Université Djilali Bounaàma, Khemis-Miliana

Faculté des sciences de la matières et Informatique

Département de Mathématiques

Eenseignante : Dr M. Boukedroun **L2 :** Mathématique

Module : : Probabilité **Année :** 2023/2024

Solution de série d'exercice N°2

Notions de bases et introduction au calcul des probabilités

• **Exercice 1 :**

Soit $a = P(A)$, $b = P(B)$ et $c = P(A\ B)$.

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - a$.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup B) &= P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(\bar{A})\text{Í} + P(A \cap B) \\ &= 1 - a + c. \end{aligned}$$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A \backslash B) = P(A \cup \bar{B}) = 1 - b + c.$

On a

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \Longrightarrow P(A \cap \bar{B}) = a - c.$$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - c.$

2. Montrer que :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &= P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A)P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}). \end{aligned}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A}\cap B) &= (1-P(A))P(B) - (P(B) - P(A\cap B) \\ &= P(A\cap B) - P(A)P(B) \\ &= P(A)P(\bar{B}) - P(A‘\cap \bar{B}) \end{aligned}$$

de méme les autres égalités.

3. Voir le cours.

• **Exercice 2 :**

Soit

E : au moins une machine est en panne.

$\bar{E}$: aucun machine est en panne.

$\bar{E} = \bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$.

Les machines fonctionnes indépendants, donc $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ sont indépendants.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) &= P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) \\ &= (1-P(A))(1-P(B))(1-P(C)) \\ &= (1-0,1)(1-0,2)(1-0,3) \\ &= 0,504. \\ P(E) &= 1 - [(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))] \\ &= 0,496. \end{aligned}$$

• **Exercice 3 :**

(a) Pour que après l'échange il ni y'ait que des boules rouges dans A, il faut tirer dans A la boule blanche (A_b) et dans B la boule rouge (B_r).

$$P(A_b) = 1/4; P(B_r) = 3/8$$

Les deux tirages sont indépendants :

$$P(A_b\cap B_r) = P(A_b)\cdot P(B_r) = \frac{1}{4}\times\frac{3}{8} = \frac{3}{32}.$$

(b) Pour qui après l'échange, il fait retrouvé sa composition initiale.

Tirer dans A et dans B de boule de méme couleur, donc soit $A_b \cap B_b$ soit $A_r \cap B_r$.

$$P = P[(A_b \cap B_b) \cup (A_r \cap B_r)] = P(A_b \cap B_b) + P(A_r \cap B_r)$$

Les tirages sont indépendants.

$$P(A_b \cap B_b) = P(A_b)P(B_b) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$$

$$P(A_r \cap B_r) = P(A_r)P(B_r) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{32}$$

Donc

$$P = \frac{5}{32} + \frac{9}{32} = \frac{7}{16}.$$

• **Exercice 4 :**

Ω= L'ensemble des n-replets fermé des F et des G pour chaque enfant.

On a 2 choix $|\Omega| = 2^n$.

Montrons que :

H= La famille à des enfants des 2 sexes.

$\bar{H}$= $\{(f, \cdots, f), (G, \cdots, G)\}$.

$|\bar{H}| = 2$ or $|H| = |\Omega| - |\bar{H}| = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1) \Longrightarrow P(H) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Soit F l'évenement.

F= La famille à au plus une fille. Tel que :

$$F = \{(f, G, \cdots, G, f;\; G, f, G, \cdots, G), \cdots, (G, \cdots, G, f)\}$$

On a $|F \cap H| = n,\; P(F \cap H) = \dfrac{n}{2^n}$, donc :

$$\begin{aligned} P(F \cap H) - P(H)P(F) &= \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left[n - (n-1) + \frac{n+1}{2^{n-1}}\right] \end{aligned}$$

H et F sont indépendants ssi $n + 1 = 2^{n-1}$.

Pour $n = 2,\; n + 1 = 3,\; 2^1 = 2$, il n'y a pas d'indépendances.

Pour $n = 3,\; n + 1 = 4,\; 2^2 = 4$, on a indépendances.

Pour $n = 4,\; n + 1 = 5,\; 2^3 = 8$, il n'y a pas d'indépendances.

Par récurrence, si $n+1 < 2^2 \Longrightarrow 2^{n+1} = 2 \times 2 > 2(n+1) = 2n+1 > n+2$.

Pour $n > 1$ il n'y a pas indépendance avec n.

il n'y a pas non plus indépendance avec $n+1$.

Donc H et F sont indépendants seulement pour $n = 3$.

- **Exercice 5 :**

(a) Il ya C_{32}^5 maniérés de choisir 5 cartes parmis 32.

Il ya 8 d'autres différents, on choisit les 5 hauteur pics dans chaque hauteur, on a 4 cartes possibles. Donc :

$$P_1 = \frac{C_8^5 \cdot 4^5}{C_{32}^5} = 0,507.$$

(b) On choisit la hauteur des brelan ($C_8^1 = 8$ choix) puis les 3 cartes qui le comporte permise 4 ($C_4^3 = 4$ choix).

On cherche pute la hauteur de la paice (il ne reste que 7 possible) puis le 32 cartes qui comportes et ($C_4^2 = 6$ choix).

On a alors

$$P_2 = \frac{8 \times 4 \times 7 \times 6}{C_{32}^5} = 0,012.$$

- **Exercice 6 :**

Il ya C_{32}^3 maniérs de choisir 3 cartes parmis 32 (l'ordre n'est pas important) d'où $|\Omega| = C_{32}^3$.

