Chapitre 2

Notions de bases et introduction au calcul des probabilités

2.1 Notations de probabilité

Introduction

Le présent chapitre tente de présenter les principaux concepts de probabilités, calcul des probabilités et des probabilités conditionnelles.
L'objectif de la théorie des probabilités est de fournir un formalisme mathématique précis, propre à décrire des situations dans lesquelles intervient le “hasard”, c'est-à-dire des situations dans lesquelles un certain nombre de conditions étant réunies (les causes), plusieurs conséquences sont possibles (les effets) sans que l'on puisse a priori savoir laquelle sera réalisée.
Une telle situation apparaît lors d'une expérience aléatoire ou stochastique (par opposition à une expérience déterministe pour laquelle l'issue est certaine).

2.1.1 Espaces de probabilité

Expérience aléatoire et événements

Définition 2.1.1.

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.[12]

Exemple 2.1.1.

1. « Lancer un dé et noter le résultat obtenu » est une expérience aléatoire comportant 6 résultats ou issues ; l'ensemble Ω de toutes les issues est dans cet exemple $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
2. On mesure la durée du bon fonctionnement d'un dispositif technique choisi au hasard parmi un grand nombre de dispositifs identiques.
3. On lance trois fois de suite la même pièce de monnaie. Si l'on désigne par P la sortie du côté "pile" et par F la sortie du côté "face", on peut distinguer huit cas possibles :

$$PPP, PPF, PFP, \cdots, FFF.$$

Définition 2.1.2.

Événement, événements « A ou B », « A et B » et complémentaire.

Langage des évènements	Langage des ensembles	Notations	Exemples avec le jet d'un dé
A est un évènement	A est une partie de E	$A \subset E$	A obtenir un nombre pair $A = \{2, 4, 6\}$
C'est l'évènement « A ou B »	C'est la réunion de « A et B »	$C = A \cup B$	A obtenir 5, B : obtenir 2,4,5 ou 6 , C : obtenir $\{2, 4, 5, 6\}$
E est l'évènement « A et D »	E est l'intersection de A et D	$E = A \cap D$	D : obtenir multiple de 3,$E = \{6\}$
A et F Sont des évènements complémentaires	A et F sont complémentaires	$E = \bar{A}$	A : obtenir un nombre pair. F : obtenir un nombre impair.

2.1.2 Univers des possibles

Définition 2.1.3.
On représente le résultat de cette expérience comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. On appelle l'ensemble Ω l'espace des éventualités, ou l'univers des possibles.[12]
Un événement aléatoire (ou plus simplement un événement) est une assertion ou proposition logique relative au résultat de l'expérience (par exemple, la somme des points est paire). On dira qu'un événement est réalisé ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'expérience accomplie. Donc, à un événement, on peut associer la partie de Ω constituée de tous les résultats réalisant l'événement. Nous décidons :

Définition 2.1.4.
Un événement A est une partie de Ω, c'est-à-dire $A \in P(\Omega)$.
Si l'événement est réduit à un seul élément, on parle d'événement élémentaire.[12]

2.1.3 Terminologie des événements aléatoires

1. Un évènement A est certain si $A \neq \phi$.
2. Un évènement A est impossible si $A = \phi$.
3. $\bar{A}$ est l'évènement contraire d'un évènement A si $\bar{A} = \Omega/A$.
   $\bar{A}$ Est réalisé si A ne l'est pas, et réciproquement : $\omega \in \bar{A}$ si et seulement si $\omega \notin A$.
4. Deux évènement A_1 et A_2 sont incompatibles si $A_1 \cap A_2 = \phi$.

2.2 Espace probabilisable

Définition 2.2.1.

On appelle espace probabilisable une paire (Ω, τ) dans laquelle Ω est un ensemble quelconque et τ une collection de sous-ensembles de Ω appelée tribu (on dit tribu d'événements) qui répond par définition aux contraintes (axiomes) suivantes :

1. $\Omega \in \tau$.
2. Si $E \in \tau$ alors $\bar{E} \in \tau$ ou $\bar{E}$ désigne le complément de E dans Ω.
3. Si $E \in \tau$ alors $E \cup F \in \tau$.
4. Pour toute famille d'événements $E_i,\ i \in I$ où Iest un ensemble dénombrable d'indices

$$\bigcup_i E_i \in \tau.$$

2.2.1 Espace probabilisé (Ω, E, P)

Définition 2.2.2.

Soit (Ω, ζ) un espace probabilisable. Une probabilité est une application P réelle définie sur ζ vérifiant les trois axiomes suivant appelés axiomes de KOLMOGOROV.[12]

1. $p : \zeta \to \mathbb{R}^+$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pour toute suite finie ou dénombrable d'évènements deux a deux incompatibles

$$P\Big(\bigcup_{n\in I} A_n\Big) = \sum_{n\in I} P(A_n).$$

Définition 2.2.3.

