Chapitre 4

Lois de probabilités usuelles

Introduction

A priori, les lois de distribution des phénomènes physiques, économiques, etc. sont innombrables. Chaque cas semble particulier. Dans cette partie, nous présentons les lois de probabilités les plus souvent utilisées dans les études. Elles permettent de modéliser une grande variété de problèmes. Nous noterons X la variable aléatoire étudiée. Une expérience correspond à une observation de la variable aléatoire (v.a) X, elle est notée x_i. Nous disposons d'une série d'observations $x_i,\ i = (1, 2, \cdots, n)$.
On utilise des variables aléatoires discrètes pour compter des évènements qui se produisent de manière aléatoire, et des variables aléatoires continues quand on veut mesurer des grandeurs "continues" (distance, masse, pression...).

4.1 Lois d'une variable aléatoire discrète

L'application X permet de transporter la probabilité P de Ω en une probabilité P_X sur $\mathbb{R}$: on considère pour cela les $P(X = x_k)$ comme des masses ponctuelles P_k situées en les points x_k de la droite réelle, on définit ainsi une probabilité sur $\mathbb{R}$ (le point x_k a la Probabilité P_k). La probabilité, pour cette loi, d'une partie quelconque de $\mathbb{R}$ est alors la somme des masses ponctuelles qu'elle contient.

Définition 4.1.1.
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X consiste à déterminer pour toutes les valeurs possibles de X leurs probabilités d'apparition. C'est-à-dire, si X est une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω fini, alors les événements élémentaires de Ω relatifs à X sont définis comme suit : $X(\omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. La probabilité pour que l'événement relatif à x_i sont réalisées et définies par $(X = x_i) = f(x_i)$. Cette dernière est appelée loi de probabilité, ou encore densité de distribution de probabilité.
Les probabilités $p_k = P(X = k)$ sont appelées probabilités ponctuelles de la v.a. X .
Dans la suite, le symbole $\sim$ signifiera « a pour loi ». Par exemple, on notera $X \sim B(n, p)$ pour signifier que la v.a. X suit la loi binomiale $B(n, p)$.

Remarque 4.1.1.

1. Notons en particulier que comme

$$\sum_{k, x_i \in \Omega} P_k = 1,$$

   $P_X(B)$ est une sous-série d'une série a termes positifs convergente donc convergente : $P_X(B)$ est donc toujours bien définie pour toute partie $B \subset \mathbb{R}$. Ce ne sera pas aussi simple dans le cas des variables aléatoires réelles (pour lesquelles les observables seront réduits aux intervalles de $\mathbb{R}$).

2. Attention, deux variables aléatoires. peuvent avoir la même loi sans pour autant être égales. Par exemple si on dispose d'un dé rouge et d'un dé bleu et que X, Y désignent la somme des points obtenus après un lancer respectivement du dé rouge et du dé bleu, X et Y ont la même loi. Pourtant bien sûr, on n'a pas $X = Y$, ce qui équivaudrait à dire que les tirages des deux dés sont nécessairement identiques.

4.1.1 Loi de Bernoulli de paramètre p

Loi de Bernoulli de paramètre p notée $B(p)$.

Définition 4.1.2.

Une v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si elle ne prend que deux valeurs, la plupart du temps 0 et 1 avec :

$$P(X = 1) = p, \; P(X = 0) = 1 - p = q.$$

Notation 4.1.1.

X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et n écrit :

$$X \rightarrow B(p), \text{ si } f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p \; si \; x = 1, \\ 1 - p = q \; si \; x = 0. \end{cases}$$

f est bien une densité care elle vérifier les trois propriétés de la densité :

1. Elle est positive.
2. L'ensemble de x ou $f(x)$ positif est dénombrable.
3. $$\sum_x f_X(x) = 1.$$

Caractéristiques de la loi

Espérance , variance et écart type

Proposition 4.1.1.

Si X suit la loi de Bernoulli alors :

- $E(X) = p$.
- $Var(X) = pq = p(1 - p)$.
- $\sigma_X = \sqrt{pq}$.[10]

Preuve 11.

- $E[X] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$.
- $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$.
- $\sigma_X = \sqrt{pq}$.

4.1.2 Loi de binomiale de paramètre (n, p)

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de succès obtenus lors des n épreuves d'un schéma de Bernoulli. Alors on dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p), notée $B(n, p)$.

Proposition 4.1.2.

Soit $X \sim B(n, p)$ alors la fonction f définie par :

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{1-x} \; si \; x \in \{0, 1, \cdots, n\} \\ 0 \; ailleur. \end{cases}$$

Est une densité de probabilité.[9]

Preuve 12.

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Remarque 4.1.2.

La loi de Bernoulli est la loi binomiale $B(1, p)$, c.à.d. Pour $n = 1$.

Caractéristiques de la loi

Espérance, variance et écart type

Proposition 4.1.3.

Si X suit la loi Binomial alors :

- $E(X) = np$.
- $Var(X) = npq = np(1-p)$.
- $\sigma_X = \sqrt{npq}$.[?]

Preuve 13.

- Calculons l'espérance :

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k p^k q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \ puisque\ nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k. \\
E(X) &= np(p+q)^{n-1} = np.
\end{aligned}
$$

- Pour le calcul de la variance $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

$$
\begin{aligned}
E(X^2) = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} &= np \sum_{k=1}^{k=n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} + np \sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \\
&= np(n-1)p + np
\end{aligned}
$$

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$. Donc :

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= np(n-1)p + np - (np)^2 \\
&= npq.
\end{aligned}
$$

Autre technique de calcule $Var(X)$

En effet : utilisant les notions des séries :

En effet :

$$
[E[X^2] = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = S_q(p) \text{ où } q = 1-p \ et\ S_q(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 C_n^k x^k q^{n-k}].
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
S_q(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k q^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^{k-1} q^{n-k} &= x \sum_{k=1}^{n} k C_n^k (x^k)' q^{n-k} \\
&= x\Big(\sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^k q^{n-k}\Big)' \\
&= x\Big(x \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1} q^{n-k}\Big)' \\
&= x\Big(x \sum_{k=1}^{n} C_n^k (x^k)' q^{n-k}\Big)' \\
&= x\Big(x\Big(\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k q^{n-k}\Big)'\Big)' \\
&= x(x[(x+q)^n]')' \\
&= x(x \times n(x+q)^{n-1})' \\
&= nx(x+q)^{n-1} + x^2 \times n(n-1)(x+q)^{n-2}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
E[X^2] = S_{1-p}(p) = pn + p^2 n(n-1) \\
\text{et } Var(X) = pn + p^2 n(n-1) - (np)^2 = n(p-p^2) = np(1-p)
\end{aligned}
$$

• $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{npq}$.

Remarque 4.1.3.
La loi est appelée loi binomiale dans la mesure où les probabilités correspondent aux termes du développement du binôme de Newton.

Exemple 4.1.1.

Un tireur atteint une cible 3 fois sur 10. Quelle est la probabilité qu'il atteigne la cible 5 fois en 20 tirs.

Soit X le nombre de fois où le tireur atteint la cible sur les 20 tirs.

$$X \to B(n,p) \text{ avec } n = 20 \textit{ et } p = 3/10$$
$$p(k) = \begin{cases} C_{20}^{k}\left(\frac{3}{10}\right)^{k}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-k} \; si \; k = 0, 1, 2, \cdots, 20. \\ 0 \; aillreur. \end{cases}$$

Donc, la probabilité que le tireur atteigne la cible 5 fois sur 20 est donnée : pour $k = 5$, soit

$$C_{20}^{5}\left(\frac{3}{10}\right)^{5}\left(\frac{7}{10}\right)^{15}.$$

Loi multinomiale

Supposons qu'il y ait dans une urne N boules de r couleurs distinctes $c_1, c_2, \cdots, c_r$. Soit ni le nombre de boules de couleur C_i et $p_i = n_i/N$ la proportion de boules de la couleur Ci dans l'urne. On a :

$$N = \sum_{1}^{r} n_i, \; P = \sum_{1}^{r} p_i.$$

Supposons que l'on effectue un tirage de n boules, chaque boule étant remise dans l'urne avant le tirage de la boule suivante ; les tirages répétés des boules sont des épreuves indépendantes. On cherche la probabilité d'obtenir l'événement A défini par :

- m_1 boules de la couleur C_1.
- m_2 boules de la couleur C_2.
- m_i boules de la couleur C_i.
- m_r boules de la couleur C_r avec $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$.

Cet événement est réalisé par exemple avec le n-uplet

$$\underbrace{C_1, \ldots, C_1}_{m_1 boules C_1} \; \underbrace{C_2, \ldots, C_2}_{m_2 boules C_2} \; \underbrace{C_r, \ldots, C_r}_{m_r boules C_r}$$

De probabilités $P_1^{m_1}, P_2^{m_2}, \cdots P_r^{m_r}$. le nombre de ces n-uplets est égal au nombre de façons de disposer m_1 fois la lettre C1, m2 fois de la lettre C_1, m_2 fois la lettre Cr dans un mot de $n = \sum_{i=1}^{i=r} m_i$ d'où la probabilité de l'évènement A est :

$$P(A) = C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} \cdots C_{m_r}^{m_r} (P_1)^{m_1} (P_2)^{m_2} \cdots (P_r)^{m_r}$$

$$\text{On a la relation } C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} \cdots C_{m_r}^{m_r} = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_r!}$$

Par conséquent $P(A) = \dfrac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_r!} (P_1)^{m_1} (P_2)^{m_2} \cdots (P_r)^{m_r}$.

Exemple 4.1.2.

Une urne est composée de 10% de boules rouges, 20% de boules blanches, 40% de boules vertes, 30% de noires. Le nombre de boules de l'urne est $N > 20$. On effectue un tirage avec remise de 12 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges, 5 boules blanches, 3 boules vertes et une boule noire ?.

Solution 17

Il suffit d'appliquer la formule précédente :

$$P(A) = \frac{12!}{3! \times 5! \times 5! \times 1!} \times (0,1)^3 \times (0,2)^5 \times (0,4)^3 \times (0,3)^1 .$$

Loi de Poisson de paramètre λ

Proposition 4.1.4.

soit X une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre positive λ.
$X \sim P(\lambda)$ alors la fonction f définie par :

$$f_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \ si \ k \in \mathbb{N}; \\ 0 \ ailleur \end{cases}$$

Est une densité de probabilité. [12]

Preuve 14.

