Université Djilali Bounaàma, Khemis-Miliana

Faculté des sciences de la matières et Informatique

Département de Mathématiques

Eenseignante : Dr M. Boukedroun **L2 :** Mathématique

Module : : Probabilités **Année :** 2023/2024

Série d'exercice N°4

Lois de probabilités usuelles

- **Exercice 1 :**

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

Démontrer que $E[(X-a)^2]$ est minimal pour a.

- **Exercice 2 :** On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X la v.a. représentant le nombre de faces obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.
2. Soit la v.a. $Y = X^2 - 1$. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. Y et donner sa fonction de répartition.

- **Exercice 3**

Soit une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :$P(X = n) = k\dfrac{3^{n-1}}{n!}$.

1. Quelle valeur doit-on donner au nombre réel k pour que la loi de probabilité de la v.a. X soit parfaitement déterminée ?
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

- **Exercice 4 :**

Dans un jeu, un joueur doit choisir entre deux questions, une question facile et une question difficile. S'il répond juste à la première question, il peut tenter de répondre à l'autre question. La question facile rapporte au joueur 1000 DA et la question difficile lui rapporte 3000 DA. Les questions sont indépendantes, et on estime avoir 30% de chances de bien répondre à la question difficile, et 60% de chances de répondre à la question facile. Soit X la v.a. égale au gain du jeu.

1. Dans le cas où il choisit de répondre à la question facile en premier, quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Que vaut le gain moyen dans ce cas ?.
2. Même question, si le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier.
3. Que peut-on déduire ?.

- **Exercice 5 :**

On place une souris dans une cage. Elle se trouve face à 4 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, la souris reçoit une décharge électrique et on la replace à l'endroit initial. On suppose que la souris mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'elle n'a pas encore essayé. Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais pour sortir de la cage.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X. Reconnaître la loi.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

- **Exercice 6**

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.
On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la v.a. qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut ?

- **Exercice 7**

On suppose que sur 1000 personnes voyageant par train à un instant donné, il y a en moyenne 1 médecin. Soit X la v.a. représentant le nombre de médecins dans le train.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?
2. Quelle est la probabilité de trouver :
   - Aucun médecin.
   - Entre 2 et 4 médecins (au sens large).
   - Au moins deux médecins.

- **Exercice 8 :**

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition associée à cette densité.

$$f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x} \ si \ x \geq 0, \\ 0 \ ailleur. \end{cases} \quad , \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{4\ln x}{x^3} \ si \ x \geq 1, \\ 0 \ si \ x < 1. \end{cases}$$

- **Exercice 9 :**

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} \ si \ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \ ailleur. \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer sa fonction de répartition F.
3. Calculer $P(0,488 \leq X \leq 1,2)$.

- **Exercice 10 :**

Soit X une variable aléatoire réel (v.a.r) de fonction de répartition F définie :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \leq 1, \\ \ln x \ si \ 1 < x \leq e, \\ 1 \ si \ x > e. \end{cases}$$

- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

- **Exercice 11 :**

Soit X une v.a. continue de densité de probabilité $f(x)$ donnée par :

$$\begin{cases} Ce^{-2\alpha x}(1-e^{-\alpha x}) \ si \ x \geq 0, \\ 0 \ ailleur. \end{cases}$$

Où α est une constante connue strictement positive et c une constante réelle à déterminer.

1. Montrer que la constante c est égale à 6α.
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. X .

3. Pour $\alpha = 1$, calculer les probabilités suivantes :

$$P(-1 \leq X \leq 2,5), \quad P(1,5 \leq X \leq 3,75) \quad P(X > 6).$$

4. Soit la v.a. $Y = e^{-\alpha x}$

   - Trouver la densité de probabilité de la v.a. Y .

   - Déterminer la fonction de répartition de la v.a. Y .

   - Calculer les probabilités suivantes :

$$P(Y \leq 0,5), \; P(0,25 < Y \leq 1), \quad P(|Y - 0,5| \geq 0,1).$$

- **Exercice 12 :**

1. Soit une v.a. X qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. Rappeler la fonction de densité et la fonction de répartition de la variable étudiée.

2. On pose $Y = \ln(e^x - 1)$

   - Déterminer la fonction de répartition F de la v.a.Y .

   - Déterminer la fonction de densité f de la v.a. Y.

   - Monter que la fonction f est paire.

   - Déduire $E(Y)$.

- **Exercice 13 :**

La durée de vie en années d'un ordinateur est une v.a. notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ .

2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

- **Exercice 14 :**

La distance (en mètres) parcourue par un projectile suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

1. La probabilité qu'un projectile dépasse 60 mètres est 0,0869.

2. La probabilité qu'un projectile parcoure une distance inférieure à 45 mètres est 0,6406.

   - Calculer la distance moyenne parcourue par un projectile, ainsi que l'écart-type de celle-ci.

- **Exercice 15 :**

Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes en vue de connaître leur consommation de lait sur 1 mois. On suppose que sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation a une distribution de type "Normale" avec une moyenne de 20 litres et un écart-type de 5 litres.

Dans le cadre d'une campagne publicitaire, on souhaite connaître :

1. Le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois)
2. Le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois).
3. La consommation maximale de 50% des consommateurs.
4. Au-dessus de quelle consommation se trouvent 33% des consommateurs.

Annexe : Si $Z \to N(0;1)$ on donne : $F_Z(2) = 0,9772, \quad F_Z(0,44) = 0,67.$

- **Exercice 16 :**

Tous les jours, un étudiant parcourt le même trajet de 40 Km pour se rendre à son université. Sa vitesse est une v.a. Y qui dépend des conditions météorologiques et de la circulation. Sa densité est de la forme :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \; si \; x \geq 0; \\ 0 \; ailleur. \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de probabilité de la v.a. Y . Déterminer la valeur de λ sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h.
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. V .
3. Sur la route empruntée par l'étudiant, la vitesse est limitée à 120 Km/h, un radar mesure la vitesse de toutes les automobiles. Quelle est la probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse ?.
4. La durée du trajet est décrite par la v.a. $Z = \dfrac{40}{Y} V$.
   - Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a.Y.
5. On pose $U = 2\lambda Y$.
   - Déterminer la densité de la v.a. U. De quelle loi usuelle s'agit-il ?.

- **Exercice 17 :**

Soit X une v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x+1} \; si \; 0 \leq x \leq e-1; \\ 0 \; ailleur. \end{cases}$$

1. Calculer k pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer $P(X \geq 1)$, $P(0,7 \leq X \leq 1,7)$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si elles existent.
4. Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. X.
5. Déterminer la loi de la v.a. $Y = \ln(1+X)$.
6. Monter que la v.a. $Z = -2\ln Y$ suit une loi du khi-deux, préciser son degré de liberté.