Un espace probabilisé est la donnée d'un triplet (Ω, E, P) avec

- (Ω, E) un espace probabilisable.
- P une probabilité sur E.[12]

2.2.2 Propriétés élémentaires

On a les propriétés suivantes pour tout $(A, B) \in \xi^2$:

1. $P(\Omega) = 1, \quad P(\phi) = 0$.
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(A) \in [0, 1]$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Si $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.

Preuve 1. 1. Comme $\Omega = A \cup \bar{A}$ et $A \cap \bar{A} = \phi$.

On a alors $P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$.

2. On sait que $\bar{\Omega} = \phi$, donc on a $P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.
3. On a $\phi \subset A \subset \Omega$, alors $P(\phi) \leq P(A) \leq P(\Omega)$.

   Or $P(\phi) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

   Donc pour tout événement A de Ω, on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
4. $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$ et $(A \cap \bar{B}) \cap B = \phi$, donc :

   $$P(A \cup B) = p(A \cap \bar{B}) + P(B).$$

   Or $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

   D'où $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$. Ainsi :

   $$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

   D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2.2.3 Probabilité uniforme

Définition 2.2.4.

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité. Les éléments de Ω (fini) sont dits équiprobables ou bien la probabilité p est dite uniforme sur si :

- $\forall \omega \in \Omega,\ P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.

Où Ω désigne le cardinal de l'ensemble Ω.[12]

Proposition 2.2.1.

L'lorsqu'il y a équiprobabilité des éléments de Ω la probabilité d'un événement A est simplement donnée par :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

En d'autres termes, la probabilité de A est alors donnée par le quotient du nombre de cas favorables (le nombre de cas où l'évènement A est réalisé) par le nombre de cas total (le nombre des éléments de Ω).[12]

2.2.4 Systèmes complets d'événements

Définition 2.2.5.

[12], Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé au plus dénombrable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^N$ est un système complet d'événement si :

1. Les événements $(A_n)_{n\in N}$ sont deux à deux disjoints.
2. $$\bigcup_{0}^{+\infty} A_n = \Omega.[12]$$

Proposition 2.2.2.

Soient (Ω, A, P) un espace probabilité, $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ une suite d'éléments de A, alors :

$$P(\bigcup_{k\geq 1} A_k) \leq \sum_{1}^{+\infty} P(A_k).[7]$$

Une probabilité possède aussi une propriété qui ressemble à la continuité d'une fonction et qui nous sera utile pour la suite :

Proposition 2.2.3.

Soient (Ω, A, P) un espace probabilité

- Si $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite croissante d'éléments de A alors :

$$P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

- Si $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite croissante d'éléments de A alors :

$$P(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).[12]$$

2.2.5 Théorème de probabilité totale

Soit $\{B, i \in I\}$ **un système complet** d'événements, alors :

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A \cap B_i).[10]$$

Pour la preuve elle découle directement des axiomes de Kolmogorov.

2.2.6 Équiprobabilité

Un cas particulier important est le cas d'équiprobabilité quand Ω est de cardinal fini. On dit qu'il y a équiprobabilité dans le cas où les événements élémentaires ont tous la même probabilité.
On a alors les résultats suivants, si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$.
Et plus généralement $\forall i \in [1, n], \quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$.

$$\forall A \in \zeta,\ P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}.$$

Remarque 2.2.1.
Le calcul des probabilités peut, alors, se ramener à des calculs de dénombrement, il faut déterminer le cardinal d'ensembles.[12]

2.3 Lois de probabilités conditionnelles, indépendance

Définition 2.3.1.
Le but de ce paragraphe est de modéliser ce que l'on entend par :
- deux événements sont indépendants.
- la réalisation d'un événement conditionne la réalisation d'un autre.

La notion de probabilité conditionnelle peut être nécessaire à chaque fois que pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, on dispose d'une information partielle. Si on sait que l'événement A est réalisé, pour que l'événement B se réalise, on est amené à regarder l'événement $A \cap B$, puis à normaliser.[12] Nous prenons la propriété-définition suivante :

Définition 2.3.2 (Probabilité conditionnelle)**.**

Soit (Ω, ζ, P) un espace probabilisé et A un évènement possible ($P(A) \neq 0$), l'application

$$P_A : \begin{cases} \zeta \to [0,1] \\ B \to P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}. \end{cases}$$

Est une probabilité sur (Ω, ζ) appelée probabilité conditionnelle sachant A.

Remarque 2.3.1.

- $P_A(B)$ peut se lire aussi "probabilité de B quand A" ou "probabilité de B si A" ou probabilité de B sachant A.

- Une autre notation est souvent utilisée : $P(B|A)$. Elle a l'inconvénient que \$B|A$" n'est pas un événement et que P est définie pour une partie de Ω ; mais cette notation a l'avantage d'être "parlante". Dans la suite de ce polycopié, on utilisera dorénavant cette notation.