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.1.5.

Si X suit la loi Poisson alors :

- $E(X) = \lambda$.
- $Var(X) = \lambda$.
- $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$.

Preuve 15.

- L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda \sum_{1}^{+\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

- Pour calculer la variance, commençons par calculer $E(X(X-1))$.

$$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} n(n-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 \sum_{2}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2.$$

$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)^2 \Longrightarrow E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda$, d'où $Var(X) = \lambda$.

- $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\lambda}$.

La loi de Poisson modélise des comptages qui suivent un processus de Poisson. Par exemple, le nombre d'appels à un central téléphonique pendant une période donnée, le nombre de voitures qui passent à un carrefour en un temps donné.

Exemple 4.1.3.

Un central **téléphonique** reçoit en moyenne 100 appels par heure. En supposant que le nombre d'appels durant un intervalle de temps quelconque suit une loi de Poisson.

1. Quelle est la probabilité que le central reçoive trois appels en deux minutes ?.
2. Quelle est la probabilité pour qu'en deux minutes, il reçoive au moins un appel ?.

Solution 18

En deux minutes, on peut s'attendre à ce que le nombre d'appel soit

$$\lambda = E(X) = \frac{2 \times 100}{60} = \frac{10}{3}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir trois appels en deux minutes est

$$P(X = 3) = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^3}{3!} exp(-\frac{10}{3}\Big)^3 = 0,220$$

et la probabilité d'obtenir au moins un appel en deux minutes est

$$P(X \geq 1) = 1 - exp(-\frac{10}{3}\Big) = 0,964.$$

4.1.3 Loi géométrique $G(P)$ de paramètre p

Soit X une variable aléatoire suit la loi de géométrique de paramètre p. Pour $p \in [0,1], \; A \in \mathbb{N}$ et $m \geq A$, on définit la loi géométrique, notée $G(p)$, par :

$$f_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p \; si \; x \in \mathbb{N}^* \\ 0 \; ailleur. \end{cases}$$

Proposition 4.1.6.

$X \sim G(p)$ alors la fonction f définie par :

$$f_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p \; si \; x \in \mathbb{N}^* \\ 0 \; ailleur. \end{cases}$$

Est une densité de probabilité.

Preuve 16.

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.1.7.
Si X suit la loi Géométrique alors :
- $E(X) = \frac{1}{p}$.
- $Var(X) = \frac{q}{p^2}$.
- $\sigma(X) = \sqrt{\frac{q}{p^2}}$.

Par exemple, la probabilité $q^{k-1}p$ correspond à la probabilité d'obtenir dans une succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes, $k-1$ échecs suivis d'un succès. De plus, la loi géométrique est le premier modèle discret de la mort d'une particule radioactive. En effet, la durée de vie de la particule radioactive, notée T, suit la loi de probabilité pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(T = k) = q^k p.$$

Preuve 17.

Par exemple pour calculer la variance : on utilise les notions des séries :
En effet $E[X^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1}p = pS(1-p)$ avec $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^{k-1}$. Puis

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k\right)' \\
&= \left(x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}\right)' = \left(x\sum_{k=1}^{+\infty} (x^k)'\right)' \\
&= \left(\left(x\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\right)'\right)' = \left(\left(x\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)'\right)' \\
&= \left(x\left(\frac{1}{1-x})\right)'\right)' = \left(x\frac{1}{(1-x)^2}\right)' \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

D'où $E[X^2] = pS(1-p) = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} + p\frac{2-2p}{(1-(1-p))^3} = \frac{1}{p} + \frac{2-2p}{p^2}$

et $Var(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2-2p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{p(1-p)}{p^2}$.

• Exercice (Temps d'attente de métros) :

On suppose que le temps d'attente (en minutes) d'un métro suit une loi géométrique. Durant les heures de pointes du matin, le temps d'attente moyen d'un métro pour la ligne 8 est de 3 minutes tandis qu'il est de 2 min pour la ligne 9.

(a) Quels sont les paramètres des lois géométriques pour les lignes n° 8 et n° 9 ?.

(b) Quelle est la probabilité d'attendre entre 2 et 4 minutes un métro de la ligne 8 ? de la ligne 9 ?.

(c) Même question pour un temps d'attente de plus de 5 minutes.

Solution :

Notons X le temps d'attente de la ligne 8 et Y celui de la ligne 9.

(a) Le temps moyen d'attente est l'espérance donc on doit avoir $E(X) = 3$ et $E(Y) = 2$. L'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $1/p$ donc le paramètre de X est $1/3$ tandis que celui de Y est $1/2$. On a donc :
$$P(X = k) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \text{ et } P(Y = k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}.$$

(b) On a :
$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2-1} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} \\ &= \frac{18+12+8}{81} \\ &= \frac{38}{81} \simeq 46,91\%. \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 4) &= P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{4+2+1}{16} \\ &= \frac{7}{16} \simeq 43,75\%. \end{aligned}$$

(c) on a (rappelons qu'une loi géométrique prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ donc ne prend jamais la valeur 0)

$$\begin{aligned}
P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) \\
&= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) + P(X = 4) \\
&= 1 - P(X = 1) - P(2 \leq X \leq 4) \\
&= 1 - \frac{1}{3} - \frac{38}{81} \\
&= \frac{81 - 27 - 38}{81} \\
&= \frac{16}{81} \simeq 19,75\%.
\end{aligned}$$

4.1.4 Loi hypergéométrique $H(N, n, P)$

Définition 4.1.3.
Soit une urne contenant N boule dont une proportion p de boules blanches. On prélève de cette urne un échantillon (sans remise) de n boules. On note par X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches de l'échantillon. On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p et on note $X \rightarrow H(N, n, p)$.

Proposition 4.1.8.
$X \sim H(N, n, p)$ alors la fonction f définie par :

$$f_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{C_{NP}^{k} C_{qN}^{n-x}}{C_N^n} & si\ max(0, n - Nq) \leq k \leq min(n, NP) \\ 0\ ailleur. & \end{cases}$$

Est une densité de probabilité.

Preuve 18 (exo TD)**.**

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.1.9.

Si X suit la loi Hypergéométrique alors : • $E(X) = np$.

• $Var(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$.

• $\sigma(X) = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} npq}$

Preuve 19.

Exo TD.

Exemple 4.1.4.

On tire n boules (sans remise) dans une urne contenant pa boules rouges et qa boules bleues, soit un nombre total de boules de $a = pa + qa$. Alors la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges suit une loi hypergéométrique $H(n, p, a)$.

4.2 Loi d'une variable aléatoire continue

Définition 4.2.1.

On appelle densité de probabilité toute fonction réelle positive, d'intégrale 1.

Attention ! : Pour une v.a. continue X , la densité f ne représente pas la probabilité de l'évènement $\{X = x\}$.

Important :

La loi d'une v.a. X est donnée par :

- sa densité ou.

- les probabilités $P[a \leq X \leq b]$ pour tous a, b ou.

- les probabilités $F(x) = P[X \leq x]$ pour tout x (F est la fonction de répartition).

Remarque 4.2.1.

$P[X = x] = 0$ pour tout x.

4.2.1 Loi uniforme

Définition 4.2.2 (Définition et proposition)**.**

Une v.a. X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, si elle admet pour densité

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \; si \; a < X < b. \\ 0 \; si \; non. \end{cases}$$

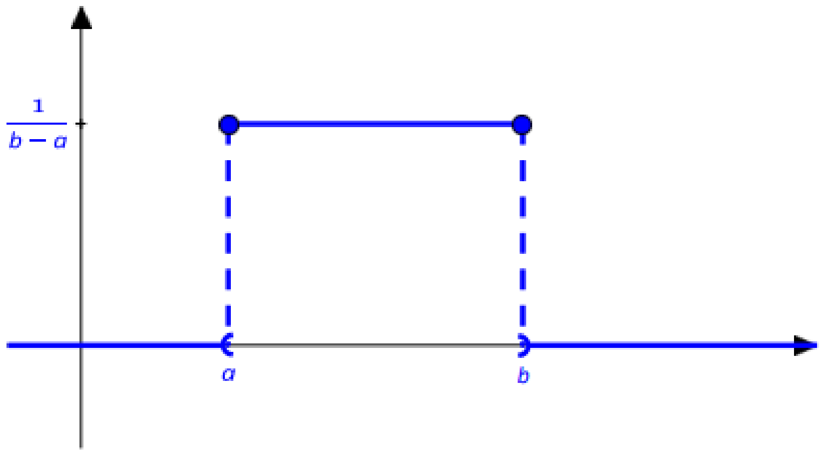


FIGURE 4.1 – Densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.

Preuve 20.

Il est facile de vérifie facilement que f est une densité.

Notation 4.2.1.

On note $X \sim U[a, b]$.

Fonction de répartition

La fonction de répartition F de X est donnée par :

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 \ si \ x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \ si \ a \leq x < b, \\ 1 \ si \ x > b. \end{cases}$$

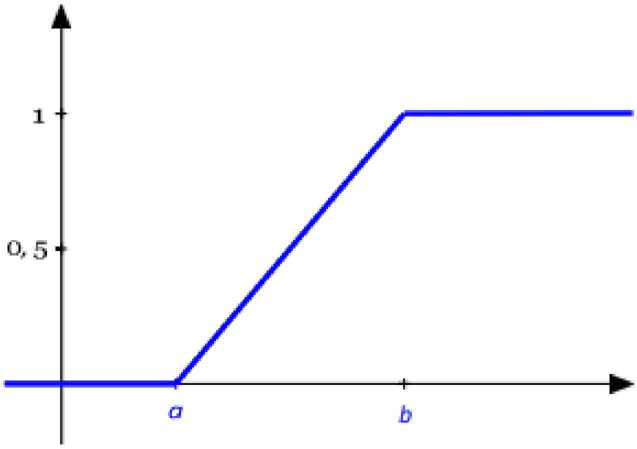


FIGURE 4.2 – Fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$.

Preuve 21.

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = 0 \ si \ x < a, \\ \int_{a}^{x} \dfrac{1}{b-a}dt = \dfrac{x-a}{b-a} \ si \ a \leq x < b. \\ \int_{b}^{+\infty} \dfrac{1}{b-a}dt = 1 \ si \ x \geq b. \end{cases}$$

Caractéristiques de la loi

Espérance, variance et écart type

Proposition 4.2.1.
Soit X une variable aléatoire suit la loi uniforme $X \sim U[a,b]$ alors : • $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

• $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

• $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Preuve 22. Il est très facile de montrer la proposition.

