Chapitre 1

Rappel

Dénombrement (Analyse combinatoire)

1.1 Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire a pour but le dénombrement des dispositions que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble de cardinal fini. Plus simplement, elle cherche à déterminer comment on compte des objets ayant certaines propriétés. Pour effectuer un dénombrement, il faut connaître l'ensemble sur lequel on travaille et le type de disposition souhaité. L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie les différentes façons de sélectionner, organiser et compter des objets ou des éléments dans des ensembles finis. Elle se concentre sur l'étude des arrangements, des permutations et des combinaisons, ainsi que sur d'autres concepts liés à la structure et à la manipulation des ensembles discrets. Les domaines d'applications de cette discipline des mathématiques sont nombreux parmi eux :

1. Probabilités et statistiques.
2. Cryptographie.
3. Théorie des nombres.
4. Optimisation.
5. Jeux et puzzles.
6. Théorie des graphes.
7. Informatique et algorithmes.

8. Biologie et bioinformatique.

• **L'ensemble étudié :** il peut être formé d'éléments discernables et/ou d'éléments indiscernables.

• **Les dispositions :** elles peuvent être ordonnées ou non-ordonnées, avec ou sans répétition.

1.1.1 Arrangements avec répétition

Définition 1.1.1.

On appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n toute disposition ordonnée avec répétition éventuelle formée de p éléments pris parmi les n de E. Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est : $A_n^p = n^p$.[12]

1.1.2 Arrangements sans répétition

Définition 1.1.2.

Un arrangement sans répétition, ou tout simplement arrangement, de p éléments parmi n est toute disposition ordonnée de p éléments deux à deux distincts pris parmi les n de E.

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}[12]$$

1.1.3 Permutations sans répétition

Définition 1.1.3.

On appelle permutation sans répétition, ou simplement permutation, des n éléments de E toute disposition ordonnée sans répétition de ces éléments.

Le nombre de permutations de ces n éléments est : $P_n = n!$.[12]

1.1.4 Permutations avec répétition

Définition 1.1.4.

pour un ensemble E donnée, L'ensemble E contenant des éléments discernables et des éléments indiscernables, toute permutation de ses éléments sera forcément une permutation avec répétition.

Le nombre de permutations avec répétition des éléments de l'ensemble s'écrit :

$$P = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Il dépend des valeurs des n_i.[12]

1.1.5 Combinaisons sans répétition

Définition 1.1.5.

Une combinaison sans répétition, ou tout simplement combinaison, de p éléments parmi n est toute disposition non-ordonnée de p éléments deux à deux distincts pris parmi les n de E .

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est :

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{k!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.[12]$$

1.1.6 Combinaisons avec répétition

Définition 1.1.6.

On appelle combinaison avec répétition de p éléments parmi n toute disposition non ordonnée avec répétition éventuelle formée de p éléments pris parmi les n de E .

Le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n est :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.[12]$$

- **Rappel :**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre appelé factorielle n et noté $n!$, et le produit des n premiers entiers non nuls $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ par convention $0! = 1$.

Ce nombre croît très vite lorsque n augmente.

Par exemple : $10! = 3628800$.

Dès que n dépasse 10, on utilise la formule d'approximation de Stirling $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2np}$.

Remarque 1.1.1.

1. On peut dire aussi qu'un arrangement correspond à un tirage de k éléments un par un (et sans remise) en mémorisant l'ordre de tirage, tandis qu'une combinaison correspond à un tirage de k éléments simultanément.
2. Un arrangement de n éléments parmi n est une permutation.

1.1.7 Triangle de Pascal

Le triangle arithmétique de Pascal est le triangle dont la ligne d'indice $n (n = 0, 1, 2...)$ donne les coefficients binomiaux C_n^p pour $p = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

Ces nombres apparaissent dans le développement de $(a+b)^n$ et dans nombreux domaines en mathématiques comme l'analyse combinatoire.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Méthode de construction du triangle de Pascal

La construction de ce triangle de Pascal est simple, on part de 1 à la première ligne, par convention c'est la ligne zéro ($n = 0$). Pour avoir un terme de la ligne suivante, on prend le terme juste au-dessus, et on lui additionne celui qui est juste avant, (0 si il n'y a rien).

Mathématiquement, on applique la formule :

$$C_{n+1}^{p} = C_{n}^{p} + C_{n}^{p-1}$$

Coefficients du développement de $(a+b)^n$

Les nombres obtenus sont en fait les coefficients du développement de $(a+b)^n$.

Par exemple :

• La ligne 0 est : 1 soit le coefficient de :$(a+b)^0 = 1$.

• La ligne 1 est : $1 - 1$ soit les coefficients de : $(a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b$.