- Il sera nécessaire d'étendre ultérieurement la notion de probabilité conditionnelle lorsque A est de probabilité nulle.

- Une conséquence immédiate de la définition est la formule des probabilités composées

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

C'est souvent sous cette forme que sera utilisé le conditionnement, ainsi que sous sa forme généralisée.[12]

Proposition 2.3.1.

Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des évènements d'un espace probabilisé vérifiant

$$P(A_1 \cap A_2, \cdots, A_{n-1}) \neq 0.$$

Alors on a :

$$P(A_1 \cap A_2, \cdots, A_n) = P(A_1)P(A_1/A_2) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Proposition 2.3.2 ((Formule des probabilités totales))**.**
Soient (Ω, ξ, P) un espace probabilisé et $\{A_i\}$ un système complet d'évènements tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout évènement B on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i) = P(A_i)P(B/A_i) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n).$$

Preuve 2.

$$P(B) = P(B \cap A_i) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

et, en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient le résultat énoncé.

Exemple 2.3.1.
Trois usines fabriquent des pièces de même nature. Dans l'usine $A, 1\%$ des pièces sont défectueuses, dans l'usine $B, 10\%$ des pièces sont défectueuses et dans l'usine $C, 3\%$ des pièces sont défectueuses. On mélange en proportions égales, les productions en provenance de chacune des trois usines et l'on en tire une pièce au hasard. L'espace Ω est formé des pièces, c'est un ensemble fini, il est acceptable de supposer qu'il y a équiprobabilité.
Introduisons les événements suivants :

- D : : la pièce tirée est défectueuse.
- A_1 : la pièce provient de l'usine A.
- A_2 : la pièce provient de l'usine B.
- A_3 : la pièce provient de l'usine C.

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3}$.
$P(D/A_1) = \dfrac{1}{100}, \quad P(D/A_2) = \dfrac{1}{10}, \quad P(D/A_3) = \dfrac{3}{100}$.
D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse est :

$$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) = \frac{7}{150}$$

Evènements indépendants

Définition 2.3.3.

Deux évènements A et B liés à une expérience aléatoire dont lespace des évènements est ; tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$; sont dites indépendants si :

$$P(A/B) = P(A).$$

Remarque 2.3.2.

La condition $P(A/B) = P(A)$ entraine que $P(B/A) = P(B)$; et donc l'indépendance entre deux évènements signifie que la réalisation de l'un n'influe pas sur la probabilité de la réalisation de l'autre.[8]

Preuve 3.

On a A et B sont indépendants,

$$\begin{aligned} P(A/B) = P(A) &\Longleftrightarrow P(A \cap B)/P(B) = P(A) \\ &\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B). \end{aligned}$$

Proposition 2.3.3.

Soit A et B deux évènements, alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. A et B sont indépendants.
2. A et $\bar{B}$ sont indépendants.
3. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.[12]

Preuve 4.

Exo TD.

Définition 2.3.4.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est une famille d'événements mutuellement indépendants si , pour tous ensemble d'indices K fini et dans I ; la famille $(A_i)_{i\in K}$ forme une famille d'événements indépendants.[3]

2.4 Indépendance (stochastique)

Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité de B, autrement dit si

$$P(B/A) = P(B)$$
$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Définition 2.4.1.

Soient A et B deux événements appartenant à la même algèbre E, on dit que A et B sont deux événements (stochastiquement) indépendants pour la probabilité P si

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

Remarque 2.4.1.

Cette condition est beaucoup plus forte que l'indépendance deux à deux, comme le montre l'exemple suivant.[9]

Exemple 2.4.1. Du jet de deux dés, montrons que le fait que trois événements A, B, C soient deux à deux indépendants n'implique pas que l'on ait

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

ni vice versa, le fait que l'égalité précédente se trouve vérifiée n'implique pas que les trois événements soient deux à deux indépendants. Ici, $\Omega = \{(1,1),(1,2),\cdots,(6,5),(6,6)\}$, et il y a équiprobabilité. Soient i et j étant deux nombres entiers compris entre 1 et 6, on a :
Considérons maintenant les trois événement suivants :

$$A: \text{"}i \text{ est pair"}, \quad B: \text{"}j \text{ est impair"}, \quad C: \text{"}i+j \text{ est pair"},$$

On vérifie aisément (en comptant) que : $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.
D'autre part, on a :

- $A \cap B$: "i est pair, j est impair".
- $B \cap C$: "i est impair, j est impair".
- $A \cap C$: "i est pair, j est pair".

et $P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$.
De méme $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ et $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$. On a conclut que pris deux à deux les événements A, B, C sont indépendants (pour la probabilité P). Cependant

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Considérons maintenant l'événement

$$D = \text{"}1 < i \cdot j \leq 3\text{"} = \{(1,2),(2,1),(3,1),(1,3)\}$$

où i, j représente le produit des indices i et j. On a $P(D)\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. D'autre part ,

$$A \cap B \cap D = \{(2,1)\} \Longrightarrow P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(D).$$

Cependant

$$B \cap D = \{(2,1),(3,1),(1,3)\} \text{ et } P(B \cap D) = \frac{1}{12} \neq P(B) \cdot P(D).$$

Les événements B et D ne sont pas indépendants.

