جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

السداسي الأول

المجموعات: 2 و 3 و 4

السنة الأولى جذع مشترك LMD

# رياضيات 01

## من مطبوعة :

## الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

ملخص درس : التكاملات وطرق حسابها

1. مفاهيم عامة حول التكامل
2. بعض طرق حساب التكامل
3. توسيع مفهوم التكامل
4. تمارين محلولة

السنة الجامعية 2023- 2024

## 1. مفاهيم عامة حول التكامل

### 1.1 مفهوم التكامل

نسمى **التكامل** من $a$ إلى $b$ للدالة $f$ ، الحيز الجبري للسطح المحدد بالمنحنى الممثل لـ $f$ ومحور الفواصل والمستقيمين : $x=a$ و $x=b$. نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$

### 2.1 تكامل دالة مستمرة

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$، و $F$ دالة أصلية لـ $f$ على $I$. $a$ و $b$ من $I$.

التكامل من $a$ إلى $b$ للدالة $f$، هو العدد: $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

الدوال المستمرة على مجال من الشكل $[a,b]$ تقبل المكاملة.

**نتيجة**

إذا كانت $f$ مستمرة على $I$ ، فإن $f$ تقبل دالة أصلية على $I$.

إذا أخذت دالة أصلية لـ $f$ القيمة $y_0$ من أجل القيمة $x_0$ للمتغير من $I$ ، فإن هذه الدالة الأصلية تكون وحيدة.

### 3.1 الإيحاء الهندسي للتكامل المحدود

المستوي مرود بمعلم . نسمي $\mathcal{A}$ المساحة المحددة بمنحنى المعادلة $y=f(x)$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$. ونميز حالين :

عندما تكون $f(x)$ موجبة على $[a,b]$، يكون $\int_a^b f(x)\,dx=\mathcal{A}$

وعندما تكون $f(x)$ سالبة على $[a,b]$، يكون $\int_a^b f(x)\,dx=-\mathcal{A}$

المساحة المحددة بمنحنى $y=f(x)$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

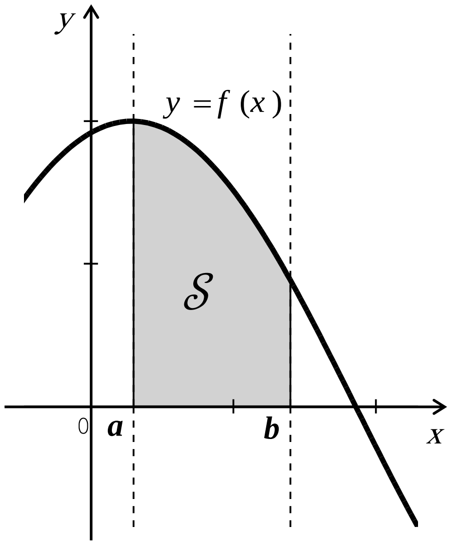
تُعطى بالعلاقة $\mathcal{S}=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ (الشكل **1**).

### 4.1 المساحة

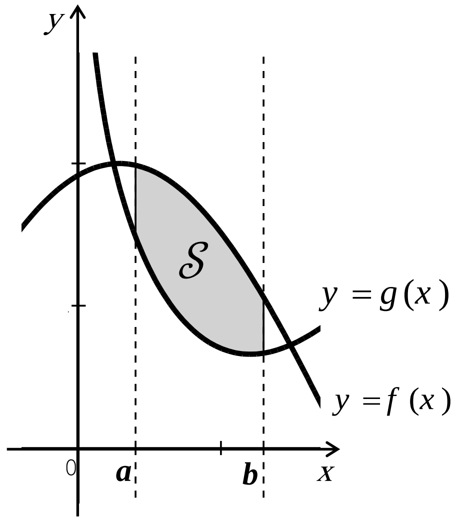
نعتبر الحيز من المستوي المحدد بالمستقيمين $x=a$ و $x=b$ ومنحنيي المعادلتين $y=f(x)$ و $y=g(x)$

إذا كان من أجل كل $x$ من $[a,b]$: $g(x)\le f(x)$ ومساحة هذا المجال تُعطى بالعلاقة

$\mathcal{S}=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$ (الشكل **2**).




