كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى (جذع مشترك)

محاضرات في مقياس الرياضيات 2

<u>برنامج الدروس:</u>

I. مفاهيم عامة حول المصفوفات

II. حساب المحدد ورتبة المصفوفة

III. حساب معكوس مصفوفة

IV. حل جملة معادلات خطية

I. مفاهيم عامة على المصفوفات (العمليات الأساسية على المصفوفات):

1- تعريف المصفوفة:

مصفوفة الأعداد الحقيقية هي مجموعة من الأعداد الحقيقية مرتبة في أسطر أفقية و أعمدة عمودية محددة من الجانبين بقوسين.وتستخدم في الغالب لحل العديد من المسائل الاقتصادية المرتبطة بأنظمة المعادلات الخطية.

نرمز لها بـ $A_{m\times n}$ حيث تمثل m عدد الأسطر، و n عدد الأعمدة (m و$n \in \mathbb{N}^*$).

تكتب بشكل عام: $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$، حيث تمثل الأعداد $\{a_{ij}/i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n\}$ عناصر المصفوفة.

حالات خاصة:

- ✓ المصفوفة $A_{1\times 1}$ تمثل عدد حقيقي.
- ✓ إذا كان $m=n$، سميت المصفوفة A بالمصفوفة المربعة (matrice carrée).

  مثال: $m=n=2$: $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
- ✓ إذا كان $m\neq n$، سميت المصفوفة A بالمصفوفة المستطيلة(matrice rectangulaire).

  مثال: $m=2$ و $n=3$: $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
- ✓ إذا كان $n=1$ (عدد الأعمدة يساوي 1)، سميت المصفوفة A بالمصفوفة العمود (matrice colonne).

  مثال: $m=2$ و $n=1$: $A_{2\times 1}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- ✓ إذا كان $m=1$ (عدد الأسطر يساوي 1)، سميت المصفوفة A بالمصفوفة السطر (matrice ligne).

  مثال: $m=1$ و $n=3$: $A_{1\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2- بعض أنواع المصفوفات:

2-1- المصفوفة القطرية(matrice diagonale):

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها معدومة ماعدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي فيها ($\{a_{ij}/i=j\}$).

تكتب على الشكل التالي: $A_{m\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$، مثال: $A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

حالة خاصة: إذا كانت العناصر الواقعة على القطر الرئيسي متساوية، سميت بالمصفوفة السلمية.

مثال: $A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2-2- المصفوفة المتناظرة(matrice symétrique):

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية ($\{a_{ij}=a_{ji}\}$).

أمثلة: $A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$، $A_{3\times3}=\begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

2-3- المصفوفة المتناظرة عكسيا(matrice antisymétrique):

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية بالقيمة المطلقة و متعاكسة في الاشارة ($\{a_{ij}=-a_{ji}\}$). أمثلة: $A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$، $A_{3\times3}=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ -4 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$.

2-4- مصفوفة الوحدة(matrice unitaire):

هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي مساوية للواحد ($\{a_{ij}=1/i=j\}$) و $\{a_{ij}=0/i\neq j\}$.

و يرمزلها بـ: I_n. أمثلة: $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$، $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2-5- المصفوفة المعدومة(matrice nulle):

هي مصفوفة جميع عناصرها معدومة ($\{\forall i\,و\,j: a_{ij}=0\}$). و يرمزلها بـ: $0_{m\times n}$.

أمثلة: $0_{2\times2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ، $0_{3\times3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2-6-المصفوفة الشاذة(matrice singulière): هي مصفوفة مربعة محددها معدوم.($det(A_{m\times n})=|A_{m\times n}|=0$).

2-7- المصفوفة النظامية(matrice régulière):

هي مصفوفة مربعة محددها غير معدوم. ($det(A_{n\times n})=|A_{n\times n}|\neq0$).

2-8- منقول مصفوفة (matrice transposée):

منقول مصفوفة هي المصفوفة التي نتحصل عليها بقلب الأسطر أعمدة و الأعمدة أسطر مع المحافظة على الترتيب.