2.4.1 Formules de Bayes

Ces formules ont pour but d'exprimer $P(A|B)$ en fonction de $P(B|A)$. Étant donnés deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Ce qui donne la première formule de Bayes

Proposition 2.4.1 (Formule de Bayes)**.**

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}$$

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Proposition 2.4.2 (Deuxième formule de Bayes)**.**

Soit A_i un système complet d'événements tous de probabilité non nulle, pour tout événement B de probabilité non nulle,[12] on a :

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}$$

Preuve 5.

Soit $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, alors :

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}$$

En utilisant le Théorème des probabilités totales, on trouve :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Ainsi

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B/A_j)}$$

Exemple 2.4.2.

Reprenons l'exemple précèdent On tire au hasard une pièce, qui se trouve être défectueuse. La probabilité que cette pièce ait été fabriquée par l'usine A vaut $P(A_1/D)$. Selon la formule de Bayes

$$P(A_1/D) = \frac{P(A_1)P(D/A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(A_j) \cdot P(D/A_j)} = \frac{1}{14}.$$

Exercice :

Mal de tête En cas de migraine, trois personnes sur cinq prennent un traitement A et deux sur cinq prennent un médicament alternatif B. Avec le médicament A, 75% des migraineux sont soulagés, contre 90% avec le médicament B. On note simple A, B, S, les évènements "prendre le médicament A", "prendre le médicament B", "être soulagé". L'énoncé fournit les informations suivantes :

$$P(A) = 3/5, P(B) = 2/5P(S|A) = 75/100, P(S|B) = 90/100.$$

1. Quelle est la probabilité de prendre le médicament B et d'être soulagé ?.
2. Quel est le taux global de personnes soulagées ?.
3. Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris le médicament A sachant qu'il est soulagé ?.

Solution 7

1. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :
$$P(B \cap S) = P(S|B)P(B) = 90/100 \times 2/5 = 9/25.$$
2. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) = 75/100 \times 3/5 + 90/100 \times 2/5 = 81/100.$$
3. D'après la formule d'inversion du conditionnement, on a :
$$P(A|S) = P(S|A)P(A)P(S) = 75/100 \times 3/5 \times 100/81 = 15/27.$$

Exercice :

Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notes $T1$ et $T2$. On prélève au hasard une lentille dans la production.

On désigné par A l'évènement : "la lentille présente un défaut pour le traitement $T1$".

On désigne par B l'évènement : "la lentille présente un défaut pour le traitement $T2$". Une étude a montré que :

• La probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement $T1$ est $P(A) = 0,10$.

• la probabilité qu'une lentille présente un d´défaut pour le traitement $T2$ est $P(B) = 0,20$.

• la probabilité qu'une lentille présente aucun des deux défauts est 0, 75.

1. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements $T1$ ou $T2$.

2. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements $T1$ et $T2$.

3. Les évènements $T1$ et $T2$ sont-ils indépendants ?.

4. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

5. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement $T2$, sachant qu'il présente un défaut pour le traitement T1.

Solution 8

1. $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,75 = 0,25.$

2. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,25 = 0,05.$

3. Non, car $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

4. L'événement "la lentille présente un défaut pour les deux traitement $T1$ et $T2$" est représenté par :

$$D = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$$

Ainsi

$P(D) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B)) = \cdots = 0,2.$

5. $P(B \setminus A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,05}{0,1} = 0,5.$

2.5 Techniques et méthodes de calcul des probabilités

• Comment calculer des probabilités sous l'hypothèse d'équiprobabilité ?.

Soit P l'équiprobabilité défini sur un univers Ω. On souhaite calculer $P(A)$ pour un évènement $A \subset \Omega$.[12]

1. Dénombrer le cardinal de Ω.

2. Dénombrer le cardinal de A.
3. Calculer $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

• Comment déterminer le cardinal d'un ensemble ?.

On rappelle trois principes :

3. Pour dénombrer une réunion disjointe de sous-ensembles, ce qui revient à considérer un cas ou bien un autre ou bien un autre, etc..., on effectue la somme des cardinaux de chaque sous-ensemble.

4. Pour dénombrer un produit cartésien d'ensembles, ce qui revient à considérer un cas puis un autre puis un autre, etc..., on effectue le 3.

produit des cardinaux de chaque ensemble.