شكل 1




شكل 2

### 5.1 نظرية المتوسط

$f$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ فهي تبلغ حضيضها وذروتها على هذا المجال : $m$ و $M$ .

فيكون : $m \le f(x) \le M$ ، ومنه $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$ .

وبالتالي :
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

وحسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه توجد نقطة $c$ من المجال $[a,b]$ بحيث:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

تسمى $c$ **بالقيمة المتوسطة** لـ $f$ على $[a,b]$.

### 6.1 مشتق تكامل

إذا كانت $f$ دالة مستمرة و $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ، فإنه يكون لدينا

$$\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}=\frac{1}{x-x'}\int_x^{x'} f(t)\,dt$$

حسب نظرية المتوسط، فأنه يوجد $c$ يكون محصورا بين $x$ و $x'$ :

$$f(c)=\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}$$

وبالمرور على النهاية عندما $x'\to x$ ينتج: $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$

### 7.1 خواص الدوال القابلة للمكاملة

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)\quad\Leftarrow\quad [a,b] \text{ على } m\leq f(x)\leq M$$

$$f\leq g\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$$

$$a<b\qquad \int_a^b |f(x)|\,dx\leq\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2\leq\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

## 2. بعض طرق حساب التكامل

### 1.2 الدالة الأصلية، (إذا علمت)

نسمي دالة أصلية للدالة $f$ المعرفة على المجال $I$ من $\mathbb{R}$. كل دالة $F$ تقبل الاشتقاق على $I$ بحيث :

$$\forall x\in I\quad F'(x)=f(x)$$

إذا كانت $F$ أصلية لـ $f$، فإن كل الدوال من الشكل $F+\lambda$ هي أيضا دوال أصلية لـ $f$ حيث $\lambda$ ثابت حقيقي.

ولدينا
$$\int f(x)\,dx=F(x)+\lambda\quad\Leftrightarrow\quad dF=f(x)\,dx\quad\Leftrightarrow\quad\frac{dF}{dx}=f(x)$$

ليكن $c$ عدد كيفي من المجال $[a,b]$ . نعتبر الدالة $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$

$F$ تقبل الاشتقاق على المجال $[a,b]$، فهي إذن الدالة الأصلية لـ $f$ التي تنعدم من أجل $x=c$.

نرمز لـ $F(x)=\int f(x)\,dx$ لإحدى دوال $f$، الأصلية ونسميه **بالتكامل غير المحدود.**

## 2.2 أمثلة

في التكامل $F(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{dt}{1+t^2}$، نلاحظ أن الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ مستمرة على $\mathbb{R}$، و $F$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

والمشتقة الثانية لـ $F$ :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F''(x)=f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\int\frac{x}{2x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int(1+\frac{3}{2}\frac{1}{x-\frac{3}{2}})dx=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\ln(x-\frac{3}{2})+c$$

$$\int\frac{x+2}{x+1}dx=\int\frac{x+1+1}{x+1}dx=\int(1+\frac{1}{x+1})dx=x+\ln(x+1)+c$$

$$\int\frac{1}{9-x^2}dx=\int\frac{1}{(3-x)(3+x)}dx=\frac{1}{6}\int(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3})dx=\frac{1}{6}\left(\ln(x+3)-\ln(x-3)\right)+c$$

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx=-\frac{3}{4}\int\left(1-2x^2\right)^{1/2}(-4x)\,dx=-\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{3/2}+c$$

## 3.2 بتبديل المتغير

إذا كانت $g$ رتيبة وتقبل للاشتقاق، واعتبرنا مثلا التحويل:

$$x=g(t)\quad \alpha=g(\alpha)\quad b=g(\beta)$$

يكون

$$\int_a^b (t)\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(g(t)\right).g'(t)\,dt$$

## 4.2 أمثلة

- لنحسب التكامل $\int\frac{2x}{(1-x^2)^2}dx$.