و يرمز لها بـ:A^t.أمثلة: إذا كانت $A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$فإن : $A^t_{2\times2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

إذا كانت $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$ فإن: $A^t_{3\times2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

نتائج: - منقول المصفوفة A^t هو A، أي: $(A^t)^t=A$.

-إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإن: $A=A^t$.

2-9- المصفوفة المثلثية العلوية(matrice triangulaire supérieure):

هي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة.مثال: $A_{4\times4}=\begin{pmatrix}15 & 1 & -2\\ 02 & 3 & 4\\ 00 & -1 & 3\\ 00 & 0 & 2\end{pmatrix}$

2-10- المصفوفة المثلثية السفلية(matrice triangulaire inférieure):

هي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة.مثال: $A_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3- العمليات على المصفوفات:

3-1- التساوي:

نقول أن المصفوفتان $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ (لهما نفس الدرجة) متساويتان إذا كانت عناصرهما المتقابلة متساوية، أي: $\forall i$ و j: $a_{ij} = b_{ij}$.

مثال: $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} B_{2\times2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} & -\frac{12}{3} \\ \frac{27}{9} & -\frac{10}{5} \end{pmatrix}$

3-2- الجمع و الطرح:

جمع (طرح) المصفوفتان $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ هي مصفوفة $C_{m\times n}$ عناصرها هي c_{ij}، حيث: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

إذا كان $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ و $B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ فإن: $C_{2\times3} = A_{2\times3} + B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

خواص:

- ✓ جمع المصفوفات عملية تبديلية: $A + B = B + A$.
- ✓ جمع المصفوفات عملية تجميعية: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- ✓ المصفوفة الصفرية هي عنصر حيادي في جمع المصفوفات، أي: $A + 0 = A$.

3-3- ضرب مصفوفة بعدد:

إذا ضرب عدد λ في مصفوفة $A_{m\times n}$ فإن جميع عناصر $A_{m\times n}$ تضرب في λ.

مثال: إذا كانت $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ فإن: $2.A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

3-4- ضرب مصفوفتين:

حاصل ضرب المصفوفتين $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ هي مصفوفة $C_{m\times p}$ عناصرها هي c_{ij}.

حيث: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \times b_{kj})$.

ملاحظات:- عدد أعمدة المصفوفة الأولى يجب أن يكون يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية.

- المصفوفة C تأخذ عدد أسطر المصفوفة الأولى و عدد أعمدة المصفوفة الثانية.

مثال: $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ و $B_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ فإن: $C_{2\times1} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$

حيث: $c_{11} = (2\times1) + (1\times0) + (2\times2) = 6$، و $c_{21} = (3\times1) + (5\times0) + (4\times2) = 11$.

$$C_{2\times1} = A_{2\times3} \times B_{3\times1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

خواص:

- ✓ جداء المصفوفات هو عملية غير تبديلية: $A \times B \neq B \times A$.عدا بعض الحالات كالمصفوفات القطرية.
- ✓ جداء المصفوفات –إن كان ممكنا–هو عملية تجميعية: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- ✓ جداء المصفوفات –إن كان ممكنا–هو عملية توزيعيةبالنسبة للجمع:$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.
- ✓ منقول جداء مصفوفتين يساوي جداء منقوليهما مع عكس الترتيب، أي: $(A \times B)^t = B^t \times A^t$.
- ✓ مصفوفة الوحدة هي عنصر حيادي في ضرب المصفوفات، أي: $A \times I = A$.

II- المحددات ورتبة مصفوفة:

المحدد يكون عددا وحيدا، وهذا معناه أنه قد يكون معدوم، وهذا في حالة غياب الاستقلال الخطي بين أسطر (أعمدة) المصفوفة، وتسمى المصفوفة في هذه الحالة "المصفوفة الشاذة" أو "غير المنتظمة" أو "مصفوفة غير قابلة للعكس"، و إذا كان المحدد غير معدوم فإن المصفوفة قابلة للعكس وتسمى كذلك بالمصفوفة المنتظمة.