5. Parfois il est plus facile de dénombrer le complémentaire d'un ensemble.

Par exemple, si $A \subset B$ et que l'on connait $card(B)$ et $card'(\bar{A})$,alors :

$$card(A) = Card(B) - Card(\bar{A}).$$

On se ramène à un des deux cas suivants :

2.5.1 Tirages de p éléments parmi n

Tirage	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec remise	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

2.5.2 Rangement de p objets dans n cases

Objets	Discernables	Indiscernables
Un seul dans chaque case	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Eventuellement plusieurs dans chaque case	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

• Comment calculer des probabilités conditionnelles ?.

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω. On cherche a calculer la probabilité de A sachant B et $P(A/B)$

- Utiliser la définition $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- Vérifier si le texte fournit cette information en langage commun ou non.

Si on connait $P(B/A)$ et $P(B/\bar{A})$ alors :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P((A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B))} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)}$$
$$= \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(A)\cdot P(B/A)+P(\bar{A})\cdot P(B/\bar{A})}$$

• Comment vérifier que deux évènements sont indépendants pour une probabilité ?.

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω.

1. Déterminer l'évènement représenté par $A\cap B$ et calculer $P(A\cap B)$. Calculer $P(A)\times P(B)$.
2. Les deux évènements sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.

• Comment calculer la probabilité d'une conjonction de deux évènements ?.

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω. On cherche à calculer la probabilité de $P(A\cap B)$. • On sait que A et B sont indépendants pour la probabilité P .Utiliser la formule :

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B).$$

• On ignore si A et B sont indépendants pour la probabilité P, alors : ⋆ Si $P(A)\neq 0$ et $P(B/A)$ est connue utiliser la formule :

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A).$$

⋆ Si $P(B)\neq 0$ et $P(A/B)$ est connue utiliser la formule :

$$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A/B).$$

⋆ Si $P(A\cup B)$ est connue utiliser la formule :

$$P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

⋆ Si $P(\overline{A\cap B})$ ou $P(\bar{A}\cup\bar{B})$ ou $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ sont connues , exprimer $A\cap B$ en fonction $\overline{A\cap B}$ ou $\bar{A}\cup\bar{B}$ ou $\bar{A}\cap\bar{B}$ et utiliser les formules de probabilités classique par exemple on obtient les expressions suivantes :

∘ $P(A\cap B) = 1-P(\overline{A\cap B})$.

∘ $P(A\cap B) = 1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$.

∘ $P(A\cap B) = 1-P(\bar{A})-P(\bar{B})+P(\bar{A}\cap\bar{B})$.

Si non essayer de trouver un évènement E de probabilité connue, incompatible avec $A \cap B$ telle que $(A \cap B) \cup E$ forment un évènement de probabilité connue, et utiliser la formule :

$$P(A \cap B) = P((A \cap B) \cup E) - P(E).$$

Série n=02 (Introduction au calcul des probabilités)

- **Exercice 1**(Corrigé) :

Soit $a = P(A),\ b = P(B)$ et $c = P(A\ B)$.

1. Exprimer

$$P(\bar{A}), P(\bar{A}\cup B), P(\bar{A}\cap B), P(\bar{A}\cup\bar{B}) \text{ en fonction de } a, b \text{ et } c.$$

2. Montrer que :

$$\begin{aligned} P(A\cap B) - P(A)P(B) &= P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A}\cap B) \\ &= P(A)P(\bar{B}) - P(A\cap\bar{B}). \end{aligned}$$

3. Montrer la formule suivante :

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

- **Exercice 2**(Corrigé) :

Un atelier comporte 3 machines A, B et C.

Les probabilités s de défaillance sont respectivement

$$P(A) = 0,1;\ P(B) = 0,2;\ P(C) = 0,3.$$

- Quelle est la probabilité d'avoir une machine en panne ?.

- **Exercice 3**(Corrigé) :

Une boite A contient 1 boule blanche et 3 boules rouge.

Une boite B contient 5 boules blanches et 3 boules rouges.

On tire au hasard une boule de A et une boule de B, puis on les change de boite.

(a) Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange la boite A ne contienne que des boules rouges ?.

(b) Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange chaque boite ait retrouve, en nombre de boules de chaque couleur, sa composition initiale.

- **Exercice 4**(Corrigé) :

On considère les différentes répartitions possibles des sexes des n enfants d'une famille.

Soit l'ensemble des états et soient les évènements :

H : "'la famille a des enfants des 2 sexes".

F : "la famille a au plus une fille".

(a) Décrire ; calculer $P(H), P(F)$ et $P(H - F)$.

(b) H et F sont-ils indépendants ? (on considérera $n = 2,\ n = 3$ puis n quelconque).

- **Exercice 5**(Corrigé) :

On prend 5 cartes au hasard dans un jeu de 32.

(a) Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes de hauteurs différentes ?.

(b) Quelle est la probabilité d'avoir un full ? (c'est-'a-dire 2 cartes d'une m me hauteur et les 3 autres cartes d ?une autre m me hauteur).