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $u(x)=(1-x^2)\ \Rightarrow\ u'(x)=2x$

ومنه $\int\frac{2x}{(1-x^2)^2}dx=\int\frac{u'(x)}{u^2(x)}dx$

ونعلم بأن $\frac{u'}{u^2}$ هي الدالة الأصلية للدالة $-\frac{1}{u}$.

وأخيرا $\int\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{1+x^2}+c$

- في التكامل $\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x}\,dx$ . نستخدم التحويل $u=1-x$ ، فيكون $du=-dx$

من أجل $x=-1$ نجد $u=2$ . و من أجل $x=0$ يكون $u=1$

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x}\,dx=\int_{2}^{1}(1-u)\sqrt{u}\,(-du)=\int_{1}^{2}(\sqrt{u}-u\sqrt{u})du$$
$$=\frac{-4(\sqrt{2}+1)}{15}$$

- في التكامل $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$ ، نستخدم التحويل :

$$t=\sqrt{x+3}\quad\Leftrightarrow\quad t^2=x+3\quad\Leftrightarrow\quad x=t^2-3,\quad(t\geq 0)$$
$$x=t^2-3\Rightarrow dx=2t\,dt$$
$$\int\frac{x}{\sqrt{x+3}}dx=\int\frac{(t^2-3)}{3}2t\,dt=2\int(t^2-3)\,t\,dt=2(\frac{t^2}{3}-3t)+c$$

نعبر عن النتيجة بدلالة $x$:

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+3}}dx=2(\frac{t^3}{3}-3t)+k=2(\frac{(\sqrt{x+3})^3}{3}-\sqrt{x+3})+c$$

$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ نضع $t=e^x$ فيكون $x=\ln t$ ومنه $x=\ln t\Rightarrow dx=\frac{1}{t}dt$

فنحصل على

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{1}{t+t^{-1}}\frac{dt}{t}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan t+c=\arctan e^x+c$$

### 5.2 التكامل بالتجزئة

$F$ و $G$ أصليتان لـ $f$ و $g$: $f(x)$

$$\int F(x)\cdot g(x)\,dx=F(x)\cdot G(x)-\int f(x)\cdot G(x)\,dx$$

### 6.2 أمثلة

- $\int x\,e^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=x\,e^x-e^x+c$
- $\int\ln(x-1)\,dx=x\ln(x-1)-\int\frac{x}{x-1}dx=x\ln(x-1)-\ln(x-1)-x+c$
- $\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$

**7.2 تكاملات بعض الدوال المألوفة:**

لتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ .

| $f(x)$ | $F(x)$ | $f(x)$ | $F(x)$ | $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^n\ (n\neq 1)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $e^x$ | $\frac{1}{a}e^{ax}$ |
| $\sin ax$ | $-\frac{1}{a}\cos ax$ | $\cos ax$ | $\frac{1}{a}\sin ax$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ |

## 3. توسيع مفهوم التكامل

$f$ و $g$ دالة معرفتان على $[a,+\infty[$ حيث: $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

نضع $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

إذا قبلت الدالة $g$ نهاية حقيقية $I$، نقول أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ بأنه متقارب. ويكون متباعدا في حالة العكس.

إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ متقاربا، فإن $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ يكون أيضا متقاربا.

### 1.3 نتائج

- إذا كان $f$ موجب فإن : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ متقارب $\Leftrightarrow$ $g(x)=\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ محدودة.

وإذا كانت $u$ و $v$ مستمرتين على $[a,+\infty[$ بحيث $v(t)\geq u(t)\geq 0 \quad \forall t\geq a$ ، يكون لدينا:

- $\int_a^{+\infty} v(t)\,dt$ متقارب $\Leftarrow$ $\int_a^{+\infty} u(t)\,dt$ متقارب.
- $\int_a^{+\infty} u(t)\,dt$ متباعد $\Leftarrow$ $\int_a^{+\infty} v(t)\,dt$ متباعد
- $f$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt+\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

## 4. تمارين محلولة

**تمرين رقم 1**

أدرس تقارب التكاملين الآتيين :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3+4}dx \quad \text{و} \quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{x+4}dx$$

الحل

لدينا $\forall x \in [4,+\infty[$ $\frac{1}{x+4} > \frac{1}{2x}$ ومنه التكامل $\int_4^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ متباعد.