1-محدد مصفوفة من الدرجة الثانية: إذا كانت لدينا مصفوفة من الدرجة 2، أي لها سطران وعمودان، فإن المحدد هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي ناقص حاصل ضرب عناصر القطر المعاكس، بمعنى:

$$det(A_{2\times2}) = |A_{2\times2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال: حساب محدد المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 * 5 - 3 * 2 = 20 - 6 = 14$$

2-محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة: إذا كان لدينا مصفوفة من الدرجة الثالثة، أي لها 3 أسطر و3 أعمدة فإن المحدد يحسب بعدة طرق

2-1- قاعدة "ساروس Sarrus": لتكن المصفوفة $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

أ/ حساب محدد المصفوفة حسب ساروس يكون بكتابة المصفوفة ثم إعادة كتابة العمودين الأول والثاني على يمين المصفوفة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ب/ نقوم بضرب عناصر القطر الرئيسي +حاصل ضرب العناصر الموازية للقطر+حاصل ضرب العناصر الموازية للعناصر الموازية للقطر-(نفس الشيء لكن بحاصل ضرب عناصر القطر المعاكس والعناصر الموازية له)، أي:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 2(-2)3 + 6 * 3 * 4 + 3 * 5 * 2 - 4(-2)2 - 5 * 6 * 2 - 3 * 3 * 3 =$$

$$-12 + 72 + 30 + 16 - 60 - 27 = -26$$

2-2-حساب المحدد بطريقة المصغرات:

بالرجوع إلى قاعدة ساروس فإن محدد المصفوفة الآتية هو :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \end{aligned}$$

العناصر التي بين قوسين تسمى **بالمحدد الجزئي** للعنصر a_{ij} من الدرجة $n-1$ (أي 2) ناتج عن طريق حذف السطر i و العمود j ويرمز له ب $\underline{\boldsymbol{M_{ij}}}$ (يسمى كذلك بالمصغر للعنصر a_{ij}).

أي مثلا: M_{11}: محدد جزئي ناتج عن طريق حذف السطر الأول والعمود الأول من المصفوفة A.

و M_{21}: محدد جزئي ناتج عن طريق حذف السطر الثاني والعمود الاول من المصفوفة A.

ونلاحظ أن الأطراف الثلاث تأخذ إشارة موجبة ثم سالبة وهكذا، أي $(-1)^{i+j}$ و نسمي $(-\boldsymbol{1})^{i+j}\boldsymbol{M_{ij}}$ **بالمعامل المرافق** لـa_{ij} و يرمز له بـ$\boldsymbol{C_{ij}}$، إذا العلاقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}\\ &= a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}\\ &= a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}\end{aligned}$$

هذا حسب السطر الأول، وبنفس الطريقة يمكن حساب المحدد حسب السطر الثاني فنجد:

$$\begin{aligned}|A| &= -a_{21}M_{21}+a_{22}M_{22}-a_{23}M_{23}\\ &= a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23}\end{aligned}$$

وبنفس المنهجية يمكن حسابه حسب السطر الثالث.

كما يمكن حساب المحدد حسب العمود الأول فنجد:

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}+a_{31}(-1)^{3+1}M_{31}\\ &= a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}\end{aligned}$$

وبنفس المنهجية يمكن حسابه حسب العمود الثاني والثالث.

مثال: احسب محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$ حسب السطر الثاني والعمود الأول.

- **حسب السطر الثاني:**

$$\begin{aligned}|A| &= 2(-1)^{2+1}M_{21}+2(-1)^{2+2}M_{22}+3(-1)^{2+3}M_{23}\\ &= -2M_{21}+2M_{22}-3M_{23}\end{aligned}$$

$$|A| = -2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= -2(-5)+2(-5)-3*10 = 10-10-30 = -30$$

- **حسب العمود الأول:**

$$|A| = 3(-1)^{1+1}M_{11}+2(-1)^{2+1}M_{21}+1*(-1)^{3+1}M_{31} = 3M_{11}-2M_{21}+M_{31}$$

$$|A| = 3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 3(-11)-2(-5)-7 = -30$$

3–محدد مصفوفة من الدرجة n(تعميم):

– حساب المحدد **حسب السطر i:**

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\mathrm{M_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{C_{ij}} \qquad \forall i = 1 \dots m$$

–حساب المحدد **حسب العمود j:**

$$|A| = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(-1)^{i+j}\mathrm{M_{ij}} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathrm{C_{ij}} \qquad \forall j = 1 \dots n$$

ملاحظة: يمكن استخدام أي صف أو أي عمود لحساب المحدد و سنتحصل على نفس النتيجة، لكن يُفضَّل اختيار الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من العناصر المعدومة لتسهيل العمل الحسابي.

