حل التمرين 01:

$D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$.

2. $f(0,0) = 2(0)^2 + (0)^2 + 7 = 7$

$f(-1,2) = 2(-1)^2 + (2)^2 + 7 = 13$

$f(3,5) = 2(3)^2 + (5)^2 + 7 = 50$

$f(0,-1) = 2(0)^2 + (-1)^2 + 7 = 8$.

حل التمرين 02:

$f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ or $D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$

or $D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0)\}$

$f(x,y) = \frac{5x+y^2-3}{x-y}$

$D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, x - y \neq 0\}$

or $D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq x\}$

$f(x,y) = \frac{3xy}{x^2+y^2+3}$

لاحظ أن المقام $x^2 + y^2 + 3 \neq 0$ لأي $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. وعليه فأن

$D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$

بما أن

$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$

فأن منطلق الدالة هو جميع النقاط $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ في المستوي XY ما عدا تلك النقاط الواقعة على المستقيمين $y = \pm x$. لذا

$D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq \pm x\}$

$f(x,y) = \sqrt{y+x}$

$D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x\}$

$f(x,y) = \sqrt{y^2 - 5x + 6y}$

$D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 5x + 6y \geq 0\}$

$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$

بما أن $\sin(xy)$ معرفة لجميع $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ وأن $4 + x^2 + y^2 > 0$ لأي $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

فأن $D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = e^{5x-y^2+1}$

$D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = e^{xy} + \ln(xy)$

الدالة e^{xy} معرفة لجميع $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. أما دالة الوغاريتم $\ln(xy)$ فهي معرفة فقط للقيم الموجبة، أي أن هذه الدالة معرفة عندما $xy > 0$. وعليه فأن

$D_f = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, xy > 0\}$

حل التمرين "03":

- $f(x,y) = (x^2 + 4y^3)^5$

$f_x = 5(x^2 + 4y^3)^4 . 2x = 10x(x^2 + 4y^3)^4$

$f_y = 5(x^2 + 4y^3)^4 . 12y^2 = 60y^2(x^2 + 4y^3)^4$

$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 5$

$z_x = 2x + y$

$z_y = 2y + x$

$f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

$f_x = \cos(x^2 + y^2). 2x = 2x\cos(x^2 + y^2)$

$f_y = \cos(x^2 + y^2). 2y = 2y\cos(x^2 + y^2)$

$$f(x,y) = x^3 + y^2$$

$f'_x = 3x^2$ $\qquad$ $f'_y = 2y$

$$f(x,y) = e^{2x}\cos(3y)$$

$f'_x = 2e^{2x}\cos 3y$ $\qquad$ $f'_y = -3e^{2x}\sin 3y$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$f'_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $f'_y = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

حل التمرين الرابع:

$$f'_x = \frac{1}{1+xy^2} \times y^2 = \frac{y^2}{1+xy^2} \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,-1) = \frac{(-1)^2}{1+1\times(-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \frac{x}{1+xy^2} \times 2y = \frac{2yx}{1+xy^2} \quad \Rightarrow \quad f'_y(1,-1) = \frac{2\times(-1)}{1+1\times(-1)^2} = \frac{-2}{2} = -1$$

حل التمرين الخامس:

1. $f'_x = 2x + y^2 \quad \Rightarrow \quad f'_{xx} = 2$

$f'_y = 2xy \quad \Rightarrow \quad f'_{yy} = 2x \qquad f'_{xy} = f'_{yx}$ نلاحظ ان

2. $f'_x = \dfrac{3}{3x-5y}$ $\qquad$ $f'_{xy} = \dfrac{15}{(3x-5y)^2}$

$f'_y = \dfrac{-5}{3x-5y}$ $\qquad$ $f'_{yx} = \dfrac{15}{(3x-5y)^2}$

2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - \dfrac{x^3}{y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3\frac{x^2}{y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + \frac{x^3}{y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 6\frac{x}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 - 2\frac{x^3}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3x^2}{y^2}.$$

3. $f(x,y) = e^{2x^2+xy+7x+y^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (4x+y+7)f(x,y)$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+2y)f(x,y)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(4+(4x+y+7)^2\right)f(x,y)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(2+(x+2y)^2\right)f(x,y)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \left(1+(x+2y)(4x+y+7)\right)f(x,y)$.

4. $f(x,y) = \sin(x.y)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\sin(xy)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$.

حل التمرين 06:

تحقق معادلة لابلاس $f(x,y) = e^{-3y}\cos 3x$

الحل :

$f_x = -3e^{-3y}\sin 3x$

$f_y = -3e^{-3y}\cos 3x$

$f_{xx} = -9e^{-3y}\cos 3x$

$f_{yy} = 9\,e^{-3y}\cos 3x$

$f_{xx} + f_{yy} = -9e^{-3y}\cos 3x + 9e^{-3y}\cos 3x = 0$

و عليه فان الدالة $f(x,y) = e^{-3y}\cos 3x$ تحقق معادلة لابلاس