4.2.2 Loi exponentielle

Définition 4.2.3.
Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa fonction de densité f est donnée par :

$$f(X) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \; si \; x \in [0,+\infty[; \\ 0 \; ailleur. \end{cases}$$

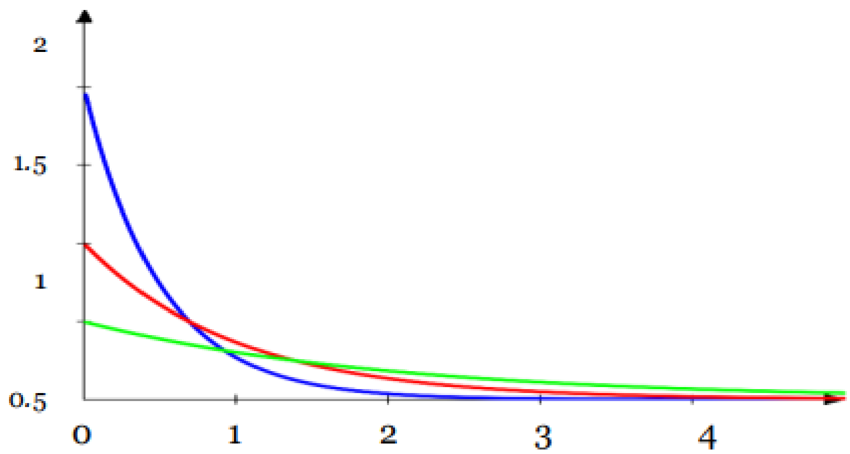


FIGURE 4.3 – Densité de la loi $E(\lambda)$.

Notation 4.2.2.

$X \sim exp(\lambda)$.

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie. Par exemple, les temps, d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, de la prochaine panne d'un appareil.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.2.2.

Soit X une variable aléatoire suit la loi exponentielle $X \sim exp(\lambda)$ alors :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Preuve 23.

Exo TD.

Proposition 4.2.3.

La fonction de répartition de la loi $Exp(\lambda)$ est égale a :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \ si x \geq 0; \\ 0 \ ailleur. \end{cases}$$

4.2.3 Loi Lois normales ou gaussiennes

Elles jouent un rôle capital dans l'étude des lois limites de sommes de variables aléatoires Indépendantes (cf. le théorème central limite, résultat central comme son nom l'indique en Théorie des probabilités). On parle encore de loi gaussienne.

Parfois sous le vocable loi de Laplace-Gauss et caractérisée par une célèbre "courbe en cloche".

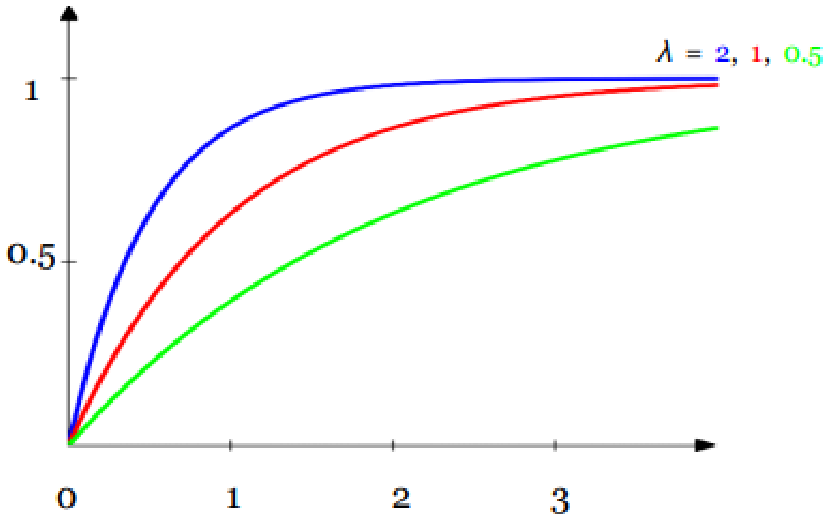


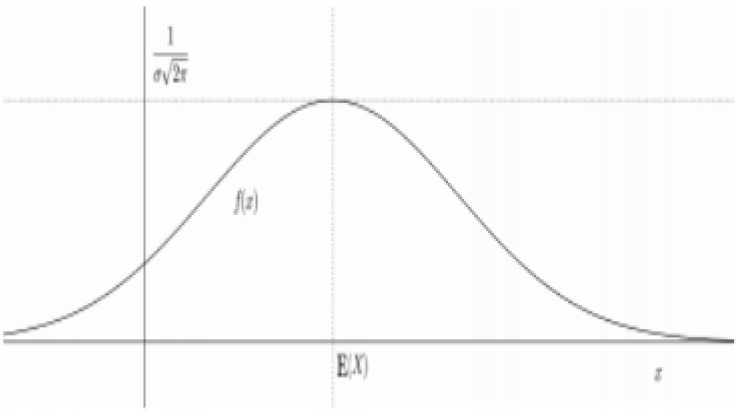
FIGURE 4.4 – Fonction de répartition de la loi $E(\lambda)$.

Définition 4.2.4.

On dit que la v.a.r. X suit une loi gaussienne ou normale $N(m, \sigma^2)$ si elle a pour densité la fonction :

$$f_{m,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

L'allure caractéristique en cloche de la densité de la loi normale :



4.2.4 Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.2.4.

Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale $X \sim N(m, \sigma^2)$ alors :

$$E(X) = m, \quad Var(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Remarque 4.2.2.

Notons que f est bien une densité puisque :

$$\int_{\mathbb{R}} exp\Big(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big)dt = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

En effet, par le changement de variable $u = \dfrac{(t-m)}{\sqrt{2}\sigma}$, il suffit de retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{\mathbb{R}} exp(-u^2)du = \sqrt{\pi}.$$

Pour cela, effectuons un changement de variable en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{\mathbb{R}} exp(-x^2)dx \times \int_{\mathbb{R}} exp(-y^2)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} exp(-(x+y)^2)dxdy \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} exp(-r^2)rdrd\theta \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty} exp(-r^2)rdr \\
&= -\pi\Big[exp(-r^2)\Big]_0^{+\infty} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Preuve 24.

Calculons l'espérance et la variance par le changement de variable $u = \dfrac{(t-m)}{\sqrt{2}\sigma}$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{\mathbb{R}} t f_{m,\sigma}(t)dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} t\cdot exp\Big(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2}\sigma u + m}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}du \\
&= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} ue^{-u^2}du + \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du \\
&= m.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{\mathbb{R}}(t-m)^2 f_{m,\sigma}(t)dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(t-m)^2\cdot exp\Big(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big)dt \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2}du \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{2}\Big[-ue^{-u^2}\Big]_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\int e^{-u^2}\Big) \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

Représentations graphiques pour les valeurs : $(\mu, \sigma) = (0,1), (0, 2), (-1, 1), (1, 1/2)$

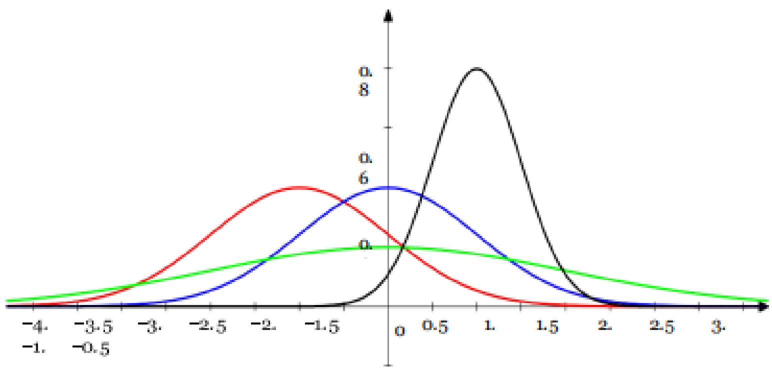


FIGURE 4.5 – Densité de la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

4.2.5 Loi normale centrée réduite $N(0,1)$

Définition 4.2.5.

La loi normale centrée réduite est une la loi continue, d'une v.a. X 'a valeurs ,dans $X(\Omega) = R$ tout entier, définie à partir de la densités :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}.$$

Il n'existe par contre pas d'expression simple de sa fonction de répartition autre que la formule intégrale.

$$\forall a \in R,\ F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt.$$

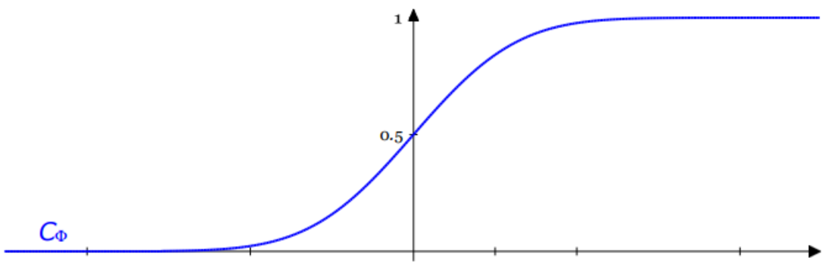


FIGURE 4.6 – Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.2.5.

Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale $X \sim N(0,1)$ alors :

$$E(X) = 0, \quad Var(X) = 1, \quad \sigma(X) = 1.$$

Proposition 4.2.6.

Si la v.a.r. X suit une loi $N(m, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0,1)$.

Preuve 25.

Calculons pour $a < b$ quelconques $P(a \leq Y \leq b)$:

$$P(a \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq b) = P(\sigma a + m \leq X \leq \sigma b + m)$$
$$= \int_{\sigma a+m}^{\sigma b+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big) dt.$$

Il suffit alors de faire le changement de variable $S = \dfrac{t-m}{\sigma}$ pour obtenir :

$$\forall a \in R,\ P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\Big(-\frac{S^2}{2}\Big) dS.$$

C'est à dire Y suit la loi $N(0,1)$.

Propriétés :

Si $Y \rightsquigarrow N(0,1)$, c'est-à-dire Y suit une loi normale centrée réduite de moyenne (0) et D'écart type (1), alors les propretés ci-dessous sont toujours vérifiées :

1. $$\forall y \in R,\ F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt.$$
2. $\forall y \in R,\ F(-y) = 1 - F(y)$.
3. $\forall y \in R,\ P(Y > y) = 1 - P(Y \leq -y)$.