مثال:(محدد مصفوفة من الدرجة الرابعة): $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

نختار العمود الثاني:

$$|A| = a_{12} * C_{12} + a_{22} * C_{22} + a_{32} * C_{32} + a_{42} * C_{42} = 2 * C_{12} + 1 * C_{22} + 0 * C_{32} + 0 * C_{42} = 2C_{12} + C_{22}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 12 + 4 - 3 - 8 - 4) = -3$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 12 - 9 - 4 - 2 = 4$$

ومنه: $|A| = 2(-3) + 4 = -2$

4- خــواص المـــحدد:

- ❖ إذا كانت جميع عناصر سطر ما (أو عمود ما) في مصفوفة ما معدومة، فإن المحدد معدوم.

مثال: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- ❖ إذا كان في المصفوفة سطران (أو عمودان) متماثلان فإن المحدد معدوم.

مثال: سطران متماثلان

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 18 - 3 - 18 + 3 - 2 = 0$$

- ❖ إذا كان لدينا سطر (أو عمود) مضاعف لسطر (أو عمود) أخر، أي يكتب من الشكل $L_i = \alpha L_{i'}$ ($C_j = \beta C_{j'}$) فإن المحدد معدوم.

مثال: عمود مضاعف لآخر $C_3 = 3C_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 + 18 + 3 - 18 + 6 = 0$$

- ❖ محدد منقول مصفوفة هو نفسه محدد المصفوفة، أي: $|A^t| = |A|$
- ❖ إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين فإن : $|AB| = |A| * |B|$
- ❖ إذا كانت المصفوفة من الشكل $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + c \end{pmatrix}$ (تطبق على كل المصفوفات المربعة):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{21} & a_{22} & b \\ a_{31} & a_{32} & c \end{vmatrix}$$

- $|A| = |A_1 A_2 \dots \dots \alpha A_j \dots \dots A_n| = \alpha |A|$ (نفس الملاحظة بالنسبة للأسطر)

مثال:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\times(-30) = -90$$

- إذا كانت A مصفوفة من الرتبة (n) فإن: $|\alpha A| = \alpha^n |A|$

مثال: $\left|2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right| = 2^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2^3 \times (-30) = -240$

- محدد مصفوفة قطرية أو مصفوفة مثلثية (علوية أو سفلية) يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي.

مثال: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 4 = 24$

5- العمليات الأولية على المحددات:

<u>أ-</u>التبديل بين سطرين (عمودين) يؤدي إلى عكس إشارة المحدد، $L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

<u>ب-</u> المحدد لا يتغير إذا قمنا بالعملية الأولية الآتية: $L_i = L_i + \alpha L_{i'}$ $(C_j = C_j + \beta C_{j'})$

أي إضافة إلى صف (عمود) توليفة خطية لباقي الصفوف (الأعمدة) لا يغير من قيمة المحدد.

<u>مثال01:</u> العمليات الأولية على الصفوف

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - 3L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 * 1(-2) = -2$$

<u>مثال02:</u> العمليات الأولية على الأعمدة

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 + C_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

6- رتـــبة مـــصفوفة (Rang):

<u>6-1- تعريف الرتبة:</u>رتبة المصفوفة هي عدد الأسطر (الأعمدة) المستقلة خطيا فيها.

حيث نقول عن مصفوفة$A_{m\times n}$ أنها ذات رتبة p $(1 \le p \le Min(m,n))$ إذا وجد على الأقل مصغر من الدرجةp غير معدوم وكان كل مصغر من الدرجة$p+1$ معدوم.