Tout commence vraiment à la ligne n°2 (la 3ème en fait) :

• La ligne 2 est : 1 - 2 - 1.

soit les coefficients de :$(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$.

• La ligne 3 est : $1 - 3 - 3 - 1$ soit les coefficients de :

$$(a+b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2 b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3.$$

• La ligne 4 est : $1 - 4 - 6 - 4 - 1$.

soit les coefficients de : $(a+b)^4 = 1 \times a^4 + 4 \times a^3 b + 6 \times a^2 b^2 + 4 \times ab^3 + 1 \times b^4$.

• La ligne 5 est : $1 - 5 - 10 - 10 - 5 - 1$ soit les coefficients de :

$$(a+b)^5 = 1 \times a^5 + 5 \times a^4 b + 10 \times a^3 b^2 + 10 \times a^2 b^3 + 5 \times ab^4 + 1 \times b^5.$$

1.1.8 Résume sur les méthodes de dénombrement

Types de tirages	Ordre	Répétition d'éléments	Dénombrement
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p $p-$ listes
Successifs sans remise	On tient compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p arrangement
Simultanés sans remise	L'ordre n'intervient pas	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	C_n^p combinaisons
Simultanés avec remise	L'ordre n'intervient pas	Un élément peut être tiré plusieurs fois	C_{n+k-1}^k combinaisons avec répétition

1.1.9 Exemples d'application

1 Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Solution 1

Notons E l'ensemble des trois entrés disponibles,$E = E_1, E_2, E_3$ ainsi $card(E) = 3$.

Notons P l'ensemble des deux plats disponibles, $P = P_1, P_2$ ainsi $card(P) = 2$.

Notons D l'ensemble des quatre desserts disponibles, $D = D_1, D_2, D_3, D_4$ ainsi $card(D) = 4$.

Un menu est constitué d'un triplet ordonné de trois éléments choisis respectivement dans E, P et D.

On effectue donc le produit cartésien de ces trois ensembles Le nombre de menus que l'on peut composer est donc est égal à

$$card(E) \times card(D) \times card(P) = 3 \times 2 \times 4 = 24.$$

.

2 Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?.

Solution 2

Cette femme peut s'habiller de $4 \times 5 \times 3 = 60$ façons.

3 A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr. . .) ?.

Solution 3

Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisi parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément alors

Il existe donc $A_{18}^3 = \dfrac{18!}{(18-3)!} = 4896$ podiums différents.

4 De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Solution 4

Un choix de 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes est un élément du produit cartésien entre :

- L'ensemble des choix simultanés de 3 hommes parmi 10, de cardinal $C_{10}^{3} = 120$.
- L'ensemble des choix simultanés de 2 femmes parmi 5, de cardinal $C_{5}^{2} = 10$.
- L'ensemble des choix de 3 femmes et hommes parmi 10 femmes et 5 hommes vaut donc $C_{10}^{3} \times C_{5}^{2} = 1200$.

5 Quel est le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$.

Solution 5

De façon générale on a :

$$(x-y)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} x^k (-y)^{10-k}.$$

Le terme de x^3y^7 est obtient pour $k = 3$.

Il apparait dans le binôme sous la forme $C_{10}^{3}x^3(-y)^{10-3} = -C_{10}^{3}x^3y^7$.

Le coefficient de x^3y^7 est -120.

6 On veut calculer

$$s = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2.$$

(1) Justifier que :

$$s = \sum_{k=0}^{k=n} (n-k)\left(C_n^k\right)^2.$$

(2) En déduire $2s$ puis calculer s.

Solution 6

(1) Posons $k = n - j$,

$$s = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2 = \sum_{j=n}^{0}(n-j)\left(C_n^{n-j}\right)^2 = \sum_{j=n}^{0}(n-j)\left(C_n^{j}\right)^2.$$

En repassant à la variable k on trouve :

$$s = \sum_{k=0}^{k=n}(n-k)\left(C_n^k\right)^2.$$

(2) En déduire $2s$:

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2 + \sum_{0}^{n}(n-k)\left(C_n^k\right)^2 \\ &= \sum_{0}^{n} k\left(C_n^k\right)^2 + (n-k)\left(C_n^k\right)^2 \\ &= \sum_{0}^{k}(k+(n-k))\left(C_n^k\right)^2 \\ &= n\sum_{0}^{k}\left(C_n^k\right)^2. \end{aligned}$$

(3) Calculer s :

$$\begin{aligned} s = \frac{1}{2}nC_n^{2n} &= \frac{1}{2}n\frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{2}n\frac{(2n-1)!2n}{n!n!} \\ &= n\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \\ &= nC_n^{2n-1}. \end{aligned}$$

Série $n = 01$ (Rappel sur l'analyse combinatoire)

- **Exercice 1**(Corrigé) :

Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

- **Exercice 2 :**(Corrigé)

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?.