إذن $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+4}dx$ متباعد

ولـــدينا $\forall x \in [1,+\infty[$ $\left|\frac{\sin x}{x^3+4}\right| < \frac{1}{x^3+4} < \frac{1}{x^3}$ وبمـــا أن التكامـــل $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ متقـــارب.

فإن $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3+4}dx$ يكون أيضا متقاربا مطلقا، وبالتالي فهو متقارب.

- **أدرس الدالة** $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ .

نلاحظ أن الدالة $F(x)$ معرفة تماما لأن الدالة $f(x) = e^{-t^2}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$،

من جهة أخرى $F'(x) = f(x)$ مهما كان $x$ من $\mathbb{R}$،

وبالتالي الدالة $F(x)$ تكون متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. ولدينا

$$\forall x \geq 1,\quad F(x) = F(1) + \int_1^x e^{-t^2}dt$$

وبما أن $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ مهما كان $1 \leq t$ . فإن

$$\forall x \geq 1,\quad F(x) \leq F(1) + \int_1^x e^{-t}dt$$
$$\leq F(1) + \frac{1}{e}$$

إذن الدالة $F$ متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي تقبل نهاية (منتهية) عند $(+\infty)$

**تمرين رقم 2**

| |
|---|
| أحسب التكامل الآتي $\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$ |

**الحل**

لدينا $\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ , $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

ومنه

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}}{1+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx = \int \frac{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}}{\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx$$

$$= \int \frac{\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \cdot \left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$$

نجري التحويل $t = \tan\frac{x}{2}$ الذي يكافئ $x = 2\arctan t$ وبالتالي $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

نحصل على المطلوب

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\cdot(1+\tan^2\frac{x}{2})dx = \int \frac{t}{1-t^2}(1+t^2)\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{2t}{1-t^2}dt = -\int \frac{-2t}{1-t^2}dt = -\ln\left|1-t^2\right|+c$$
$$= -\ln\left|1-\tan^2\frac{x}{2}\right|+c$$

**تمرين رقم 3**

| |
|---|
| عين مجموعة تعريف الدالة: $F(x) = \int \frac{dx}{e^x-1}$ ، ثم احسب $F(x)$ واستنتج $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}$. |

**الحل**

مجموعة تعريف $F(x)$ هي $\mathbb{R}^*$

بوضع $t = e^x - 1$ يكون $x = \ln(t+1)$ ، ومنه $dx = \frac{dt}{t+1}$

إذن $\int \frac{dx}{e^x-1} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$

نكتب العبارة $\frac{1}{t(t+1)}$ بالشكل $\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}$

لدينا $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t}+\frac{b}{t+1} = \frac{a(t+1)+dt}{t(t+1)} = \frac{(a+b)t+a}{t(t+1)}$

وبمطابقة معاملات الحدود نجد :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

ومنه $\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int (\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})\,dt = \ln|t|-\ln|t+1|+c = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+c$

وبتعويض بقيمتها نجد : $F(x) = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+c$

ولدينا بالتعريف $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{dx}{e^x-1}$

لنحسب التكامل المحدود $\int_1^t \frac{dx}{e^x-1} = \left[\ln\frac{e^x-1}{e^x}\right]_1^t = \ln\frac{e^t-1}{e^t} - \ln\frac{e-1}{e}$

ومنه $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{dx}{e^x-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln\frac{e^t-1}{e^t} - \ln\frac{e-1}{e}\right)$

وأخيرا $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln(1-\frac{1}{e^t})\right) - \ln\frac{e-1}{e} = 1-\ln(e-1)$

**تمرين رقم 4**

أحسب التكاملات الآتية :

$\int (3x^5+x^4+5x-3)dx$ ، $\int \frac{2x^3+x^2+1}{x^2}dx$ ، $\int (3x-1)^4 dx$ ، $\int \frac{1}{(x-1)^5}dx$ ،

$\int \frac{5}{4x+3}dx$ ، $\int \frac{9x^2}{\left(x^3+2\right)^3}dx$ ، $\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx$ ، $\int e^x(e^x+2)^3 dx$ ، $\int \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx$ .

