

# Chapitre 3

## Variables aléatoires

Soit  $(\Omega, P)$  un espace de probabilité.

**Définition 3.0.1.**

Une variable aléatoire réelle  $X$  sur un ensemble fondamental  $\Omega$  se définit souvent comme une fonction de  $\Omega$  dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels, tels que l'inverse de chaque intervalle de  $\mathbb{R}$  doit être un événement de  $\Omega$ .

Autrement dit,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , pour tout intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\{X \in [a, b]\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b]\} \text{ est un événement.}$$

Une variable aléatoire est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .<sup>[10]</sup>

**Définition 3.0.2.**

Soit  $X$  une variable aléatoire. La loi de  $X$  est la probabilité  $P_X$  sur  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\text{Pour tout } B \subset \mathbb{R}, P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = P(X \in B).$$

$P_X$  peut aussi être vue comme une probabilité sur  $X(\Omega)$ , ensemble des valeurs prises par  $X$ . Aussi appelé support de  $P_X$ .

On note parfois  $X \sim P_X$  pour indiquer que  $X$  suit la loi  $P_X$ .<sup>[?]</sup>

**Définition 3.0.3.**

Si  $A$  est un évènement, on introduit la variable aléatoire fonction indicatrice de  $A$  notée  $I_A$  qui indique si l'évènement  $A$  est réalisé

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega, \quad I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

**Remarque 3.0.1.**

En général la probabilité  $P$  est notée par  $P_X$  en effet :

$$P_X(]a, b]) = P(X^{-1}]a, b])$$

$$\text{c.à.d. } P_X(]a, b]) = P_X(]-\infty, b]) - P_X(]-\infty, a]) = P_X(]-\infty, b]) - P_X(]-\infty, a])$$

Si l'on pose maintenant  $\forall y \in \mathbb{R}, F_X(y) = P_X(]-\infty, y])$ .

Alors  $P_X(]a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$  Cette remarque nous donne la définition de la fonction de répartition.

### 3.1 Variable aléatoire discrète

**Définition 3.1.1.**

Une variable aléatoire  $X$  est dite discrète si l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs qu'elle prend est dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut trouver une suite qui énumère tous les éléments de  $X(\omega)$  : c'est le cas notamment si  $X(\omega)$  est un ensemble fini,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Q}$ , mais pas l'intervalle  $[0, 1]$  ni  $\mathbb{R}$ ). On dit aussi que la loi de  $X$  est discrète. Si  $X$  est discrète, alors, pour tout  $B \subset \mathbb{R}$ , on peut calculer :

$$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{x \in B \cap X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{x \in B} P(X = x).$$

Pour caractériser une loi discrète, il suffit donc de se donner les probabilités élémentaires  $P_X(x) = P(X = x)$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ .

Avec  $X$  c'est la variable aléatoire et le petit  $x$  sont les valeurs possibles de  $X$ . [5]

**Définition 3.1.2.**

Si  $X(\Omega)$  est fini ou dénombrable,  $X$  définit une variable aléatoire discrète.

**Exemple 3.1.1.**

Considérons quatre épreuves répétées, identiques et indépendantes, telles qu'au cours de chacune d'elles, un événement  $A$  a une probabilité de se réaliser égale à  $p = P(A) = 0,3$  (et donc une probabilité de ne pas se réaliser égale à  $q = P(\bar{A}) = 1 - p = 0,7$ ). Désignons par  $X$  la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de réalisations de l'événement  $A$  au cours des quatre expériences aléatoires.