Pour l'aperçoive de la supercheue. il faut tirer les 2 cas de piques du paquet et une carte parmis

$$P = \frac{30}{C_{32}^3} = \frac{30 \times 6}{32 \times 31 \times 30} = 6,05 \times 153.$$

- **Exercice 7 :**

On a $|\Omega| = 6^4$.

Soit :

A_1= On obtient 1 seule face, on a 6 choix pour cette face. Donc :

$$P(A_1) = \frac{6}{64} = \frac{1}{63} = 4,03 \times 10^{-3}.$$

A_4= On obtient 4 faces différents.

On a A_6^4 choix pour ces faces

$$P(A_4) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{64} = 0,278.$$

A_3= On obtient 3 faces différentes.

On choisit les 2 dés qu'ont la meme façe $C_4^2 = 6$. puis cette faces 6 (6 choix), il reste 5 faces pour la 3^{eme} et 4 pour la 4^{eme} dé :

$$P(A_3) = \frac{6 \times 6 \times 5 \times 4}{6^4} = 0,556.$$

$$P(A_2) = \frac{6 \times 3 \times 5 + 4 \times 6 \times 5}{6^4} = 0,162.$$

• **Exercice 8 :**

On a :

$$P = \frac{3! \times 8!}{10!} = 0,07.$$

• **Exercice 9 :**

On a : $|\Omega| = C_{20}^4 = 15 \times 17 \times 19$.

(a) 2 paires, A_1, $|A_1| = C_5^2 = 45$. Donc $P(A_1) = \dfrac{C_5^2}{C_{20}^4}$.

(b) Pour ne pas avoir de paire, ul faut choisir 4 paires pour $10 \backslash C_{10}^4$ et chaque paire on a 2 charsettes $C_{10}^4 \times 2^4 = 40 \times 16$ façon de ne pas avoir le paire

$$P_2 = 1 - \frac{C_{20}^4 \times 2^4}{C_{20}^4} = 0,306.$$

• **Exercice 10 :**

(a) Les dominos soient composés de 2 cotés chacun manqué de 0 à 6 paire.
Il ya donc 7 doubles et $\dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ dominos dont les 2 cotés sont différentes sont un total de 28 dominos.

(b) On a $C_{28}^2 = 27 \times 14$ choix possibles de 2 dominos pour que 2 dominos sont compalibles, il faut qu'ils aient numéro en connu, on choisit numéro en commencer (7 choix)puis on choisit 2 dominos parmis les 7 qui comportent 6 numéros.

Soit $C_7^2 = 21$ choix possible

$$P_2 = \frac{7 \times C_7^2}{C_{28}^2} = 0,39.$$

(c) On tirer 5 dominos ceci $|\Omega| = C_{28}^5$.

Pour ne pouvoir le double il faut choisir les 5 dominos parmis les 2 dont les 2 cotés sont différents (C_{21}^5 choix)

$$P_3 = 1 - \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = 0,79.$$

• **Exercice 11 :**

Un résultat est ici un triplet formé de numéros de 1 à 10.

On fait de tirage sucéssufave remise donc $|\Omega| = 10^3$.

(a) Les 3 nombres sont tous distanctes donc on a :

$$C_{10}^3 = 120 \text{ façons de le choisir}$$
$$P_1 - \frac{120}{10^3} = 0,12.$$

(b) Il faut ajouter au cas précédent les cas où plusieurs nombres sont égaux avec 3 nombres égaux.

On a 10 choix et avec 2 nombres égaux. Le résultat possibles sont de la façons (x, y, z) avec $x < y$, on a $2 \times C_{10}^2 = 90$ choix, donc :

$$P_2 = \frac{120 + 10 + 90}{1000} = 0,22.$$

• **Exercice 12 :**

Les résultats ici un soit des 8 chiffres des $(0, \cdots, 9)$

$$|\Omega| = 10^8.$$

(a) On a A_{10}^8 numéros de les chiffres sont distinctes

$$P_1 = \frac{A_{10}^8}{10^8} = 0,018.$$

(b) Si l'un au moins des chiffres que le compose est divisible par 2.

Il est plus simple de considécés l'évenement contraire aucun chiffre divisible sur 2.

C.à.d tous les différences discrets $\{1,3,5,7,9\}$

$$P_2 = 1 - \frac{5^8}{10^8} = 0,996.$$

(b) Par 3, on a $\{1,2,4,5,7,8\}$

$$P_2^1 = 1 - \frac{6^8}{10^8} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8.$$

(c) Une suite croissante si les chiffres sont distincts C_{10}^8 choix et il n'y a alors qu'un ordre possible $P_3 = \dfrac{C_{10}^8}{10^8}$.

• **Exercice 13 :**

On a $|\Omega| = 8^6$.

(a) On choisit les 2 personnes qui descendent au méme étage $C_6^2 = 15$.

Puis on choisit leur étage (8 choix) pour les étages descendent des 4 autres personnes sont A_7^4 choix.

$$P_1 = \frac{15 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{8^6} = 0,38.$$

(b) On choisit les 3 personnes qui descend au méme étage ($C_6^3 = 20$ choix).

Puis leur étage (8 choix).

Les 2 personnes qui descende ensemble $C_3^2 = 3$, puis les autres étages (7 choix).

$$P_2 = \frac{C_6^3 \times C_3^2 \times 8 \times 7 \times 6}{8^6} = 0,07.$$

• **Exercice 14 :**