4.2.6 Manipulation de la loi normale

Définition 4.2.6.

On notera Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$. On utilise les valeurs de $\Phi(a)$ tabulées et le changement de variable pour calculer les valeurs de la fonction de répartition F d'une loi normale générale.

Exemple 4.2.1.

Considérons X une v. a. qui suit une loi $N(6,4)$ et Z une v.a. de loi $N(0,1)$, on a par exemple :

$$\begin{aligned} F_X(7) = P(X \leq 7) &= P\Big(\frac{X-6}{2} \leq \frac{7-6}{2}\Big) \\ &= P(Y \leq \frac{1}{2}) = \Phi\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0,6915. \end{aligned}$$

Les valeurs ne sont tabulées que pour des valeurs de a positives, mais on s'en sort à l'aide de la propriété suivante de la fonction de répartition Φ de la loi normale :

Propriété :

Soit Z une v.a. de loi $N(0,1)$. On a alors $\Phi(-a) = -\Phi(a)$ et en particulier $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

D'autre part : $P(|Y| \leq a) = 2 \cdot \Phi(a) - 1$.

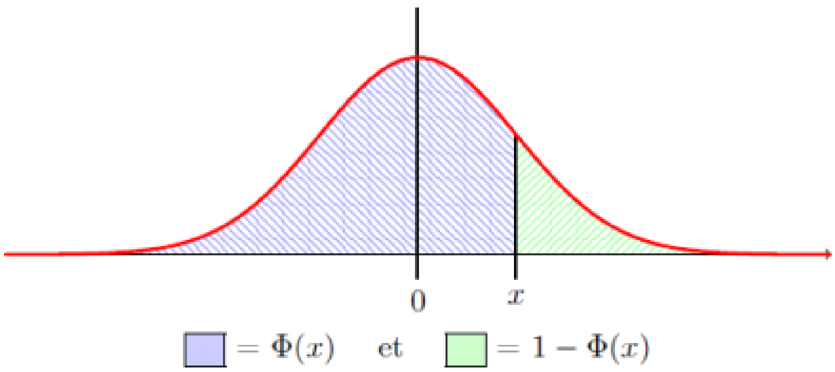


FIGURE 4.7 – La fonction $\Phi(x)$.

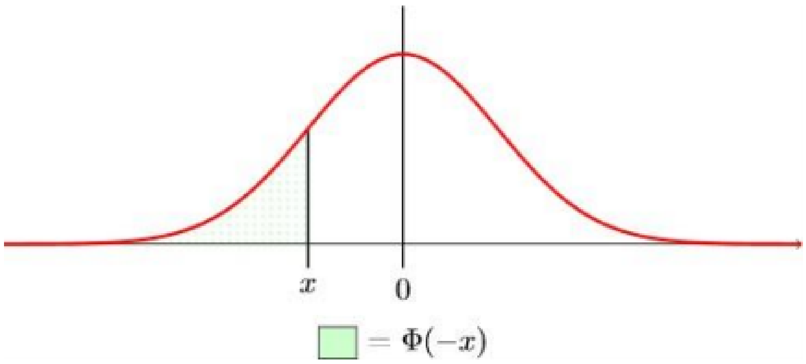


FIGURE 4.8 – La fonction $\Phi(-x)$.

Exemple 4.2.2.

$$\begin{aligned} P(X > 1) = P\Big(\frac{X-6}{2} > \frac{1-6}{2}\Big) &= P(Y > -2,5) \\ &= \Phi(2,5) \\ &= 0,9938. \end{aligned}$$

$$P(4 \leq X \leq 8) = P(-1 \leq X \leq 1) = P(|Y| \leq 1) = 2\Phi(1) = 0,6826.$$

4.2.7 Lois log-normales

Définition 4.2.7.

Une variable aléatoire réelle X suit une loi log-normale si elle admet la densité :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} exp\Big(-\dfrac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}\Big) & si\ t \geq 0\ m \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathbb{R}^* \\ 0\ ailleur. \end{cases}$$

Proposition 4.2.7.

Si X est de loi log-normale alors $\ln(X)$ suit une loi normale et réciproquement.

Preuve 26.

Exo TD.

4.2.8 Lois de Cauchy

Définition 4.2.8.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle loi de Cauchy de paramètre a la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 4.2.3.

L'espérance de la loi de Cauchy n'est pas définie.

4.2.9 Lois de Gamma

Définition 4.2.9.

Soient $r > 0, \lambda > 0$. On définit la fonction Γ par :

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx.$$

Définition 4.2.10.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètres r, λ si sa fonction de densité f est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x} x^{r-1} \ si \ x \geq 0. \\ 0 \ si \ non. \end{cases}$$

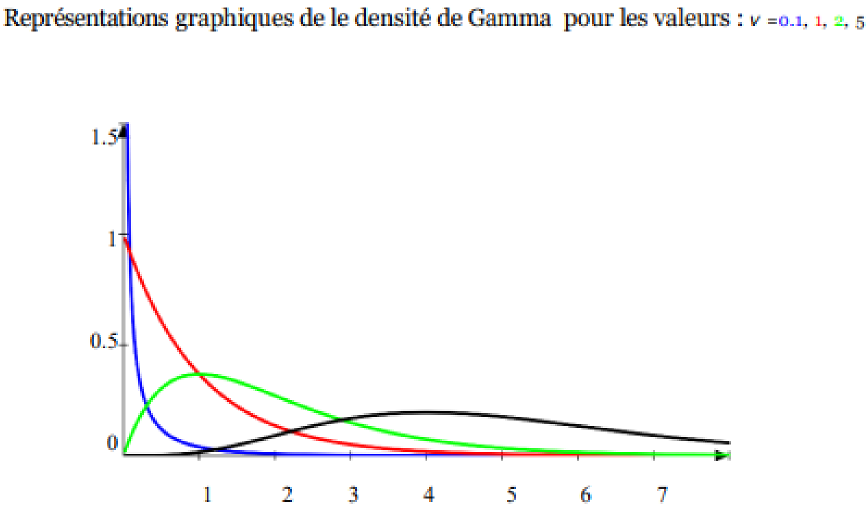


FIGURE 4.9 – Graphe de la densité de Gamma.

Notation 4.2.3.

$X \sim \Gamma(\lambda, r)$.

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.2.8.

Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale $X \sim \Gamma(\lambda, r)$, alors :

$$E(X) = \frac{r}{\lambda}, \quad Var(X) = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2, \quad \sigma(X) = \frac{r}{\lambda}.$$

Preuve 27.

Exo TD.

Cas particulier : Si $r = 1$, on retrouve la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Loi de Cauchy

Une variable aléatoire X absolument continue suit une loi de Cauchy si la densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)} \text{ si } \lambda > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Les moments de la distribution de Cauchy n'existent pas.

4.2.10 Loi de Laplace

Définition 4.2.11.

On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Laplace si sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Notation 4.2.4. $X \sim \Gamma(\lambda, r)$.

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.2.9.

Soit X une variable aléatoire suit la loi de Laplace $X \sim L$ alors :

$$E(X) = 0, \quad Var(X) = 2, \quad \sigma(X) = \sqrt{2}.$$

Preuve 28. Exo TD.

4.2.11 Loi du Khi-deux (χ_2)

Définition 4.2.12.

On dit que X suit la loi du χ_2 ("khi-deux") à k degré(s) de liberté si :

$$f_k(t) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} t^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}, \quad t > 0.$$

La loi du χ_2 est une loi très classique en statistique. Elle est liée au test du χ_2 qui permet, par exemple, de savoir si un échantillon donné est en adéquation avec une loi de probabilité définie a priori.

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.2.10.
Soit X une variable aléatoire suit la loi de χ_2, $X \sim \chi_2$ alors :

$$E(X) = k,\ Var(X) = 2k,\ \sigma(X) = \sqrt{2k}.$$

Théorème 4.2.4.
Soit $\{X_1, \cdots, X_n\}$ une famille de v.a. indépendant identiquement distribuer (i.i.d). suivant une loi $N(0,1)$, alors la variable Z définie par :

$$Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \to \chi^2(n).$$

Cas particulier :
Si $\dfrac{n}{2} = r,\ \lambda = \dfrac{1}{2}$ on retrouve la loi de gamma de paramètre $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{n}{2}$ i.e

$$\Gamma\Big(\lambda = \frac{1}{2},\ r = \frac{n}{2}\Big).$$

4.2.12 La Loi Beta

Définition 4.2.13.
Soit X une variable aléatoire, on dit que X suit la loi de Beta de paramètre (a, b) si sa densité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} 1_{]0,1[}(x),$$

où $\beta(a, b)$ désigne la fonction Beta définie par :

$$\beta(a,b) = \beta(b,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.2.11.

Soit X une variable aléatoire suit la loi $\beta(a,b)$ d'alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X^k) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}, \text{ donc :}$$

$$E(X)\frac{a}{a+b},\ Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2},\ \sigma(X) = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{ab}{(a+b+1)}}$$

4.2.13 Loi de Student

Définition 4.2.14.

Soient $X \sim N(0;1)$ et $Y \sim \chi_2(n)$. Posons $f_r(t) = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$.

Alors T suit une loi de Student a n degré de liberté et on la note $T(n)$ La fonction de densité de la loi de Student est définie sur $\mathbb{R}$ et continue : Le plus souvent, elle est définie à l'aide de la fonction Gamma :

$$f_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \times \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Espérance e, variance et écart type

Proposition 4.2.12.

Soit X une variable aléatoire suit la loi de Student, $X \sim T_n$ alors :

$$E(T) = 0, n > 1,\ pour\ tout\ n > 2,\ Var(T) = \frac{n}{n-2},\ \sigma(T)\sqrt{\frac{n}{n-2}}.$$

Preuve 29.

Exo TD.

Propriétés :

1. La fonction de répartition ne s'explicite pas. Cependant, il existe des tables de fonction de répartition pour différentes valeurs du paramètre n.
2. Si $X \curvearrowright S(n)$, nous avons :
$$\text{Si } n \geq 2,\ E(X) = 0 \text{ et si } n \geq 3,\ Var(X) = \frac{n}{n-2}.$$
3. Si $n = 1$, la loi est de Cauchy. La loi de Cauchy est en fait la loi du rapport de deux variables qui suivent chacune indépendamment la loi normale $N(0,1)$.