On a :

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= q^4 = (0,7)^4 = 0,2401 & P(X = 1) &= C_4^1 p q^3 = 4 \times (0,3)(0,7)^3 = 0,4116 \\
 P(X = 2) &= C_4^2 p^2 q^2 = 6 \times (0,3)^2 (0,7)^2 = 0,2646 \\
 P(X = 3) &= C_4^3 p^3 q = 4 \times (0,3)^3 (0,7) = 0,0756 \\
 P(X = 4) &= C_4^0 p^4 q^0 = (0,3)^4 = 0,0081.
 \end{aligned}$$

Remarquer bien qu'on a :

$$\sum_{k=0}^4 P(X = k) = 1.$$

**Définition 3.1.3** (Et proposition).

Soit  $E \subset \mathbb{R}$ . une famille  $(P(x))_{x \in E} \in \mathbb{R}^E$  est une famille de probabilités élémentaires si :

1. Pour tout  $x \in E, P(x) \geq 0$ .
- 2.

$$\sum_{k=0}^4 P(X = x) = 1.$$

Dans ce cas, il existe une variable aléatoire  $X$  (sur un espace de probabilité  $(\Omega, P)$ ), a valeurs dans  $E$ , de probabilité élémentaire  $P_X = p$  c.à.d. pour tout  $x$  de  $E$ ,

$$P(X = x) = p(x) .$$

Pour la preuve est évidente (**Exo TD** ).

### 3.1.1 Fonction de répartition

**Définition 3.1.4.**

Soit  $X$  une variable aléatoire. La fonction de répartition de  $X$  est la fonction  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x) = P_X([-\infty, x]).[12]$$

**Proposition 3.1.1.** [Propriétés de la fonction de répartition]

1. La fonction  $F$  est monotone croissante.
2. La fonction de répartition est admet un ensemble de points de discontinuité fini ou dénombrable.
3. La fonction de répartition est continue à droite par la propriété d'additivité.[11]

Autrement :

1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$$

2.  $F$  est croissante, c.à.d.  $y \geq x \implies F(y) \geq F(x)$ .

3.  $F$  est continue à droite, c.à.d.

$$\lim_{y \rightarrow x^+} F_X(x) = F(x)$$

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ . [12]

**Exemple 3.1.2.**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

**Réciproquement**

**Proposition 3.1.2.**

Toute fonction monotone croissante continue à droite telle que ( $F(-\infty) = 0$  et  $F(+\infty) = 1$  a la limite) définit une loi de probabilité unique sur  $\mathbb{R}$ . [7]

**Preuve 6.**

évidente (**Exo TD**).

## 3.2 Cas particuliers

### 3.2.1 Variable aléatoire discrète

**Définition 3.2.1.**

Si  $X(\Omega)$  est fini ou dénombrable,  $X$  définit une variable aléatoire discrète.

#### Densité de probabilité

Si la fonction de répartition  $F$  d'une variable aléatoire  $X$  est continue et dérivable presque partout, on dit que  $X$  est continue (ou plus exactement absolument continue) et sa dérivée  $f$  est la densité de probabilité.

### 3.2.2 Variable aléatoire absolument continue

#### Variable aléatoire réelle

**Définition 3.2.2.**

Étant donné un espace probabilisé  $(\Omega, E, P)$ , on appelle variable aléatoire réelle une application  $X$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telle que l'image réciproque par  $X$  de tout intervalle  $]a, b]$  de  $\mathbb{R}$  soit un élément de la tribu  $E$ . [8]

#### Densité d'une variable aléatoire

Pour qu'une fonction  $f$  soit une densité d'une variable aléatoire  $X$  elle doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1.  $f$  est positif.
2.  $f$  est continu.
3. l'aire délimitée par sa courbe représentative et par l'axe des abscisses doit être égale à 1.

• Autrement dit :

Si  $f$  est une densité de probabilité alors :

1.  $f$  est une fonction positive :  $\forall x > 0, f(x) \geq 0$ .

2.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

**Proposition 3.2.1.**

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable réelle,  $F_X$  sa fonction de répartition. Si  $F_X$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors  $X$  est une variable absolument continue. De plus, si on pose

$$D = \{x \in \mathbb{R} : t \rightarrow F_X(t) \text{ est dérivable au point } t = x\}.$$

Alors la fonction de densité  $f_X$  peut être définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad .[10]$$

**Exemple 3.2.1.**

Soient  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f$  la fonction définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2ce^{-\frac{x}{3}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Sous quelle condition la fonction  $f$  est la fonction de densité d'une variable aléatoire réelle ?