<u>6-2-حساب الرتبة عن طريق المحدد:</u>وهذا خاص بالمصفوفات المربعة $A_{n\times n}$، ونميز هنا بين حالتين:

- الحالة الأولى (إذا كان المحدد غير معدوم):فرتبة المصفوفة هي n (أي: $p = n$).
- الحالة الثانية (إذا كان المحدد معدوم): فإن الرتبة تكون$1 \leq p \leq n-1$، و للبحث عن الرتبة يجب حساب المحددات الجزئية من الرتبة $n-1$.

فإذا وجد على الأقل محدد جزئي غير معدوم فإن الرتبة هي$n-1$، أما إذا كانت كلها معدومة فإن رتبة المصفوفة تكون: $1 \leq p \leq n-2$.

و نكرر هذه العملية حتى نجد محدد جزئي (مصغر) غير معدوم.

أما إن كانت كل المحددات الجزئية عند كل الدرجات معدومة فإن الرتبة هي 1.

ملاحظة: إذا كانت المصفوفة ذات درجة أكبر من 4 وكان محددها معدوم فإن حساب كل المحددات الجزئية يستغرق وقتا كبيرا (المصفوفة من الرتبة 4 لها 16 مصغر)، لذا فإن طريقة التقليص تعتبر أفضل طريقة لتحديد الرتبة.

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ ماهي رتبة المصفوفة؟

أولا–نحسب المحدد:

بدون حساب يمكن ملاحظة أن $c_2 = 2c_1$ ومنه المحدد معدوم، ومنه رتبة المصفوفة تكون$1 \leq p \leq 2$.

ثانيا– نحسب المحددات الجزئية من الدرجة 2:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

إذا: $p = 2$

6–3– حساب الرتبة عن طريق التقليص (المصفوفات المتكافئة):

تستخدم في حساب رتبة كل أنواع المصفوفات، أي المربعة وغير المربعة، ورتبة المصفوفة تساوي عدد الأسطر (الأعمدة) غير المعدومة في المصفوفة المكافئة.

ونعني بمصفوفتين متكافئتين: إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بإجراء عمليات أولية متتابعة (المذكورة أعلاه).

ونتوقف عن إجراء العمليات الأولية عند الحصول على مصفوفة مكافئة من الأشكال الآتية:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

مثال 01: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

المصفوفة غير مربعة إذا $1 \leq p \leq Min(2,3)$، نقوم بإجراء العمليات الأولية التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

إذن الرتبة هي 2.

مثال 02: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

المصفوفة غير مربعة إذا $1 \leq p \leq Min(3,4)$، نقوم بإجراء العمليات الأولية التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-2L_1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -7\\ 0 & -2 & 4 & -11\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3=L_3+2L_2}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 8 & -25\end{pmatrix}$$

إذن الرتبة هي 3.

III– حساب معكوس (مقلوب) مصفوفة (matrice inverse):

لتكن لدينا المصفوفة المربعة و النظامية ($|A_{n\times n}| \neq 0$) التالية: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

معكوس المصفوفة A هي المصفوفة B التي تحقق: $B \times A = A \times B = I$. و نرمز لها بالرمز: $B = A^{-1}$.

ملاحظة: المصفوفة العكسية إن وجدت فهي وحيدة.

1– الطريقة الأولى (طريقة المحددات):

لحساب مقلوب المصفوفة A نتبع الخطوات التالية:

أولا– حساب محدد المصفوفة: حساب $det(A_{n\times n})$.

ثانيا– إيجاد المصفوفة المرافقة: $A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$.

حيث: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (المعامل المرافق).

و M_{ij}: محدد جزئي (مصغر) للمصفوفة الناتجة عن طريق حذف السطر i والعمود j من المصفوفة A.