Théorème 4.2.5.
Soit une v.a. X qui suit une loi normale $N(0,1)$ et Y une v.a. qui suit indépendamment de X une loi de Khi-deux $\chi_2(n)$. Alors la variable $S = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$ suit une loi de Student de paramètre n.

4.2.14 Loi de Weibull

Définition 4.2.15.
Une variable aléatoire X suit la loi de Weibull de paramètres $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ si elle est absolument continue et admet pour densité :
$$f(x) = \begin{cases} \alpha\lambda e^{-\lambda x^{\alpha}} x^{\alpha-1} \ si\ x \geq 0; \\ 0 \ si\ non. \end{cases}$$

Remarque 4.2.6.
Lorsque $\alpha = 2,\ \lambda = \dfrac{1}{2}$, on l'appelle aussi loi de Rayleigh.

Espérance :

Si X suit la loi de Weibull alors X admet alors une espérance :

$$E(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} .$$

Remarque 4.2.7.

La loi de Rayleigh apparaît souvent pour décrire le bruit en sortie de certains récepteurs de transmissions. La loi de Weibull elle est utilisée notamment en théorie de la fiabilité, lorsque le système que l'on étudie vieillit et que le taux de panne augmente au cours du temps.

4.2.15 Loi de Fischer-Snedecor

Définition 4.2.16.

La loi de Fischer-Snedecor est une loi continue dépendant de deux paramètres notés v_1 et v_2, entiers naturels non nuls. La variable X distribuée selon cette loi prend toutes ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ou dans $\mathbb{R}_+$.

Si Y suit la loi de $\chi^2_{v_1}$ et Z suit la loi $\chi^2_{v_2}$. Y et Z étant indépendantes, la variable $X = \dfrac{\frac{Y}{v_1}}{\frac{Z}{v_2}}$ la loi de Fischer-Snedecor. On note $X \to F_{(v_1,v_2)}$.

La loi F de Fischer-Snedecor à (v_1, v_2) degrés de liberté est la loi de probabilité du rapport de deux variables de khi-deux indépendantes divisées par leurs nombres de degrés de liberté (v_1 pour le numérateur, v_2 pour le dénominateur). Pour $v_1 = 1$, la loi F de Fischer-Snedecor à (1, v_1) degrés de liberté est la loi de probabilité du carré d'une variable de Student à v_2 degrés de liberté.

Densité de la variable aléatoire de Fischer-Snedecor

La densité de probabilité est, par définition :

$$f_{(v_1,v_2)}(x) = v_1^{\frac{v_1}{2}} v_1^{\frac{v_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{v_1+v_2}{2}\right) x^{\frac{v_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{v_1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{v_2}{2}\right) (v_1 x + v_2)^{\frac{v_1+v_2}{2}}},\ x > 0, v_1 \ et \ v_2 \in \mathbb{N}^* .$$

Dans cette formule, Γ est la fonction Gamma d'Euler définie, lorsque la partie réelle de x est positive.

Preuve 30.

La fonction $f_{(v_1,v_2)}$ est bien une densité de probabilité sur $]0, +\infty[$, car :

- Ses valeurs sont positives.
- La fonction est intégrable et son intégrale est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} f_{(v_1,v_2)}(x)dx = v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{v_1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{v_2}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{v_1}{2}-1}}{(v_1 x + v_2)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} dx$$

Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{v_1}{2}-1}}{(v_1 x + v_2)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} dx$$

On pose $t = \dfrac{v_1 x}{v_1 x + v_2} \Longrightarrow dx = \dfrac{n_2}{n_1} \dfrac{dt}{1-t^2}$. De plus $v_1 x + v_2 = v_2 \times \dfrac{1}{1-t}$ ce qui implique que lorsque $x = 0,\ t = 0$ et tend vers l'infini, t tend vers 1. Par conséquent :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{v_2}{v_1} \frac{t}{1-t}\right)^{\frac{v_1}{2}-1} \left(\frac{1-t}{v_2}\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}} \frac{v_2}{v_1} \frac{dt}{1-t^2} \\ &= v_1^{-\frac{v_1}{2}} v_2^{-\frac{v_2}{2}} \int_0^1 t^{\frac{v_1}{2}-1} (1-t)^{\frac{v_2}{2}-1} dt. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale, on reconnait la fonction Beta d'Euler définie, lorsque les parties réelles x et de y sont positives, par :

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ donc :$$

$$\int_0^1 t^{\frac{v_1}{2}-1} (1-t)^{\frac{v_2}{2}-1} dt = B\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)$$

ce qui implique que

$$\int_0^{+\infty} f_{(v_1,v_2)}(x)dx = v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} v_1^{-\frac{v_1}{2}} v_2^{-\frac{v_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)} = 1$$

L'intégrale de $f_{(v_1,v_2)}$ est bien égale à 1, ce qui montre que $f_{(v_1,v_2)}$ est bien une densité de probabilité.

Si $X \rightsquigarrow F_{(v_1,v_2)}$ la variable $\frac{1}{X} \rightsquigarrow F(v_1, v_2)$ donc $F(v_1, v_2, 1-\alpha) = \frac{1}{F(v_1, v_2, \alpha)}$.

Théorème 4.2.8.

Soit X et Y étant deux v.a. suivant indépendamment des lois du Khi-deux χ_2 à m et n degré de liberté (d.d.l). respectivement. Alors la v.a $F = \dfrac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à m d.d.l au numérateur et n d.d.l au dénominateur $(F(m,n))$.

4.3 Série 4 (Variables aléatoire discrète et continue)

- **Exercice 1**(Corrigé) :

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

Démontrer que $E[(X-a)^2]$ est minimal pour a.

- **Exercice 2**(Corrigé) :

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X la v.a. représentant le nombre de faces obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.
2. Soit la v.a. $Y = X^2 - 1$. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. Y et donner sa fonction de répartition.

- **Exercice 3**(Corrigé) :

Soit une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :$P(X = n) = k\dfrac{3^{n-1}}{n!}$.

1. Quelle valeur doit-on donner au nombre réel k pour que la loi de probabilité de la v.a. X soit parfaitement déterminée ?
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

- **Exercice 4**(Corrigé) :

Dans un jeu, un joueur doit choisir entre deux questions, une question facile et une question difficile. S'il répond juste à la première question, il peut tenter de répondre à l'autre question. La question facile rapporte au joueur 1000 DA et la question difficile lui rapporte 3000 DA. Les questions sont indépendantes, et on estime avoir 30% de chances de bien répondre à la question difficile, et 60% de chances de répondre à la question facile. Soit X la v.a. égale au gain du jeu.

1. Dans le cas où il choisit de répondre à la question facile en premier, quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Que vaut le gain moyen dans ce cas ?.
2. Même question, si le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier.
3. Que peut-on déduire ?.

- **Exercice 5**(Corrigé) :

On place une souris dans une cage. Elle se trouve face à 4 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, la souris reçoit une décharge électrique et on la replace à l'endroit initial. On suppose que la souris mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'elle n'a pas encore essayé. Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais pour sortir de la cage.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X. Reconnaître la loi.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

- **Exercice 6**(Corrigé) :

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la v.a. qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut ?

- **Exercice 7**(Corrigé) :

On suppose que sur 1000 personnes voyageant par train à un instant donné, il y a en moyenne 1 médecin. Soit X la v.a. représentant le nombre de médecins dans le train.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?
2. Quelle est la probabilité de trouver :
   - Aucun médecin.
   - Entre 2 et 4 médecins (au sens large).
   - Au moins deux médecins.

- **Exercice 8**(Corrigé) :

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition associée à cette densité.

$$f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x} \ si \ x \geq 0, \\ 0 \ ailleur. \end{cases} \quad , \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{4\ln x}{x^3} \ si \ x \geq 1, \\ 0 \ si \ x < 1. \end{cases}$$

- **Exercice 9**(Corrigé) :

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} \ si \ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \ ailleur. \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer sa fonction de répartition F.
3. Calculer $P(0,488 \leq X \leq 1,2)$.

- **Exercice 10**

Soit X une variable aléatoire réel (v.a.r) de fonction de répartition F définie :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \leq 1, \\ \ln x \ si \ 1 < x \leq e, \\ 1 \ si \ x > e. \end{cases}$$

- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

- **Exercice 11**(Corrigé) :

Soit X une v.a. continue de densité de probabilité $f(x)$ donnée par :

$$\begin{cases} Ce^{-2\alpha x}(1-e^{-\alpha x}) \ si \ x \geq 0, \\ 0 \ ailleur. \end{cases}$$

Où α est une constante connue strictement positive et c une constante réelle à déterminer.

1. Montrer que la constante c est égale à 6α.
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. X .

3. Pour $\alpha = 1$, calculer les probabilités suivantes :

$$P(-1 \leq X \leq 2,5), \quad P(1,5 \leq X \leq 3,75) \quad P(X > 6).$$

4. Soit la v.a. $Y = e^{-\alpha x}$

   - Trouver la densité de probabilité de la v.a. Y .

   - Déterminer la fonction de répartition de la v.a. Y .

   - Calculer les probabilités suivantes :

$$P(Y \leq 0,5), \ P(0,25 < Y \leq 1), \quad P(|Y - 0,5| \geq 0,1).$$

- **Exercice 12**(Corrigé) :

1. Soit une v.a. X qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. Rappeler la fonction de densité et la fonction de répartition de la variable étudiée.

2. On pose $Y = \ln(e^x - 1)$

   - Déterminer la fonction de répartition F de la v.a.Y .

   - Déterminer la fonction de densité f de la v.a. Y.

   - Monter que la fonction f est paire.

   - Déduire $E(Y)$.

- **Exercice 13**(Corrigé) :

La durée de vie en années d'un ordinateur est une v.a. notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ .

2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

- **Exercice 14**(Corrigé) :

La distance (en mètres) parcourue par un projectile suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

1. La probabilité qu'un projectile dépasse 60 mètres est 0,0869.

2. La probabilité qu'un projectile parcoure une distance inférieure à 45 mètres est 0,6406.

   - Calculer la distance moyenne parcourue par un projectile, ainsi que l'écart-type de celle-ci.

- **Exercice 15**(Corrigé) :

Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes en vue de connaître leur consommation de lait sur 1 mois. On suppose que sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation a une distribution de type "Normale" avec une moyenne de 20 litres et un écart-type de 5 litres.