- **Exercice 3 :**(Corrigé)

A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...) ?.

- **Exercice 4 :**(Corrigé)

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1) Combien de codes différents peut-on former ?.

2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?.

- **Exercice 5 :** (Corrigé)

Le groupe des étudiants de deuxième année doit s'inscrire à un concours. Il faut établir une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ? (il y a 24 étudiants dans la classe).

- **Exercice 6 :** (Corrigé)

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot **MATH** ?.

- **Exercice 7 :** (Corrigé)

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot **TABLEAU** ?.

- **Exercice 8 :**(Corrigé)

Dénombrer toutes les anagrammes possibles du mot **PRISÉE**.

1) En tenant compte de l'accent . 2) En ne tenant pas compte de l'accent sur le « e ».

- **Exercice 9 :**(Corrigé)

Un groupe de 3 étudiants de deuxième année doit aller chercher des livres au CDI. De combien de manières peut-on former ce groupe ? (il y a 24 étudiants dans la classe) .

- **Exercice 10 :** (Corrigé)

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ? .

- **Exercice 11 :**(Corrigé)

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.

1) Quel est le nombre de choix possibles ?. 2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille.

3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?.

Solution de la série n=01

• **Exercice 1 :**Énoncé.

On applique le principe fondamental de l'analyse combinatoire : Cette femme peut s'habiller de $4 \times 5 \times 3 = 60$ façons.

• **Exercice 2 :**Énoncé.

On applique le principe fondamental de l'analyse combinatoire : On peut donc composer $3 \times 2 \times 4 = 24$ menus différents.

• **Exercice 3 :**Énoncé.

Il y a $A_{18}^{3} = 4896$ distributions possibles.

• **Exercice 4 :**Énoncé.

1) Il y a $3 \times A_{3}^{6}$ codes différents.

2) Il y a $3 \times A_{3}^{5}$ codes différents .

• **Exercice 5 :**Énoncé.

Il y a P_{24} listes possibles $P_{24} = 24! = 6,2 \times 10^{23}$.

• **Exercice 6 :**Énoncé.

Il y a P_4 anagrammes du mot MATH $(P_4 = 4! = 24)$.

• **Exercice 7 :**Énoncé.

Il y a 2520 anagrammes du mot TABLEAU .

• **Exercice 8 :**Énoncé.

1) Il y a P_6 anagrammes $(P_6 = 6!)$.

2) Il y a 360 anagrammes.

• **Exercice 9 :**Énoncé.

Il y a C_{24}^{3} groupes possibles .

• **Exercice 10 :**Énoncé.

Il y a C_{8}^{2} rencontres possibles .

• **Exercice 11 :**Énoncé.

1) Il y a C_{32}^{2} choix possibles .

2) Il y a $C_{19}^{1} \times C_{13}^{1}$ choix possibles .

3) Il y a C_{19}^{2} choix possibles.

Bibliographie

[1] L-P. Arguin (2022). A first Course in Stochastic Calculs. AMS. — AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, USA, 2022.

[2] E.Cantoni, P. Huber, E. Ronchetti (2006). Maîtriser l'aléatoire. Exercices résolus de probabilités et statistique. Springer-Verlag, France, Paris, 2006.

[3] H. Carrieu (2008). Probabilité. Exercices Corrigés. EDP Sciences, 2008.

[4] M. Cottrell, Ch. Duhamel et V. Genon-Catalot (1980). Exercices de Probabilités avec rappels de cours. Librairie classique Eugène Belin, 1980.

[5] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre (1999). Exercices de probabilités Licence- maitrise- école d'ingénieurs. CASSINI, PARIS, 1999.

[6] D. Foata, A. Fuchs(1998). Calcul des probabilités. Dunod, 1998.

[7] M. Lejeune (2010). Statistique. La Théorie et ses applications. Deuxième édition. — Springer, 2010.

[8] M. Loève (1978). Probability Theory II. 4th Edition. — Springer-Verlag, New York, 1978.

[9] J. Neveu (1994). Introduction aux probabilités. École Polytechnique, Paris, 1994.

[10] C. Reidcher, R. Leblanc, B. Rémillard, D. Larocque (2002). Théorie des probabilities Problèmes et Solutions. Presses de l'Université du Québec, 2002.

[11] Tortrat (1971). Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. MASSON, 1971.

[12] Saporta, Gilbert (2006). probabilités, analyse des données et statistique, 2006. Editions technip.