**Solution 9**

Pour que  $f$  soit la fonction de densité d'une variable aléatoire il faut qu'elle soit positive, ainsi  $c \geq 0$ , de plus on doit avoir

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

par conséquent.

Ainsi,  $f$  est la fonction de densité d'une variable aléatoire si et seulement si  $c = 1/6$ .

### 3.3 Espérance et variance d'une variable aléatoire

#### 3.3.1 Espérance

##### Définition 3.3.1.

Dans de nombreux cas, il n'est pas nécessaire de connaître une propriété de la variable aléatoire aussi précise que sa fonction de répartition. Certains paramètres numériques caractérisent parfois cette variable aléatoire. L'étude de quelques-uns de ces paramètres fait l'objet du présent paragraphe.

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète pouvant prendre un nombre fini de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , avec les probabilités respectives  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . On définit une moyenne arithmétique des différentes valeurs de  $X$  pondérées par leurs probabilités  $p_k$ .

Cette moyenne pondérée est appelée espérance mathématique (ou moyenne stochastique) et elle est notée  $E(X)$  :

$$E(X) = p_1x_1 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i.$$

**Définition 3.3.2.**

$X$  étant une variable aléatoire réelle, on appelle espérance mathématique de  $X$  le nombre  $E(X)$ , si il existe, défini par :

1. Si  $X$  est une variable aléatoire finie :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} x_k P(X = x_k).$$

2. Si  $X$  est une variable aléatoire discrète dénombrable (sous réserve de convergence)

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

3. Si  $X$  est une variable aléatoire continue,  $f$  étant la densité de probabilité, on a (sous réserve de convergence)

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} t \cdot f(t) dt.$$

**Propriétés de l'espérance**

Soient  $X, Y$  deux variables réelles d'espérances finies et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

1. Linéarité d'espérance  $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$ .
2. Positivité de l'espérance  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .
3. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants  $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$ .
4. Pour toute fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $E(|h(X)|) < +\infty$  :

$$E(f(X)) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} h(t) f_X dt & \text{en continu} \\ \sum_{\omega \in \Omega} h(X(\omega)) \cdot P_X(\{\omega\}) & \text{en discret} \end{cases}$$

Ou  $f_X$  désigne la densité de probabilité de  $X$ . (c.à.d. la formule de transfert)

Pour tout  $A \in \xi$  :  $P(X \in A) = P_X(A) = E(1_A(X))$ .

**Preuve 7.** Voir (TD exo).

### 3.3.2 Variance

#### Définition 3.3.3.

On appelle variance variable aléatoire, son moment centré d'ordre 2. On la note  $Var(X)$  par :

$$Var(X) = \mu_2(X) = E((X - E(X))^2).$$

La variance est un nombre positif. Sa racine carrée définit l'écart-type dont l'expression est :

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

#### Propriétés de la variance

1. La variance est toujours positive.
2. Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

3.  $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

4. Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2).$$

**Preuve 8.** voir (TD exo).

#### Remarque 3.3.1.

La variance n'est pas toujours définie. Il faut que l'espérance  $E[X]$  soit définie et que l'espérance converge. Ceci revient à demander à ce que  $E[X^2]$  converge.

### 3.3.3 Inégalités stochastiques (Markov et de Bienaymé-Tchebyshev)

**Proposition 3.3.1** (Inégalité de Markov).

Soit  $X$  une variable aléatoire,

$$\text{pour tout } a > 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}.$$

Plus généralement, pour tout  $a > 0$  et  $r > 0$ ,  $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^r)}{a^r}$ . [5]

**Preuve 9.**

On a toujours  $|X|^r \geq 0$  et si  $|X| \geq a$ , alors  $|X|^r \geq a^r$  d'où  $a^r 1_{\{|X| \geq a\}} \leq |X|^r$ , ce qui donne en prenant l'espérance de chaque membre :

$$E\left[a^r 1_{\{|X| \geq a\}}\right] \leq E\left[|X|^r\right] \text{ et } E\left[a^r 1_{\{|X| \geq a\}}\right] = a^r P(|X| \geq a),$$

d'où le résultat annoncée ( $r = 1$  donne la première).