- **Exercice 6**(Corrigé) :

Dans un jeu de 32 cartes, on a remplacé une autre carte que l'as de pique par un autre as de pique. Une personne prend au hasard 3 cartes du jeu.

- Quelle est la probabilité qu'elle s'aperçoive de la supercherie ?.

- **Exercice 7**(Corrigé) :

On lance 4 dés et on considère les éléments $\{Ai\},\ i\{1, 2, 3, 4\}$ associés au nombre de faces distinctes obtenues.

- Calculer les $P(A_i)$.

- **Exercice 8**(Corrigé) :

10 livres discernables sont ranges sur une étagère.

- Quelle est la probabilité pour que 3 livres donnés soient placés l'un à côté de l'autre ?.

- **Exercice 9**(Corrigé) :

On a mélange 10 paires de chaussettes et on choisit au hasard 4 chaussettes.

- Quelle est la probabilité d'obtenir :

(a) 2 paires ?.

(b) au moins une paire ?.

(c) exactement une paire ?.

- **Exercice 10**(Corrigé) :

Un domino porte 2 nombres de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, éventuellement identiques.

(a) Combien y-a-t-il de dominos dans un jeu ?.

(b) Quelle est la probabilité que 2 dominos tirés au hasard soient compatibles ?.

(c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un double parmi 5 dominos tirés au hasard ?.

- **Exercice 11**(Corrigé) :

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 3 fois de suite une boule avec remise.

- Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre :

(a) strictement croissant ?.

(b) croissant au sens large ?.

- **Exercice 12**(Corrigé) :

On compose au hasard un numéro de téléphone à 8 chiffres.

- Quelle est la probabilité que :

(a) tous les chiffres soient distincts ?.

(b) le produit des chiffres soit divisible par 2 ? Par 3 ?.

(c) les chiffres forment une suite strictement croissante ?.

- **Exercice 13**(Corrigé) :

Un ascenseur prend 6 personnes au rez-de-chaussée d ?un immeuble de 8 étages.Quelle est la probabilité que :

(a) 2 personnes descendent au m me étage, les autres descendent chacune a des étages différents et différents du précédent ?.

(b) 1 personne descende à un étage, 2 à un autre et 3 à un autre ?.

- **Exercice 14**(Corrigé) :

Un sac contient 10 billes : x blanches et les autres rouges ($x \in \{2, \cdots, 8\}$).

(a) Calculer la probabilité pour que, en tirant simultanément 2 billes du sac, celles-ci soient les 2 de m me couleur.

(b) Quel doit être le nombre x pour que cette probabilité soit minimale et quel est ce minimum ?.

Solution de la série n=02

• **Exercice 1 :**Énoncé.

Soit $a = P(A),\ b = P(B)$ et $c = P(A\ B)$.

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - a.$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup B) &= P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(\bar{A})\hat{\mathrm{I}} + P(A \cap B) \\ &= 1 - a + c. \end{aligned}$$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A \backslash B) = P(A \cup \bar{B}) = 1 - b + c.$

On a

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \Longrightarrow P(A \cap \bar{B}) = a - c.$$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - c.$

2. Montrer que :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &= P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A)P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}). \end{aligned}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A} \cap B) &= (1 - P(A))P(B) - (P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B) \\ &= P(A)P(\bar{B}) - P(A` \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

de méme les autres égalités.

3. Voir le cours.

• **Exercice 2 :**Énoncé.

Soit

E : au moins une machine est en panne.

$\bar{E}$: aucun machine est en panne.

$\bar{E} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

Les machines fonctionnes indépendants, donc $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ sont indépendants.

$$\begin{aligned}
P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) &= P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) \\
&= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) \\
&= (1 - 0,1)(1 - 0,2)(1 - 0,3) \\
&= 0,504. \\
P(E) &= 1 - [(1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C))] \\
&= 0,496.
\end{aligned}$$

• **Exercice 3 :**Énoncé.

(a) Pour que après l'échange il ni y'ait que des boules rouges dans A, il faut tirer dans A la boule blanche (A_b) et dans B la boule rouge (B_r).

$$P(A_b) = 1/4; P(B_r) = 3/8$$

Les deux tirages sont indépendants :

$$P(A_b \cap B_r) = P(A_b) \cdot P(B_r) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}.$$

(b) Pour qui après l'échange, il fait retrouvé sa composition initiale.

Tirer dans A et dans B de boule de méme couleur, donc soit $A_b \cap B_b$ soit $A_r \cap B_r$.

$$P = P[(A_b \cap B_b) \cup (A_r \cap B_r)] = P(A_b \cap B_b) + P(A_r \cap B_r)$$

Les tirages sont indépendants.

$$P(A_b \cap B_b) = P(A_b)P(B_b) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$$

$$P(A_r \cap B_r) = P(A_r)P(B_r) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{32}$$

Donc

$$P = \frac{5}{32} + \frac{9}{32} = \frac{7}{16}.$$

• **Exercice 4 :** Énoncé.