Dans le cadre d'une campagne publicitaire, on souhaite connaître :

1. Le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois)
2. Le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois).
3. La consommation maximale de 50% des consommateurs.
4. Au-dessus de quelle consommation se trouvent 33% des consommateurs.

Annexe : Si $Z \to N(0;1)$ on donne : $F_Z(2) = 0,9772, \quad F_Z(0,44) = 0,67$.

- **Exercice 16**(Corrigé) :

Tous les jours, un étudiant parcourt le même trajet de 40 Km pour se rendre à son université. Sa vitesse est une v.a. Y qui dépend des conditions météorologiques et de la circulation. Sa densité est de la forme :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \ si \ x \geq 0; \\ 0 \ ailleur. \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de probabilité de la v.a. Y . Déterminer la valeur de λ sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h.
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. V .
3. Sur la route empruntée par l'étudiant, la vitesse est limitée à 120 Km/h, un radar mesure la vitesse de toutes les automobiles. Quelle est la probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse ?.
4. La durée du trajet est décrite par la v.a. $Z = \dfrac{40}{Y} V$.
   - Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a.Y.
5. On pose $U = 2\lambda Y$.
   - Déterminer la densité de la v.a. U. De quelle loi usuelle s'agit-il ?.

- **Exercice 17**(Corrigé) :

Soit X une v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x+1} \ si \ 0 \leq x \leq e-1; \\ 0 \ ailleur. \end{cases}$$

1. Calculer k pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer $P(X \geq 1), \ P(0,7 \leq X \leq 1,7)$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si elles existent.
4. Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. X.
5. Déterminer la loi de la v.a. $Y = \ln(1+X)$.
6. Monter que la v.a. $Z = -2\ln Y$ suit une loi du khi-deux, préciser son degré de liberté.

4.3.1 Solution de la série n=04

- **Exercice 1 :**Énoncé.
- **Exercice 2 :**Énoncé.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}.$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}.$$

La loi de probabilité de la v.a. X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = X^2 - 1$ et donner sa fonction de répartition :

$$Y(\Omega) = \{-1, 0, 3, 8\}.$$

y_i	-1	0	3	8
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

- **Exercice 3 :**Énoncé.

1. Pour que la loi de probabilité de la v.a. X soit parfaitement déterminée, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} k\frac{3^{n-1}}{n!} = 1 \\
&\Longrightarrow \frac{k}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} = 1 \\
&\Longrightarrow \frac{k}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - 1\right) = 1 \\
&\Longrightarrow \frac{k}{3}(e^3 - 1) = 1 \\
&\Longrightarrow k = \frac{3}{e^3 - 1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^* : P(X = n) = \left(\frac{1}{e^3 - 1}\right)\frac{3^n}{n!}$.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{e^3-1}\right)\frac{3^n}{n!} \\ &= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)e^3 \\ &= \frac{3e^3}{e^3-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{1}{e^3-1}\right)\frac{3^n}{n!} \\ &= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)4e^3 \\ &= \frac{12e^3}{e^3-1}. \end{aligned}$$

En effet

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = (xe^x)' = (x+1)e^x.$$

Donc :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) + [E(X)]^2 \\ &= \frac{12e^3}{e^3-1} - \left(\frac{3e^3}{e^3-1}\right)^2 \\ &= \frac{3e^3(e^3-4)}{(e^3-1)^2}. \end{aligned}$$

• **Exercice 4 :**Énoncé.

1. La loi de la v.a. X dans le cas où le joueur choisit de répondre à la question facile en premier :

$$X(\Omega) = \{0, 1000, 4000\}.$$

x_i	0	1000	4000
$P(X = x_i)$	$0,4$	$0,42$	$0,18$

Le gain moyen du joueur est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) \\ &= 0 \times (0,4) + 1000 \times (0,42) + 4000 \times (0,18) \\ &= 1140 \ DA. \end{aligned}$$

2. La loi de la v.a. X dans le cas où le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier :

$$X(\Omega) = \{0, 3000, 4000\}.$$

x_i	0	3000	4000
$P(X = x_i)$	$0,7$	$0,12$	$0,18$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) \\ &= 0 \times (0,7) + 3000 \times (0,12) + 4000 \times (0,18) \\ &= 1080 \ DA. \end{aligned}$$

3. **La déduction :** On déduit qu'il est plus avantageux au joueur de choisir de répondre à la question la plus facile en premier.

• **Exercice 5 :**Énoncé.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :

On a

$$P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

$$P(X = 4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$P(X = 3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

La loi de probabilité de la v.a. X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Puisque $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)$, on déduit que la v.a. X suit une loi uniforme, on écrit $X \hookrightarrow U_{\{1,2,3,4\}}$.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X)=\frac{n+1}{2}=\frac{5}{2}.$$

$$V(X)=\frac{n^2-1}{12}=\frac{5}{4}.$$

- **Exercice 6 :**Énoncé.

1. La loi de probabilité de la v.a. X :

$$X=\sum_{i=1}^{8} X_i \ tel\ que\ X_i \hookrightarrow B(0,1),\ quadi=1,\cdots,8.$$

Donc, la v.a. X suit une loi binomiale de paramètre $n=8$ et $p=0,1$, on écrit $X \hookrightarrow B(8;0,1)$, et on a :

$$P(X=k)=C_8^k(0,1)^k(0,9)^{8-k}.$$

2. La probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut :

$$P(X=0)=C_8^0(0,1)^0(0,9)^{8-0}=(0,9)^8=0,43.$$

3. La probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut :

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0,43=0,57.$$

4. La probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut :

$$\begin{aligned} P(X<2) &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= \sum_{i=0}^{1} C_8^i(0,1)^i(0,9)^{8-i} \\ &= 0,813. \end{aligned}$$

- **Exercice 7 :**Énoncé.

1. La loi de probabilité de la v.a. X :

La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=1$, on écrit $X \hookrightarrow P(1)$, et on a :

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-1}\frac{1}{k!}.$$

2. La probabilité de trouver :

   - Aucun médecin est :
$$P(X=0)=e^{-1}\frac{1}{0!}=e^{-1}=0,368.$$
   - Entre 2 et 4 médecins (au sens large) est :
$$\begin{aligned}P(2\leq X\leq 4)&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&=e^{-1}\Big(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\Big)\\&=0,261.\end{aligned}$$
   - Au moins deux médecins est :
$$\begin{aligned}P(X\geq 2)&=1-P(X<2)\\&=1-P(X=0)+P(X=1)\\&=1-\Big(0,368+e^{-1}\frac{1}{1!}\Big)\\&=0,262.\end{aligned}$$

- **Exercice 8 :**Énoncé.

1. Déterminer si la fonction f est une densité de probabilité :
   - $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R}$.

   On a :
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx&=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}0dx}_{\text{est égale à 0}}+\underbrace{\int_{0}^{+\infty}4xe^{-2x}dx}_{\text{intégration par parties}}\\&=\underbrace{\Big[-2xe^{-2x}\Big]_0^{+\infty}}_{\text{est égale à 0}}+\int_0^{+\infty}2e^{-2x}dx\\&=\Big[-e^{-2x}\Big]_0^{+\infty}\\&=1.\end{aligned}$$

   Donc,f est bien une densité de probabilité.

   Déterminer la fonction de répartition F associée à f :

   - Si $x<0$, on a :
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0.$$

- Si $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_{0}^{x} 4te^{-2t}dt$$

$$= 0 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1$$

$$= 1 - (2x+1)e^{-2x}.$$

Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0, \\ 1 - (2x+1)e^{-2x} & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

2. Déterminer si la fonction g est une densité de probabilité :

- $g(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- g est continue sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0dx}_{\text{est égale à 0}} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} \frac{4\ln(x)}{x^3}dx}_{\text{intégration par parties}}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{-2\ln(x)}{x^2}\right]_1^{+\infty}}_{\text{est égale à 0}} + \int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^3}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^{+\infty}$$

$$= 1.$$

Donc,g est bien une densité de probabilité.

Déterminer la fonction de répartition G associée à g :

- Si $x < 1$, on a :

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

- Si $x \geq 1$, on a :

$$G(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_{1}^{x} \frac{4\ln(t)}{t^3}dt$$

$$= \left[\frac{-2\ln(t)}{t^2}\right]_1^{x} + \int_{1}^{x} \frac{2}{t^3}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2}(2\ln(x) + 1).$$

Ainsi

$$G(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^2}(2\ln(x) + 1) & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

- **Exercice 9 :**Énoncé.

1. Déterminer si la fonction f est une densité de probabilité :
   - $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

   On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dx}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}dx + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0dx}_{\text{est égale à 0}} \\ &= \left[-\frac{4}{3}\frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

   Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. Déterminer sa fonction de répartition F :
   - Si $x < 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

   - Si $0 \leq x \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^x (1-t)^{\frac{1}{3}}dt \\ &= \left[-(1-t)^{\frac{4}{3}} \right]_0^x \\ &= 1 - (1-x)^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

   - Si $x > 1$, on a :

$$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dx}_{\text{est égale à 0}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}dx}_{\text{est égale à 1}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0dx}_{\text{est égale à 0}}$$

   Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0, \\ 1 - (1-x)^{\frac{4}{3}} & si\ 0 \leq x \geq 1 \\ 1 & si\ x > 1. \end{cases}$$

3. Calculer $P(0,488 < X \leq 1,2)$:

$$\begin{aligned} P(0,488 < X \leq 1,2) &= F(1,2) - F(0,488) \\ &= 1 - (1 - (1 - 0,488)^{\frac{4}{3}}) \\ &= 0,410. \end{aligned}$$

• **Exercice 11 :**Énoncé.