**Proposition 3.3.2** (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit  $X$  une variable aléatoire. Pour tout  $a > 0$ , on a :

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}. [12]$$

**Preuve 10.**

Prendre  $r = 2$  et remplacer  $X$  par  $X - E[X]$  dans l'inégalité de Markov.

**Exemple 3.3.1.**

Soit  $X$  le nombre de pièces fabriquées par une usine pendant une semaine. On suppose que la moyenne de  $X$  est égale à 50.

1. Que peut-on dire sur la probabilité que la production de cette semaine ne dépasse pas 75 ?.
2. Si la variance de la production est connue et est égale à 25, que peut-on dire sur la probabilité que la production de cette semaine soit compris entre 40 et 60 ?.

**Solution 10**

Soit  $X$  le nombre de pièces pouvant être produits en une semaine, par l'inégalité de Markov :

$$P(X > 75) \leq \frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}.$$

Et on a alors :  $P(X \leq 75) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ .

L'évènement  $\{|X - 50| < 10\} = \{10 < X < 60\}$ , et par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{1}{4}; \quad P(|X - 50| < 10) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

**Remarque 3.3.2.**

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de donner une borne inférieure ou supérieure d'une probabilité sans trop exiger la loi de la v.a.  $X$ .

**Remarque 3.3.3.**

Si  $X \in L^2$  (v.a. carrée intégrable) de variance  $\sigma^2$  et

$$a > 0, \quad P(|X| \geq a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2}.$$

### 3.4 Exercices d'application

• **Exercice 1 :**

Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
- 2) On lance deux fois le dé.
  - a. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
  - b. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

**Solution 11**

1) On note  $a$  la probabilité que 1 soit tiré. Ainsi, la probabilité que 2 soit tiré est égale à  $2a$ . la probabilité que 3 soit tiré est  $a, \dots$ .

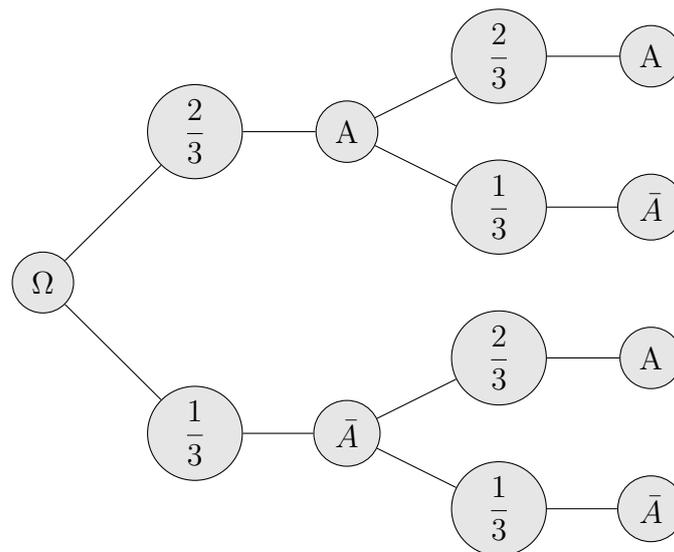
La somme des probabilité est égale à 1 donc  $a + 2a + a + 2a + a + 2a = 1$ , soit  $9a = 1$  et  $a = \frac{1}{9}$ . La probabilité d'obtenir un 6 est donc  $2a$ , soit  $\frac{2}{9}$ .

2) a. On note l'événement "le résultat d'un lancer est pair". On a donc  $P(A) = \frac{2}{3}$ . La situation est modélisée sur l'arbre ci-contre :

$$P(AA) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

b. Les deux tirages sont indépendants donc les probabilité sont multipliées elles :

$$P(\text{deux}6) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81}.$$



• **Exercice 2 :**

Deux lignes téléphoniques  $A$  et  $B$  arrivent à un standard. On note :

$E_1 =$  "la ligne  $A$  est occupée".

$E_2 =$  "la ligne  $B$  est occupée".