Ω= L'ensemble des n-replets fermé des F et des G pour chaque enfant.

On a 2 choix $|\Omega| = 2^n$.

Montrons que :

H= La famille à des enfants des 2 sexes.

$\bar{H}$= $\{(f, \cdots, f), (G, \cdots, G)\}$.

$|\bar{H}| = 2$ or $|H| = |\Omega| - |\bar{H}| = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1) \Longrightarrow P(H) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Soit F l'évenement.

F= La famille à au plus une fille. Tel que :

$$F = \{(f, G, \cdots, G, f;\ G, f, G, \cdots, G), \cdots, (G, \cdots, G, f)\}$$

On a $|F \cap H| = n,\ P(F \cap H) = \frac{n}{2^n}$, donc :

$$\begin{aligned} P(F \cap H) - P(H)P(F) &= \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left[n - (n-1) + \frac{n+1}{2^{n-1}}\right] \end{aligned}$$

H et F sont indépendants ssi $n + 1 = 2^{n-1}$.

Pour $n = 2,\ n + 1 = 3,\ 2^1 = 2$, il n'y a pas d'indépendances.

Pour $n = 3,\ n + 1 = 4,\ 2^2 = 4$, on a indépendances.

Pour $n = 4,\ n + 1 = 5,\ 2^3 = 8$, il n'y a pas d'indépendances.

Par récurrence, si $n + 1 < 2^2 \Longrightarrow 2^{n+1} = 2 \times 2 > 2(n + 1) = 2n + 1 > n + 2$.

Pour $n > 1$ il n'y a pas indépendance avec n.

il n'y a pas non plus indépendance avec $n + 1$.

Donc H et F sont indépendants seulement pour $n = 3$.

• **Exercice 5 :**Énoncé.

(a) Il ya C_{32}^5 maniérés de choisir 5 cartes parmis 32.

Il ya 8 d'autres différents, on choisit les 5 hauteur pics dans chaque hauteur, on a 4 cartes possibles. Donc :

$$P_1 = \frac{C_8^5 \cdot 4^5}{C_{32}^5} = 0,507.$$

(b) On choisit la hauteur des brelan ($C_8^1 = 8$ choix) puis les 3 cartes qui le comporte permise 4 ($C_4^3 = 4$ choix).

On cherche pute la hauteur de la paice (il ne reste que 7 possible) puis le 32 cartes qui comportes et ($C_4^2 = 6$ choix).

On a alors

$$P_2 = \frac{8 \times 4 \times 7 \times 6}{C_{32}^5} = 0,012.$$

• **Exercice 6 :**Énoncé.

Il ya C_{32}^3 maniérs de choisir 3 cartes parmis 32 (l'ordre n'est pas important) d'où $|\Omega| = C_{32}^3$.

Pour l'aperçoive de la superchéue. il faut tirer les 2 cas de piques du paquet et une carte parmis

$$P = \frac{30}{C_{32}^3} = \frac{30 \times 6}{32 \times 31 \times 30} = 0.0060.$$

• **Exercice 7 :**Énoncé.

On a $|\Omega| = 6^4$.

Soit :

A_1= On obtient 1 seule face, on a 6 choix pour cette face. Donc :

$$P(A_1) = \frac{6}{64} = \frac{1}{63} = 4,03 \times 10^{-3}.$$

A_4= On obtient 4 faces différents.

On a A_6^4 choix pour ces faces

$$P(A_4) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{64} = 0,278.$$

A_3= On obtient 3 faces différentes.

On choisit les 2 dés qu'ont la meme façe $C_4^2 = 6$. puis cette faces 6 (6 choix), il reste 5 faces pour la 3^{eme} et 4 pour la 4^{eme} dé :

$$P(A_3) = \frac{6 \times 6 \times 5 \times 4}{6^4} = 0,556.$$

$$P(A_2) = \frac{6 \times 3 \times 5 + 4 \times 6 \times 5}{6^4} = 0,162.$$

• **Exercice 8 :**Énoncé.

On a :

$$P = \frac{3! \times 8!}{10!} = 0,07.$$

• **Exercice 9 :**Énoncé.

On a : $|\Omega| = C_{20}^4 = 15 \times 17 \times 19$.

(a) 2 paires, A_1, $|A_1| = C_5^2 = 45$. Donc $P(A_1) = \dfrac{C_5^2}{C_{20}^4}$.

(b) Pour ne pas avoir de paire, ul faut choisir 4 paires pour $10 \backslash C_{10}^4$ et chaque paire on a 2 charsettes $C_{10}^4 \times 2^4 = 40 \times 16$ façon de ne pas avoir le paire

$$P_2 = 1 - \frac{C_{20}^4 \times 2^4}{C_{20}^4} = 0,306.$$

• **Exercice 10 :**Énoncé.