1. Déterminons la valeur de la constante c :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 &\Longrightarrow \int_{0}^{+\infty} ce^{-2\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})dx = 1 \\ &\Longrightarrow c\int_{0}^{+\infty} (e^{-2\alpha x} - e^{-3\alpha x})dx = 1 \\ &\Longrightarrow c\Big[-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha x} + \frac{1}{3\alpha}e^{-3\alpha x}\Big]_0^{+\infty} = 1 \\ &= c\Big(0 + \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{3\alpha}\Big) = 1 \\ &\Longrightarrow c\Big(\frac{3\alpha - 2\alpha}{6\alpha^2}\Big) = 1 \\ &\Longrightarrow \frac{c}{6\alpha} = 1 \\ &\Longrightarrow c = 6\alpha. \end{aligned}$$

2. Déterminons la fonction de répartition F_X de la v.a. X : • Si $x < 0$, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

• Si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à } 0} + \int_{0}^{+\infty} (6\alpha e^{-2\alpha t}(1 - e^{-\alpha t}))dt \\ &= 6\alpha\int_{0}^{+\infty} (e^{-2\alpha t} - e^{-3\alpha t})dt \\ &= 6\alpha\Big[-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t} + \frac{1}{3\alpha}e^{-3\alpha t}\Big]_0^{x} \\ &= 1 - 3e^{-2\alpha x} + 2e^{-3\alpha x}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0; \\ 1 - 3e^{-2\alpha x} + 2e^{-3\alpha x} & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

3. Pour $\alpha = 1$, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0; \\ 1 - 3e^{-2x} + 2e^{-3x} & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(-1 \leq X \leq 2,5) &= F_X(2,5) - F_X(-1) \\ &= (1 - 3e^{-2(2,5)} + 2e^{-3(2,5)}) - 0 \\ &= 0,980. \\ P(1,5 \leq X \leq 3,75) &= F_X(3,75) - F_X(1,5) \\ &= (1 - 3e^{-2(3,75)} + 2e^{-3(3,75)}) - (1 - 3e^{-2(1,5)} + 2e^{-3(1,5)}) \\ &= 0,125. \\ P(X > 6) &= 1 - P(X \leq 6) \\ &= 1 - F_X(6) \\ &= 1 - (1 - 3e^{-2(6)} + 2e^{-3(6)}) \\ &= 0,0000184. \end{aligned}$$

4. pour $Y = e^{-\alpha X}$:

- Trouvons la densité de probabilité de la v.a. Y :

$$X(\Omega) = [0, +\infty[\Longrightarrow Y(\Omega) = [0,1].$$

Pour $y \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(e^{-\alpha X} \leq y) \\ &= P(-\alpha X \leq \ln(y)) \\ &= P\Big(X \geq -\frac{\ln(y)}{\alpha}\Big) \\ &= 1 - 8P\Big(X < -\frac{\ln(y)}{\alpha}\Big) \\ &= 1 - F_X\Big(-\frac{\ln(y)}{\alpha}\Big) \end{aligned}$$

Donc, pour $y \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= \frac{1}{\alpha y} f_X\Big(-\frac{\ln(y)}{\alpha}\Big) \\ &= \frac{1}{\alpha y}\Big(6\alpha e^{2\alpha \frac{\ln(y)}{\alpha}}\Big(1 - e^{\alpha\frac{\ln(y)}{\alpha}}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{y}\Big(6e^{2\ln(y)}\Big(1 - e^{\ln(y)}\Big)\Big) \\ &== \frac{1}{y}\Big(6y^2(1-y)\Big) \\ &= 6y - 6y^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 6y - 6y^2 & si\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

- Déterminons la fonction de répartition de la v.a. Y :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0, \\ 3y^2 - 3y^3 & si\ 0 \leq y \leq 1, \\ 1 & six > 1. \end{cases}$$

- On a :

$$\begin{aligned} P(Y \leq 0,5) &= F_Y(0,5) \\ &= 3(0,5)^2 - 3(0,5)^3 \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0,25 < Y \leq 1) &= F_Y(1) - F_Y(0,25) \\ &= 1 - (3(0,25)^2 - 3(0,25)^3) \\ &= 0,843. \\ P(|Y - 0,5| \geq 0,1) &= 1 - P(|Y-1| < 0,1) \\ &= 1 - P(-0,1 + 0,5 < Y < 0,1 + 0,5) \\ &= 1 - P(0,4 < Y < 0,6) \\ &= 1 - (F_Y(0,6) - F_Y(0,4)) \\ &= 1 - \Big((3(0,6)^2 - 3(0,6)^3) - (3(0,4)^2 - 3(0,4)^3)\Big) \\ &= 0,704. \end{aligned}$$

- **Exercice 12 :**Énoncé.

1. La fonction de densité de la v.a. X :
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$
La fonction de densité de la v.a. X :
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & si\ x \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2. On pose que $Y = \ln(e^X - 1)$

- Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. Y :
$$X(\Omega) = [0, +\infty[\Longrightarrow Y(\Omega) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$
On a :
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\ln(e^X - 1) \leq y) \\ &= P(e^X - 1 \leq e^y) \\ &= P(e^X \leq e^y + 1) \\ &= P(X \leq \ln(e^y + 1)) \\ &= F_X(\ln(e^y + 1)) \\ &= 1 - e^{-\ln(e^y+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{e^y + 1}, \ \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Déterminer la fonction de densité f de la v.a. Y :
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e^y + 1}\right)' \\ &= \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} \ \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Monter que la fonction f est paire :

On a

$$\begin{aligned} f_Y(-y) &= \frac{e^{-y}}{(e^{-y}+1)^2} \\ &= \frac{e^{2y}e^{-y}}{e^{2y}(e^{-y}+1)^2} \\ &= \frac{e^{y}}{(e^{y}+1)^2} \\ &= f_Y(y),\ \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la fonction f_Y est paire.

- Déduire $E(Y)$:

$$\begin{aligned} E(Y) = & \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{e^{y}}{(e^{y}+1)^2} dy}_{\text{Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique}} \\ = & \ 0. \end{aligned}$$

Remarque : L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

• **Exercice 13 :**Énoncé. Rappelons que si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$, alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0, \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ :

$$\begin{aligned} P(X > 10) = 0,286 &\Longrightarrow 1 - P(X \leq 10) = 0,286 \\ &\Longrightarrow 1 - (1 - e^{-10\lambda}) = 0,286 \\ &\Longrightarrow e^{-10\lambda} = 0,286 \\ &\Longrightarrow -10\lambda = \ln(0,286) \\ &\Longrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,286)}{-10} \\ &\Longrightarrow 0,125. \end{aligned}$$

2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois :

   Sachant que 6 mois=0,5 année, alors on cherche :

$$\begin{aligned} P(X \leq 0,5) &= F_X(0,5) \\ &= 1 - e^{-0,5\times 0,125} \\ &= 0,061. \end{aligned}$$

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, calculer la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans :

$$\begin{aligned} P(X > 10/X > 8) &= \frac{P(X > 10 \cap X > 8)}{P(X > 8)} \\ &= \frac{P(X > 10)}{P(X > 8)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq 10)}{1 - P(X \leq 8)} \\ &= \frac{1 - F_X(10)}{1 - F_X(8)} \\ &= \frac{e^{-0,125\times 10}}{e^{-0,125\times 8}} \\ &= 0,779. \end{aligned}$$

• **Exercice 14 :**Énoncé.

On a : $X \hookrightarrow N(m, \sigma)$.

On cherche à calculer la moyenne m et l'écart-type σ :

On pose $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow N(0, 1)$. On a :

$$\begin{cases} P(X > 60) = 0,0869 \\ P(X < 45) = 0,6406 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(Z > \dfrac{60 - m}{\sigma}) = 0,0869 \\ P(X < \dfrac{45 - m}{\sigma}) = 0,6406 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - P(Z \leq \dfrac{60 - m}{\sigma}) = 0,0869 \\ F_Z\Big(\dfrac{45 - m}{\sigma}\Big) = 0,6406 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F_Z\Big(\dfrac{60 - m}{\sigma}\Big) = 0,9131. \\ F_Z\Big(\dfrac{45 - m}{\sigma}\Big) = 0,6406 \end{cases}$$

En utilisant la table de la loi normale centrée réduite, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{60-m}{\sigma} = 1,36; \\ \dfrac{45-m}{\sigma} = 0,36. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma = 15; \\ m = 39,6. \end{cases}$$

• **Exercice 15 :**Énoncé.

On a : $X \hookrightarrow N(20, 5)$.

On pose $Z = \dfrac{X-20}{5} \hookrightarrow N(0, 1)$.

1. Calculer le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois) :

$$\begin{aligned} P(X < 10) &= P\Big(Z < \frac{10-20}{5}\Big) \\ &= P(Z < -2) \\ &= F_Z(-2) \\ &= 1 - F_Z(2) \\ &= 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

2. Calculer le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois) :

$$\begin{aligned} P(X > 30) &= P\Big(Z > \frac{30-20}{5}\Big) \\ &= P(Z > 2) \\ &= 1 - P(Z \leq 2) \\ &= 1 - F_Z(2) \\ &= 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

3. Calculer la consommation maximale de 50% des consommateurs :

   On cherche c telle que :

$$\begin{aligned} P(X \leq c) = 0,5 &\Longrightarrow P\Big(Z \leq \frac{c-20}{5}\Big) = 0,5 \\ &\Longrightarrow F_Z\Big(\frac{c-20}{5}\Big) = 0,5 \\ &\Longrightarrow \frac{c-20}{5} = 0 \\ &\Longrightarrow c = 20. \end{aligned}$$

   Ainsi, la consommation maximale de 50% des consommateurs est de 20 litres.

4. On cherche à calculer c telle que :

$$\begin{aligned} P(X > c) = 0,33 &\Longrightarrow P\Big(Z > \frac{c-20}{5}\Big) = 0,33 \\ &= 1 - P\Big(Z \leq \frac{c-20}{5}\Big) = 0,33 \\ &\Longrightarrow F_Z\Big(\frac{c-20}{5}\Big) = 0,67 \\ &\Longrightarrow \frac{c-20}{5} = 0,44 \\ &\Longrightarrow c = 22,5. \end{aligned}$$

   Ainsi, 33% des consommateurs se trouvent au dessus de 22, 5 litres.

• **Exercice 16 :**Énoncé.

1. Reconnaître la loi de V :

   Par identification : $V \hookrightarrow \Gamma(2, \lambda)$.

   Déterminer la valeur de λ sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h :

$$E(V) = 80 \Longrightarrow \frac{2}{\lambda} = 80 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{40}.$$

2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. V : • Si $x < 0$ alors $F_V(x) = 0$.