الحل

$$\int \frac{1}{(x-1)^5}dx = \int (x-1)^{-5}dx = -\frac{1}{4}(x-1)^{-4} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^4}+c$$

$$\int (3x-1)^4 dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^4 3dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x-1)^5+c = \frac{1}{15}(3x-1)^5+c$$

$$\int \frac{2x^3+x^2+1}{x^2}dx = \int\left(2x+1+\frac{1}{x^2}\right)dx = x^2+x-\frac{1}{x}+c$$

$$\int (3x^5+x^4+5x-3)dx = \frac{1}{2}x^6+\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{2}x^2-3x+c$$

$$\int \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = \int (\ln x)^2 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3+c$$

$$\int e^x(e^x+2)^2 dx = \int (e^x+2)^2 e^x dx = \frac{1}{3}(e^x+2)^3+c$$

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx = -\frac{3}{4}\int\left(1-2x^2\right)^{1/2}(-4x)dx = -\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{3/2} = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(1-2x^2\right)^3}+c$$

$$\int \frac{9x^2}{\left(x^3+2\right)^3}dx = 3\int\left(x^3+2\right)^{-3}3x^2dx = -\frac{3}{2}\left(x^3+2\right)^{-2} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(x^3+2\right)^2}+c$$

$$\int \frac{5}{4x+3}dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+\frac{3}{4}}dx = \frac{5}{4}\ln\left(x+\frac{3}{4}\right)+c$$

**تمرين رقم 5**

باستعمال طريقة تبديل المتغير، أحسب الدوال الأصلية التالية :

$\int \frac{1}{(2x-3)}dx$ ، $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ ، $\int \frac{3}{(2x-3)^5}dx$ ، $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ ، $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ ، $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ ،

$\int \frac{2x}{\sqrt{(x^2-1)}}dx$ ، $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ ، $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$ ، $\int \frac{2}{(x+1)^2}e^{\frac{x-1}{x+1}}dx$ ، $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$ .

الحل

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int (\cos^{-3} x)\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos^{-2} x + c = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + c$$

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int (1+e^x)^{-2} e^x dx = -(1+e^x)^{-1} + c = \frac{1}{1+e^x} + c$$

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int (\ln x)^{-2}\frac{1}{x}dx = -(\ln x)^{-1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$\int \frac{3}{(2x-3)^5}dx = \frac{3}{2}\int (2x-3)^{-5}\,2dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x-3)^{-4} + c = -\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(2x-3)^4} + c$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln(\ln x) + c$$

$$\int \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-3}dx = \frac{1}{2}\ln(2x-3) + c$$

$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx = \int \left(\frac{x+3}{x+2} + \frac{4}{x-4}\right)dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x-4}\right)dx = x + \ln(x+2) - \ln(x-4) + c$$

$$\int \frac{2}{(x+1)^2}e^{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int e^{\frac{x-1}{x+1}}\frac{2}{(x+1)^2}dx = e^{\frac{x-1}{x+1}} + c$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2\sin 2x}{1+\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\ln(1+\cos 2x) + c$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln(1+e^x) + c$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}dx = 2\sqrt{x^2-1} + c$$

**<u>تمرين رقم 6</u>**

باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب ما يلي :

$\int \ln(x-1)dx$ ، $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}dx$ ، $\int x\sin x\,dx$ ، $\int x\cdot\ln^2 x\,dx$ ، $\int x^2\cdot e^{3x}\,dx$ ، $\int \frac{dx}{x\ln x^2}$.

