \leq e-1, \\ 1 & si \ x > e-1. \end{cases}$$

5. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = \ln(1+X)$:

$$X(\Omega) = [0, e-1] \Longrightarrow Y(\Omega) = [0,1].$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\ln(1+X) \leq y) \\ &= P(1+X \leq e^y) \\ &= P(X \leq e^y - 1) \\ &= F_X(e^y - 1). \end{aligned}$$

Donc, pour $y \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= e^y f_X(e^y - 1) \\ &= e^y \frac{1}{e^y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Par identification, on déduit que la v.a. Y suit une loi uniforme $Y \hookrightarrow U_{[0,1]}$.

6. Montrer que la v.a. $Z = -2\ln Y$ suit une loi du khi-deux et déterminer son degré de liberté :

$$Y(\Omega) = [0,1] \Longrightarrow Z(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(-2\ln(Y) \leq z) \\ &= P\Big(\ln(Y) \geq -\frac{1}{2}z\Big) \\ &= P(Y \geq e^{-\frac{1}{2}z}) \\ &= 1 - P(Y < e^{-\frac{1}{2}z}) \\ &= 1 - F_Y(e^{-\frac{1}{2}z}). \end{aligned}$$

Donc, pour $z \in [0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= F'_Z(z) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z} \underbrace{f_Y(e^{-z})}_{\text{est égale à 1}} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z} \ si\ z \geq 0, \\ 0 \qquad\qquad sinon. \end{cases}$$

Par identification, la v.a. Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

$$Z \hookrightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2).$$

On déduit que la v.a. Z suit une loi du khi-deux à 2 degrés de liberté.