   • Si $x \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_V(x)dx \\ &= \int_0^x \Big(\frac{1}{40}\Big)^2 x e^{-\frac{1}{40}x} dx \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{40}x}\Big(\frac{1}{40}x + 1\Big). \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{40}x}\Big(\dfrac{1}{40}x + 1\Big) & si\ x \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

3. La probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse :

$$\begin{aligned} P(V \geq 120) &= 1 - P(V < 120) \\ &= e^{-\frac{1}{40}(120)}\Big(\frac{1}{40}(120) + 1\Big) \\ &= 4e^{-3} \\ &= 0,199. \end{aligned}$$

4. Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a.$T = \dfrac{40}{V}$:

$$V(\Omega) = [0, +\infty[\Longrightarrow T(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) \\ &= P\Big(\frac{40}{V} \leq t\Big) \\ &= P\Big(V \geq \frac{40}{t}\Big) \\ &= 1 - P\Big(V < \frac{40}{t}\Big) \\ &= 1 - F_V\Big(\frac{40}{t}\Big) \end{aligned}$$

Donc, pour $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$f_T(t) = F'_T(t) = \frac{40}{t^2} f_V\Big(\frac{40}{t}\Big).$$

Ainsi,

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} & si\ t \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

L'espérance de la v.a. T est :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \Big[e^{-\frac{1}{t}}\Big]_0^{+\infty} = 1.$$

5. Déterminer la densité de la v.a. $U = \dfrac{1}{20}V$ et reconnaître sa loi :

$$V(\Omega) = [0, +\infty[\Longrightarrow U(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P\left(\frac{1}{20}V \leq u\right) \\ &= P(V \leq 20u) \\ &= F_V(20u). \end{aligned}$$

Donc, pour $u \in [0, +\infty[$, on a :

$$f_U(u) = F'_U(u) = 20 f_V(20u).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \begin{cases} \dfrac{1}{4} u e^{-\frac{1}{2}u} & si\ u \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 u e^{-\frac{1}{2}u} & si\ u \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{aligned}$$

Par identification : $U \hookrightarrow \Gamma(2, \dfrac{1}{2})$, c'est-à-dire, $U \hookrightarrow \chi^2(4)$.

- **Exercice 17 :** Énoncé.

1. Calculons k pour que f soit une densité de probabilité :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 &\Longrightarrow \int_0^{e-1} \frac{k}{k+1} dx = 1 \\ &\Longrightarrow k\Big[\ln(x+1)\Big]_0^{e-1} = 1 \\ &\Longrightarrow k(\ln(e) - \ln(1)) = 1 \\ &\Longrightarrow k = 1. \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= \int_1^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_1^{e-1} \frac{1}{x+1} dx + \int_{e-1}^{+\infty} 0 dx \\ &= \Big[\ln(x+1)\Big]_1^{e-1} \\ &= 1 - \ln 2 \\ &= 0,306. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
P(0,7 \leq X \leq 1,7) &= \int_{0,7}^{1,7} f(x)dx \\
&= \int_{0,7}^{1,7} \frac{1}{x+1}dx \\
&= \Big[\ln(x+1)\Big]_{0,7}^{1,7} \\
&= \ln(2,7) - \ln(1,7) \\
&= 0,462.
\end{aligned}$$

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \frac{x}{x+1}dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \Big[x - \ln(x+1)\Big]_{0}^{e-1} \\
&= e-2 \\
&= 0,718.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \frac{x^2}{x+1}dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \frac{x^2-1+1}{x+1}dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \left(\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \int_{0}^{e-1} \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_{0}^{e-1} \\
&= \frac{(e-1)^2}{2} - e + 2 \\
&= 0,758.
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut déduire que

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 0,758 - 0,718^2 \\ &= 0,242. \end{aligned}$$

4. La fonction de répartition de la v.a. X :

• Si $x < 0$, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \; dt = 0.$$

• Si $0 \leq x \leq e-1$, on a :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^x \frac{1}{t+1}dt = \Big[\ln(t+1)\Big]_0^x = \ln(x+1).$$

• Si $x > e-1$, on a :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^{e-1} \frac{1}{t+1}dt + \underbrace{\int_{e-1}^{+\infty} 0dt}_{\text{est égale à 0}} = 1.$$

Ainsi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \; x < 0, \\ \ln(x+1) & si \; 0 \leq x \leq e-1, \\ 1 & si \; x > e-1. \end{cases}$$

5. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = \ln(1+X)$:

$$X(\Omega) = [0, e-1] \Longrightarrow Y(\Omega) = [0, 1].$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\ln(1+X) \leq y) \\ &= P(1 + X \leq e^y) \\ &= P(X \leq e^y - 1) \\ &= F_X(e^y - 1). \end{aligned}$$

Donc, pour $y \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= e^y f_X(e^y - 1) \\ &= e^y \frac{1}{e^y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Par identification, on déduit que la v.a. Y suit une loi uniforme $Y \hookrightarrow U_{[0,1]}$.

6. Montrer que la v.a. $Z = -2\ln Y$ suit une loi du khi-deux et déterminer son degré de liberté :

$$Y(\Omega) = [0,1] \Longrightarrow Z(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(-2\ln(Y) \leq z) \\ &= P\Big(\ln(Y) \geq -\frac{1}{2}z\Big) \\ &= P(Y \geq e^{-\frac{1}{2}z}) \\ &= 1 - P(Y < e^{-\frac{1}{2}z}) \\ &= 1 - F_Y(e^{-\frac{1}{2}z}). \end{aligned}$$

Donc, pour $z \in [0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= F'_Z(z) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z} \underbrace{f_Y(e^{-z})}_{\text{est égale à 1}} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z} \ si\ z \geq 0, \\ 0 \qquad\qquad sinon. \end{cases}$$

Par identification, la v.a. Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

$$Z \hookrightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2).$$

On déduit que la v.a. Z suit une loi du khi-deux à 2 degrés de liberté.

4.4 Couples aléatoires

Nous avons introduit la notion de variable aléatoire à une dimension, maintenant on va généraliser cette notion aux variables à deux dimensions (couple).

4.4.1 Variables discrètes (couple discrètes)

Définition 4.4.1.

Probabilité en un point du domaine :

$$P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j).$$

Fonction de répartition :

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\mu \leq x} \sum_{\nu \leq y} P(X = \mu,\ Y = \nu).$$

4.4.2 Variables continues (couple continues)

Définition 4.4.2.

Fonction de répartition :

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(\mu, \nu) d\mu d\nu.$$

Densité de probabilité :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Dans ce qui suit, les formules sont données pour des variables continues. Les formules, pour les variables discrètes, s'en déduisent aisément.

4.4.3 Lois marginales et lois conditionnelles

Loi marginale de X

$$F(x,.) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu,\nu)d\nu\right)d\mu.$$

$$\frac{\partial F(x,.)}{\partial x} = f(x,.) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy.$$

Loi marginale de Y :

$$F(.,y) = \int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu,\nu)d\mu\right)d\nu.$$

$$\frac{\partial F(.,y)}{\partial y} = f(.,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Loi conditionnelle de Y/X

$$F(y/X=x) = F(y/x) = \frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{dF(x,y)}{dx}}.$$

$$f(y/x) = \frac{dF(y/x)}{dy} = \frac{f(x,y)}{f(x,.)}.$$

Loi conditionnelle de X/Y

$$F(x/Y=y) = F(x/y) = \frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{dF(.,y)}{dy}}.$$

$$f(x/y) = \frac{dF(x/y)}{dx} = \frac{f(x,y)}{f(.,y)}.$$

4.4.4 Espérance mathématique

Espérances des variables marginales

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dx\ dy.$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dx\ dy.$$

Espérances des variables conditionnelles

$$E(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x/y)dx.$$

$$E(Y/X) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)dy.$$

On remarquera que ces espérances sont elles-mêmes des variables aléatoires.

Théorème 4.4.1 (**espérance totale**).

$$E(X) = E[E(X/Y)], \qquad E(Y) = E[E(Y/X)].$$

4.4.5 Variance

Variances conditionnelles

$$Var(X/Y) = E\Big[X - E(X/Y)\Big]^2;$$

$$Var(Y/X) = E\Big[Y - E(Y/X)\Big]^2.$$

Théorème 4.4.2 (**variance totale**).

$$Var(Y) = Var(E(Y/X)) + E(Var(Y/X))$$

4.4.6 Corrélation

Coefficient de corrélation

$$r = \frac{E\Big[(X - E(X))(Y - E(Y))\Big]}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Rapport de corrélation

$$\eta^2(Y/X) = \frac{Var[E(Y/X)]}{Var(Y)}$$

Matrice des variances-covariances

$$M(X, Y) = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X, Y) \\ Cov(X, Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

4.4.7 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 4.4.3.
Deux variables X et Y sont indépendantes si, quel que soit deux événements $X \in A$ et $Y \in B$, on a :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(X \in B).$$

Propriétés :

Deux variables X et Y sont indépendantes si et seulement si une de ces propriétés soit satisfaite :

1. $F(x, y) = F(X, .)F(., Y)$.
2. $f(x, y) = f(x, .)f(., y)$.
3. $f(x/y) = f(x, .)$ ou $f(y/x) = f(., y)$.

Variance de la somme

Si les deux variables X et Y sont indépendantes alors, les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $E(XY) = E(X)E(Y)$.
2. $Cov(X, Y) = 0$.
3. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Bibliographie

[1] L-P. Arguin (2022). A first Course in Stochastic Calculs. AMS. — AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, USA, 2022.

[2] E.Cantoni, P. Huber, E. Ronchetti (2006). Maîtriser l'aléatoire. Exercices résolus de probabilités et statistique. Springer-Verlag, France, Paris, 2006.

[3] H. Carrieu (2008). Probabilité. Exercices Corrigés. EDP Sciences, 2008.

[4] M. Cottrell, Ch. Duhamel et V. Genon-Catalot (1980). Exercices de Probabilités avec rappels de cours. Librairie classique Eugène Belin, 1980.

[5] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre (1999). Exercices de probabilités Licence- maitrise- école d'ingénieurs. CASSINI, PARIS, 1999.

[6] D. Foata, A. Fuchs(1998). Calcul des probabilités. Dunod, 1998.

[7] M. Lejeune (2010). Statistique. La Théorie et ses applications. Deuxième édition. — Springer, 2010.

[8] M. Loève (1978). Probability Theory II. 4th Edition. — Springer-Verlag, New York, 1978.

[9] J. Neveu (1994). Introduction aux probabilités. École Polytechnique, Paris, 1994.

[10] C. Reidcher, R. Leblanc, B. Rémillard, D. Larocque (2002). Théorie des probabilities Problèmes et Solutions. Presses de l'Université du Québec, 2002.

[11] Tortrat (1971). Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. MASSON, 1971.

[12] Saporta, Gilbert (2006). probabilités, analyse des données et statistique, 2006. Editions technip.