الحل

$$\int \frac{1}{x\ln x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{x}}{\ln(x^2)}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\ln x^2\right) + c$$

$$\int x^2 e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

$$\int x\ln^2 x\,dx = x\left(2x-2x\ln x+x\ln^2 x\right)-\int\left(2x-2x\ln x+x\ln^2 x\right)dx$$
$$= x\left(2x-2x\ln x+x\ln^2 x\right)-\frac{7}{4}x^2+\frac{3}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\ln^2 x+c$$
$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x+c$$

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int -\cos x\,dx=\sin x-x\cos x+c$$

$$\int \ln(x-1)\,dx=x\ln(x-1)-\int\frac{x}{x-1}dx=x\ln(x-1)-\ln(x-1)-x+c$$

**تمرين رقم 7**

أحسب قيم التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\sin x\,dx \text{ ، } \int_1^3 x\left(x^2+1\right)^3dx \text{ ، } \int_1^3\sqrt[4]{x^3}\,dx \text{ ، } \int_1^{\pi}\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx \text{ ، } \int_1^{\ln 2} e^{\frac{e}{2}}\,dx$$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx=\left[x(\sin x-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\left[x(\sin x-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-2\cos x-x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2\approx 1.14$$

$$\int x\left(x^2+1\right)^3dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^3 2x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(x^2+1\right)^4$$
$$\Rightarrow \int_1^3 x\left(x^2+1\right)^3dx=\frac{1}{8}\left[\left(x^2+1\right)^4\right]_1^3=1248$$

$$\int_1^3\sqrt[4]{x^3}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{3}{4}}\,dx=\frac{4}{7}\left[x^{\frac{7}{4}}\right]_1^3=\frac{12}{7}\sqrt[4]{27}-\frac{4}{7}\approx 3.34$$

$$\int_1^{\ln 2} e^{\frac{x}{2}}\,dx=2\left[e^{\frac{x}{2}}\right]_1^{\ln 2}=2\sqrt{2}-2\sqrt{e}\approx -0.5$$

$$\int_1^{\pi}\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^{\pi}=2\sqrt{\pi}+\frac{2}{3}\sqrt{\pi^3}-\frac{8}{3}\approx 4.6$$

**تمرين رقم 8**

باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب، من أجل كل $x$ و $m$ من $\mathbb{R}_+^*$ : $G(x)=\int_m^x t^3\ln t\,dt$

ثم احسب $\lim\limits_{m\to 0} G(x)$ ، واستنتج دالة أصلية لـ $f$ على $[0,+\infty[$.

الحل

$$\int t^3 \ln t \, dt = \frac{1}{4}t^4 \ln t - \frac{1}{16}t^4$$

$$G(x) = \int_m^x t^3 \ln t \, dt = \left[\frac{1}{4}t^4 \ln t - \frac{1}{16}t^4\right]_m^x = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^4 \ln m + \frac{1}{16}m^4$$

$$\lim_{m \to 0} G(x) = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4$$

**تمرين رقم 9**

| |
|---|
| أدرس تغيرات الدالة $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$، ثم أحسب $\int_{1/e}^{x} f(t)\,dt$ ومثله بيانيا. |

الحل

$$\int_{\frac{1}{e}}^{x} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{e}}^{x} \frac{1+\ln t}{t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t + \ln t + \frac{1}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{x} = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{2}$$

# المراجع:


- K. Abdelkarim, *Exercices résolus d'analyse* (*avec rappel de cours*), Alger, OPU, 1993.
- E. Azoulay, *Mathématiques*: *cours et exercices*, tome 1, Paris, Mc Graw-Hill, 1983.
- S. Benachour, *Exercices d'analyse avec solutions*, tome 1, Alger, Khawarysm, 1991.
- J.-J. Colin, *Fonctions usuelles*: *exercices corrigés avec rappels de cours*, Paris, Cépaduès, 2007.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- G. Patrik, *Mathématiques pour l'économie*: *méthodes et exercices corrigés*, Belgique : de boeck, 2005.
- F. Pham, *Fonctions d'une ou deux variables*: des fonctions variables, Paris, Dunod, 2003.