ثالثا– حساب منقول المصفوفة المرافقة: $(A^*)^t = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$

رابعا– إيجاد مقلوب المصفوفة: $A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{det(A)}$

مثال: حساب مقلوب المصفوفة التالية: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1– حساب قيمة المحدد حسب العمود 1:

$$det(A_{3\times3}) = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$det(A_{3\times3}) = 2 \times (6-8) - 3 \times (3+8) + 5 \times (2+4)$$
$$det(A_{3\times3}) = -4 - 33 + 30 = -7 \neq 0$$

2– إيجاد المصفوفة المرافقة:

$$A^* = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -11 & 16 & -3 \\ 6 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

3– حساب منقول المصفوفة المرافقة: $(A^*)^t = \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

4- إيجاد مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{(A^*)^t}{det(A)}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & -11 & 6\\ 1 & 16 & -10\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{6}{7}\\ -\frac{1}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{10}{7}\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

2- الطريقة الثانية (طريقة جوس Gauss):

لإيجاد معكوس مصفوفة نتبع الخطوات التالية:

أولا: نقوم بكتابة المصفوفة و مصفوفة الوحدة على شكل مصفوفة موسعة (Matrice augmentée)، كالتالي:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n1} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right)$$

ثانيا: نقوم بعمليات أولية على المصفوفة الموسعة بحيث تصبح المصفوفة A مصفوفة الوحدة، و بذلك تصبح مصفوفة الوحدة معكوس المصفوفة A.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11}{}^* & a_{12}{}^* & \cdots & a_{1n}{}^*\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21}{}^* & a_{22}{}^* & \cdots & a_{n1}{}^*\\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n1}{}^* & a_{n2}{}^* & \cdots & a_{nn}{}^*\end{array}\right)$$

حيث: $a_{ij}{}^*$ هي عناصر معكوس المصفوفة A.

أي ننطلق من المصفوفة الموسعة $(A|I)$، و بضربها في A^{-1} نتحصل على المصفوفة الموسعة $(I|A^{-1})$.

<u>مثال:</u> حساب معكوس المصفوفة التالية: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[L_1=\frac{1}{2}L_1]{}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_2=L_2-3L_1\\ L_3=L_3-5L_1}]{}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -\frac{3}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -\frac{5}{2} & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[L_2=2L_2]{}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 10 & -3 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -\frac{5}{2} & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3=L_3-\frac{3}{2}L_2]{}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 10 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3=-\frac{1}{7}L_3]{}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 10 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{array}\right)\xrightarrow[L_2=L_2-10L_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{10}{7}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{array}\right)\xrightarrow[L_1=L_1+L_3]{}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{10}{7}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{array}\right)\xrightarrow[L_1=L_1-\frac{1}{2}L_2]{}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{6}{7}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{10}{7}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

- **<u>خواص:</u>**

* $(A^{-1})^{-1}=A$ * $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$ * $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

* معكوس جداء مصفوفتين هو: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ * $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

* لإيجاد معكوس المصفوفة القطرية يكفي قلب عناصر القطر الرئيسي:
$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

IV- حل جملة معادلات خطية في الحالة التي يكون فيها عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية لـ n متغير و n معادلة كالتالي:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

نرمز بـ X لعمود المجاهيل، و بـ A لمصفوفة المعاملات، و بـ B لشعاع عمود الأعداد: b_1، b_2، ... ، b_n.

و بالتالي يمكننا كتابة جملة المعادلات الخطية السابقة على الشكل التالي:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

أي: $A_{n\times n}.X_{n\times 1}=B_{n\times 1}$

1-1- طريقة معكوس المصفوفة:

إذا كانت المصفوفة A نظامية $(|A_{n\times n}|\neq 0)$، فإنه بضرب طرفي المعادلة السابقة بمقلوب المصفوفة A (A^{-1})، فسنتحصل على حل وحيد لجملة المعادلات الخطية السابقة وفق العلاقة التالية:
$$X=A^{-1}.B$$

مثال: لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:
$$\begin{aligned} 2x_1+1x_2+-2x_3 &= 10 \\ 3x_1+2x_2+2x_3 &= 1 \\ 5x_1+4x_2+3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

لنضع:
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}، X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}، B=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

معكوس المصفوفة A محسوب سابقا: $A^{-1}=\frac{(A^*)^t}{det(A)}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

إيجاد حلول المعادلات الخطية:

$$X = A^{-1}.B = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -20-11+24 \\ 10+16-40 \\ 20-3+4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

إذن لجملة المعادلات السابقة **حل وحيد** هو: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$، أي: $x_1 = 1$، $x_2 = 2$، $x_3 = -3$.