Après étude statistique, on admet les probabilités :

$$P(E_1) = 0,5; P(E_2) = 0,6 \text{ et } P(E_1 \cap E_2) = 0,3.$$

Calculer la probabilité des événements suivants :

$F$  = "la ligne  $A$  est libre".

$G$  = "une ligne au moins est occupée".

$H$  = "une ligne au moins est libre".

**Solution 12**

$$P(F) = P(\bar{E}_1) = 1 - P(E_1) = 0,5.$$

$$P(G) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0,5 + 0,6 - 0,3 = 0,8.$$

$$P(H) = P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

• **Exercice 3 :**

On considère la loi de probabilité suivant. Calculer  $P(X = 3)$  puis l'espérance et l'écart-type.

$X$	-2	-1	1	2	3
$P$	0,1	0,2	0,3	0,2	

**Solution 13**

La somme des probabilités est égale à 1, donc  $P(X = 3) = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,2) = 0,2$ .

$$E(X) = -2 \times 0,1 - 1 \times 0,2 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,2 = 0,9.$$

$$\begin{aligned} V(X) &= (-2)^2 \times 0,1 + (-1)^2 \times 0,2 + 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,2 - 0,9^2 \\ &= 0,4 + 0,2 + 0,3 + 0,8 + 1,8 - 0,81 = 2,69 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sigma(X) = \sqrt{2,69} \approx 1,64.$$

• **Exercice 4 :**

Pour la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 3]$  par  $f(x) = kx$ , déterminer la valeur de  $k$  pour qu'elle soit une densité de probabilité.

**Solution 14**

$f$  est une densité de probabilité ssi :

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx = 1 &\iff \int_0^3 kx dx = 1 \iff \left[ k \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 1 \\ &\iff \left( k \times \frac{3^2}{2} \right) - \left( k \times \frac{0^2}{2} \right) = 1 \\ &\iff \frac{9k}{2} = 1 \iff k = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

• **Exercice 5 :**

I. Soit  $X$  la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x) = 4exp(-4x).$$

a) Calculer  $F(5)$ .

b) Calculer  $P(1 < X < 3)$ .

II. Pour la fonction suivante, définie sur l'intervalle  $[0, 2]$ , déterminer la valeur de  $k$  pour qu'elle soit une densité de probabilité.  $f(x) = kx^3$ .

**Solution 15**

I.

a)

$$\begin{aligned} F(5) = P(X \leq 5) &= \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 4e^{-4x} dx = \left[ \frac{4}{-4} e^{-4x} \right]_0^5 = [-e^{-4x}]_0^5 \\ &= (-e^{-4 \times 5}) - (-e^{-4 \times 0}) = -e^{-20} + 1 \equiv 0.99 \end{aligned}$$

b)

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x)dx = [-e^{-4x}]_1^3 = (-e^{-4 \times 3}) - (-e^{-4 \times 1}) = -e^{-12} + e^{-4} \equiv 0.0183$$

II.  $f$  est une densité de probabilité ssi :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx = 1 &\iff \int_0^2 kx^3 dx = 1 \iff \left[ k \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 1 \\ &\iff \left( k \times \frac{2^4}{4} \right) - \left( k \times \frac{0^4}{4} \right) = 1 \iff 4k = 1 \iff k = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

• **Exercice 6 :**

Une urne contient 1 boule rouge et  $n$  boules blanches  $n \geq 1$ . Les boules sont indiscernables au toucher. On prélève au hasard une boule de l'urne. Si elle est rouge, on gagne 10€ et si elle est blanche, on perd 1€.

On considère la variable aléatoire  $X$  égale au gain algébrique du joueur.

1) On suppose dans cette question qu'il y a 10 boules blanches ( $n = 10$ ).

a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b. Calculer l'espérance de  $X$ .

2) On suppose maintenant que  $n$  est un entier positif quelconque.

a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b. Exprimer  $E(X)$  en fonction de  $n$ .

c. Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $E(X) = -1/2$ .

