الحل السلسلة رقم:02

(المصفوفات، المحددات)

التمرين الأول:

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix} \quad , C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

2- أوجد إن امكن: $A^t, B^t, C^t, \quad A-B, \quad B^t+2C \quad , AB \quad , BC,$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix} \quad , B^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$, C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix} \qquad C^T=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$A-B,$ مستحلة الحل المصفوفتين ليس لهما نفس الدرجة

$$, B^T+2C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 5 & 2\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

$AB,$ مستحلة الحل لان عمود المصفوفة الاولى لا يساوي سطر المصفوفة الثانية

$$, BC=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 4 & 20\end{pmatrix}$$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا

4- بين أن $M.J = 5.J$

$$M\ J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$
$$= 5.J$$

5- أحسب M^2.

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} \quad ,$$

6- بين أن $M^2.K = K$

$$M^2K = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad ,$$

اذن $M^2.K = K$

التمرين الثالث: احسب المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1*4 + 2*3 = -2$$

حسب طريقة sarrus

$$,\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.1.1 + -1.2.0 + 4.1.2 - 0.1.4 - 2.2.2 - 1.1.(-1) = 3$$

حسب قانون المحددات

$$,\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.\Delta_{11} - 1.\Delta_{12} + 0\Delta_{13}$$
$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1.3.4 = 12 \quad ,$$

لان مصفوفة مثلثية ما تحت القطر معدوم المحدد يساوي جداء القطر

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ حسب خاصية عمودين الاول والثاني تركيب خطي لعمود الثالث

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$ لدينا عمود معدوم محدد يساوي الصفر

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$ لدينا سطر معدوم محدد يساوي الصفر

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = 0,$$ لدينا عمودين متساويين الاول والثالث محدد يساوي الصفر

التمرين الرابع: لتكن لدينا

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2- أحسب مقلوب كل من المصفوفة A, B

حساب محدد المصفوفة A

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 2.6 - 1.5 = 7$$

بمان المحدد لا يساوي الصفر المصفوفة قابلة للقلب اي يوجد A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(C_A^T\right)$ بحيث C_A^T المصفوفة المرافقة للمصفوفة A

$$C_A = \begin{pmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6 & -1 \\ -5 & +2 \end{pmatrix}$$

$$C_A^T = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه مقلوب المصفوفة هو $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

لتحقق من النتيجة نحسب $A^{-1}\,A = I_2 = A\,A^{-1}$

حساب محدد المصفوفة B

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2$$

بمان المحدد لا يساوي الصفر المصفوفة قابلة للقلب اي يوجد B^{-1}

$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\left(C_B^T\right)$ بحيث C_B^T المصفوفة المرافقة للمصفوفة B

$$C_B=\begin{pmatrix}+\Delta_{11} & -\Delta_{12} & +\Delta_{13}\\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} & -\Delta_{23}\\ +\Delta_{31} & -\Delta_{32} & +\Delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1 & -2 & -3\\ 0 & +2 & +2\\ +1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$C_B^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

ومنه مقلوب المصفوفة هو $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

لتحقق من النتيجة نحسب $B^{-1}\,B=I_3=B\,B^{-1}$