1-2- طريقة كرامر (Cramer) (طريقة المحددات):

حلول المعادلة $A_{n\times n}.X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ (حيث $det(A) \neq 0$) حسب طريقة كرامر تكون كالتالي: $x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}$،

حيث: $j = 1,2,\dots,n$

أي: $x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}$، $x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}$، ....، $x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$.

بحيث $A_j(\,j = 1,2,\dots,n)$ هي مصفوفة نتحصل عليها بتعويض العمود j من المصفوفة A بعمود الثوابت B.

مثال لـ : $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

مثال لطريقة كرامر:

لدينا في المثال السابق:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لدينا: $det(A) = -7 \neq 0$

و $det(A_1) = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 10 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 10(-2) - 1(-5) - 2(-4) = -7$

و $det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 10 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2(-5) - 10(-1) - 2(7) = -14$

و $det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 10 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(7) + 10(2) = 21$

إذن: $x_1 = \frac{-7}{-7} = 1$، $x_2 = \frac{-14}{-7} = 2$، $x_3 = \frac{21}{-7} = -3$.

ملاحظات حول طريقة كرامر:

- إذا كان محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي الصفر $(det(A) \neq 0)$ فإن لجملة المعادلات حل وحيد.
- إذا كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي الصفر $(det(A) = 0)$ فإن لجملة المعادلات إما عدد غير منتهي من الحلول $(0.x_j = 0)$ أو لا يوجد لها حلول $(0.x_j = k)$.

1-3- طريقة جوس (Gauss):

لحل جملة معادلات خطية من الشكل $A_{n\times n}.X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ حسب طريقة جوس، نتبع الخطوات التالية:

أولا: نقوم بكتابة جملة المعادلات الخطية على شكل مصفوفة موسعة، كالتالي:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n1} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

ثانيا: نقوم بعمليات أولية على المصفوفة الموسعة بحيث نجعل المصفوفة A مصفوفة الوحدة.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1^* \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2^* \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n^* \end{array}\right)$$

ثالثا: حل جملة المعادلات الخطية $A_{n\times n}.X_{n\times 1}=B_{n\times 1}$ هي: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix}$.

أي: $x_1=b_1^*$، $x_2=b_2^*$، ....، $x_n=b_n^*$.

<u>مثال:</u>

لدينا في المثال السابق:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}، X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}، B=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

أولا: نقوم بكتابة جملة المعادلات الخطية على شكل مصفوفة موسعة، كالتالي:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

ثانيا: نقوم بعمليات أولية على المصفوفة الموسعة بحيث تصبح المصفوفة A مصفوفة الوحدة:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)\xrightarrow[\mathrm{L}_1=\frac{1}{2}\mathrm{L}_1]{}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\mathrm{L}_2=\mathrm{L}_2-3\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3=\mathrm{L}_3-5\mathrm{L}_1}]{}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -14 \\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -21 \end{array}\right)\xrightarrow[\mathrm{L}_2=2\mathrm{L}_2]{}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -21 \end{array}\right)\xrightarrow[\mathrm{L}_3=\mathrm{L}_3-\frac{3}{2}\mathrm{L}_2]{}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array}\right)\xrightarrow[\mathrm{L}_3=-\frac{1}{7}\mathrm{L}_3]{}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\xrightarrow[\mathrm{L}_2=\mathrm{L}_2-10\mathrm{L}_3]{}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\xrightarrow[\mathrm{L}_1=\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_3]{}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\xrightarrow[\mathrm{L}_1=\mathrm{L}_1-\frac{1}{2}\mathrm{L}_2]{}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

إذن لجملة المعادلات السابقة <u>حل وحيد</u> هو: $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$، أي: $x_1=1$، $x_2=2$، $x_3=-3$.