**Solution 16**

1) L'urne contient 1 boule rouge et 10 boules blanches, soit 11 boules au totale.

a. Voir ci-contre.

b.  $E(X) = 10 \times \frac{1}{11} - \frac{10}{11} = 0.$

$x_i$	10	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

2) L'urne contient  $n + 1$  boules.

a. Voir ci-contre.

b.  $E(X) = \frac{10}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{10-n}{n+1}.$

c.  $E(X) \geq 0 \iff 10 - n \geq 0$  car  $n + 1 \geq 0 \iff n \leq 10.$

$x_i$	10	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$

Il faut donc qu'il y ait moins de 10 boules blanches pour que l'espérance soit positive.

d.  $E(X) = -\frac{1}{2} \iff \frac{10-n}{n+1} = -\frac{1}{2} \iff 2(10-n) = -(n+1) \iff -n = -21 \iff n = 21.$

Il faut qu'il y ait 21 boules blanches pour que l'espérance soit égale à  $-\frac{1}{2}.$

### 4.2.4 Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

**Proposition 4.2.4.**

Soit  $X$  une variable aléatoire suit la loi Normale  $X \sim N(m, \sigma^2)$  alors :

$$E(X) = m, \quad Var(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

**Remarque 4.2.2.**

Notons que  $f$  est bien une densité puisque :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

En effet, par le changement de variable  $u = \frac{(t-m)}{\sqrt{2}\sigma}$ , il suffit de retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi}.$$

Pour cela, effectuons un changement de variable en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx \times \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x+y)^2) dx dy \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp(-r^2) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \exp(-r^2) r dr \\ &= -\pi \left[ \exp(-r^2) \right]_0^{+\infty} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(np)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

qui est la fonction de densité de la loi de Poisson du paramètre  $\lambda$ .

**Théorème 5.1.1.**

Soit  $n \geq 1$ ,  $0 < p < 1$  et  $X$  une variable aléatoire de la loi  $B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ , supposons que  $np \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et  $p \rightarrow 0$ , alors :

$$B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) = P(\lambda).$$

**Preuve 31.**

On a :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} e^{(n-k) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)} \end{aligned}$$

Or,

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} n^k.$$

De plus, comme

$$\frac{\lambda}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} e^{-\frac{\lambda}{n}}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_{nb} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Ainsi,  $(X_n)$  converge bien en loi vers une variable qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Remarque 5.1.2.**

En pratique, on considère que si  $n \geq 30$  et  $p$  est petit ( $p \leq 0.1$ ), on peut approcher la loi  $B(n, p)$  par la loi  $P(np)$ .

# Bibliographie

- [1] L-P. Arguin (2022). A first Course in Stochastic Calculus. AMS. — AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, USA, 2022.
- [2] E.Cantoni, P. Huber, E. Ronchetti (2006). Maîtriser l'aléatoire. Exercices résolus de probabilités et statistique. Springer-Verlag, France, Paris, 2006.
- [3] H. Carrieu (2008). Probabilité. Exercices Corrigés. EDP Sciences, 2008.
- [4] M. Cottrell, Ch. Duhamel et V. Genon-Catalot (1980). Exercices de Probabilités avec rappels de cours. Librairie classique Eugène Belin, 1980.
- [5] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre (1999). Exercices de probabilités Licence- maitrise- école d'ingénieurs. CASSINI, PARIS, 1999.
- [6] D. Foata, A. Fuchs(1998). Calcul des probabilités. Dunod, 1998.
- [7] M. Lejeune (2010). Statistique. La Théorie et ses applications. Deuxième édition. — Springer, 2010.
- [8] M. Loève (1978). Probability Theory II. 4th Edition. — Springer-Verlag, New York, 1978.
- [9] J. Neveu (1994). Introduction aux probabilités. École Polytechnique, Paris, 1994.
- [10] C. Reidcher, R. Leblanc, B. Rémillard, D. Larocque (2002). Théorie des probabilités Problèmes et Solutions. Presses de l'Université du Québec, 2002.
- [11] Tortrat (1971). Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. MASSON, 1971.
- [12] Saporta, Gilbert (2006). probabilités, analyse des données et statistique, 2006. Editions technip.