(a) Les dominos soient composés de 2 cotés chacun manqué de 0 à 6 paire.
Il ya donc 7 doubles et $\dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ dominos dont les 2 cotés sont différentes sont un total de 28 dominos.

(b) On a $C_{28}^2 = 27 \times 14$ choix possibles de 2 dominos pour que 2 dominos sont compalibles, il faut qu'ils aient numéro en connu, on choisit numéro en commencer (7 choix)puis on choisit 2 dominos parmis les 7 qui comportent 6 numéros.
Soit $C_7^2 = 21$ choix possible

$$P_2 = \frac{7 \times C_7^2}{C_{28}^2} = 0,39.$$

(c) On tirer 5 dominos ceci $|\Omega| = C_{28}^5$.
Pour ne pouvoir le double il faut choisir les 5 dominos parmis les 2 dont les 2 cotés sont différents (C_{21}^5 choix)

$$P_3 = 1 - \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = 0,79.$$

• **Exercice 11 :**Énoncé.

Un résultat est ici un triplet formé de numéros de 1 à 10.

On fait de tirage sucéssufave remise donc $|\Omega| = 10^3$.

(a) Les 3 nombres sont tous distanctes donc on a :

$$C_{10}^3 = 120 \text{ façons de le choisir}$$
$$P_1 - \frac{120}{10^3} = 0,12.$$

(b) Il faut ajouter au cas précédent les cas où plusieurs nombres sont égaux avec 3 nombres égaux.

On a 10 choix et avec 2 nombres égaux. Le résultat possibles sont de la façons (x, y, z) avec $x < y$, on a $2 \times C_{10}^2 = 90$ choix, donc :

$$P_2 = \frac{120 + 10 + 90}{1000} = 0,22.$$

• **Exercice 12 :**Énoncé.

Les résultats ici un soit des 8 chiffres des $(0, \cdots, 9)$

$$|\Omega| = 10^8.$$

(a) On a A_{10}^8 numéros de les chiffres sont distinctes

$$P_1 = \frac{A_{10}^8}{10^8} = 0,018.$$

(b) Si l'un au moins des chiffres que le compose est divisible par 2.

Il est plus simple de considécés l'évenement contraire aucun chiffre divisible sur 2.

C.à.d tous les différences discrets $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$P_2 = 1 - \frac{5^8}{10^8} = 0,996.$$

(b) Par 3, on a $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$$P_2^1 = 1 - \frac{6^8}{10^8} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8.$$

(c) Une suite croissante si les chiffres sont distincts C_{10}^8 choix et il n'y a alors qu'un ordre possible $P_3 = \dfrac{C_{10}^8}{10^8}$.

- **Exercice 13 :**Énoncé.

On a $|\Omega| = 8^6$.

(a) On choisit les 2 personnes qui descendent au méme étage $C_6^2 = 15$.

Puis on choisit leur étage (8 choix) pour les étages descendent des 4 autres personnes sont A_7^4 choix.

$$P_1 = \frac{15 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{8^6} = 0,38.$$

(b) On choisit les 3 personnes qui descend au méme étage ($C_6^3 = 20$ choix).

Puis leur étage (8 choix).

Les 2 personnes qui descende ensemble $C_3^2 = 3$, puis les autres étages (7 choix).

$$P_2 = \frac{C_6^3 \times C_3^2 \times 8 \times 7 \times 6}{8^6} = 0,07.$$

- **Exercice 14 :**Énoncé.

Bibliographie

[1] L-P. Arguin (2022). A first Course in Stochastic Calculs. AMS. — AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, USA, 2022.

[2] E.Cantoni, P. Huber, E. Ronchetti (2006). Maîtriser l'aléatoire. Exercices résolus de probabilités et statistique. Springer-Verlag, France, Paris, 2006.

[3] H. Carrieu (2008). Probabilité. Exercices Corrigés. EDP Sciences, 2008.

[4] M. Cottrell, Ch. Duhamel et V. Genon-Catalot (1980). Exercices de Probabilités avec rappels de cours. Librairie classique Eugène Belin, 1980.

[5] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre (1999). Exercices de probabilités Licence- maitrise- école d'ingénieurs. CASSINI, PARIS, 1999.

[6] D. Foata, A. Fuchs(1998). Calcul des probabilités. Dunod, 1998.

[7] M. Lejeune (2010). Statistique. La Théorie et ses applications. Deuxième édition. — Springer, 2010.

[8] M. Loève (1978). Probability Theory II. 4th Edition. — Springer-Verlag, New York, 1978.

[9] J. Neveu (1994). Introduction aux probabilités. École Polytechnique, Paris, 1994.

[10] C. Reidcher, R. Leblanc, B. Rémillard, D. Larocque (2002). Théorie des probabilities Problèmes et Solutions. Presses de l'Université du Québec, 2002.

[11] Tortrat (1971). Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. MASSON, 1971.

[12] Saporta, Gilbert (2006). probabilités, analyse des données et statistique, 2006. Editions technip.