حل السلسلة 01.

تمرين 01:

1) - معادلة تفاضلية من الرتبة 1 - درجة 1.

2) رتبة 2 - درجة 1.

3) رتبة 2 . درجة 02.

4) رتبة 3 - درجة 01.

5) - تناسب الشكل؟ $\frac{dy}{dx} + \frac{x+y}{2x+1}$.

وهي من الرتبة 1 الدرجة 1.

6- الرتبة الثانية . الدرجة 2.

7- الرتبة 3 . درجة 01.

8. رتبة 1 . درجة 1.

9. رتبة 3 . درجة 1.

10- رتبة 3 - درجة 3

11- نبسط المعادلة إلى:

$$1 + \frac{d^2x}{dt^2} = t^4x^2$$

وهي من الرتبة 2 . درجة 01.

12- رتبة 2 - درجة 02.

التمرين 02:

1) $y = c\sin x$

بما أنه يوجد ثابت واحد في الحل العام للمعادلة التفاضلية ~~المطلوبة~~. فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي معادلة من الرتبة 1. ونحصل عليها بـ: نفاضل مرة واحدة

$$\begin{cases} y = c\sin x \quad \text{—(1)} \\ y' = c\cos x \end{cases} \Rightarrow c = \frac{y'}{\cos x}$$

بتعويض قيمة c في (1) نجد:

$$y = \frac{y'}{\cos x}\sin x \Rightarrow y\cos x = y'\sin x$$

ومنه فالمعادلة التفاضلية المطلوبة هي:

$$\boxed{y' = y\cot x}$$

2) $y = \frac{c}{2}x + c^2 + c^3 + 1$.

المعادلة المطلوبة من الرتبة 1 لوجود ثابت اختياري (1) وحيد . وهو (c).

$y = \frac{c}{2}x + c^2 + c^3 + 1$ —(2)

نفاضل مرة واحدة:

$y' = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2y'$.

بالتعويض في المعادلة 2 نجد:

$y = y'x + 4y'^2 + 8y'^3 + 1 \Rightarrow$

ويمكن كتابتها:

$$8y'^3 + 4y'^2 + xy' - y + 1 = 0$$

وهي من الدرجة الثالثة والرتبة 1

3) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = 2x$ بشرط $y(2) = 3$ ⇒

$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x\,dx$

ونكامل الطرفين:

$\int 2x\,dx$

ومنه الحل العام

$$\boxed{y = x^2 + c}$$

نجد ! $y(2) = 3$

$$4 + c = 3 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

ومنه الحل الخاص هو :

$$\boxed{y = x^2 - 1}$$

التمرين 03

الحل

① $(1+x)y\,dx + (1-y)x\,dy = 0$

لفصل المتغيرات نقسم على xy , نجد :

$$\frac{(1+x)y\,dx}{xy} + \frac{(1-y)x\,dy}{xy} = 0$$

ومنه $\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0$

أي : $\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$\boxed{\ln|x| + x + \ln|y| - y = C}$$

وهو الحل العام للمعادلة .

② $\frac{dy}{dx} = \frac{x + xy}{1+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{1+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow dy = x\,dx$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$\int dy = \int x\,dx$$

ومنه

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2 + c}$$

③ $\frac{dy}{dx} = 2xy$

$$dy = 2xy\,dx$$

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx \Leftarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

$$y = e^{x^2+c} = e^{x^2}\cdot e^{c}$$

$$\boxed{y = c\,e^{x^2}}$$

④ $yy' + x^3(y^2 - 1) = 0$

$$y\frac{dy}{dx} = -x^3(y^2-1)$$

$$y\,dy = -x^3(y^2-1)\,dx$$

بالقسمة على (y^2-1) ومكاملة الطرفين نجد :

$$\int \frac{y}{y^2-1}\,dy = -\int x^3\,dx$$

ومنه :

$$\frac{1}{2}\ln(y^2-1) = -\frac{1}{4}x^4 + c$$

نستطيع كتابة c على شكل $\ln c$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2-1) = -\frac{1}{4}x^4 + \ln c$$

$$⑥\quad y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$$

نضع $u = \frac{y}{x}$ ومنه

$$y' = e^{u} + u.$$

والتعويض ...

$$\ln \sqrt{y^2-1} = -\frac{1}{4}x^4 + \ln c$$

$$\boxed{\sqrt{y^2-1} = e^{-\frac{1}{4}x^4} + c}$$

$$⑤\quad (1+x^2)\, y' = 1+y^2$$

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$$

$$(1+x^2)\,dy = (1+y^2)\,dx.$$

بقسمة الطرفين على $(1+x^2)(1+y^2)$ نجد:

$$\frac{dy}{(1+y^2)} = \frac{dx}{(1+x^2)}$$

نكامل الطرفين:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2)}$$

$$\boxed{\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c}$$

التمرين 04: إيجاد الحل العام (الخاص)

$$ⓐ\quad e^x \cos y\, dx + (1+e^x)\sin y\, dy = 0$$

نفصل المتغيرات بقسمة الطرفين على $\cos y\,(1+e^x)$ نجد:

$$\frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \frac{\sin y}{\cos y}\,dy = 0$$

$\tan y$

بالتكامل نجد:

$$\ln|1+e^x| - \ln|\cos y| = \ln c$$

$$\ln \frac{1+e^x}{|\cos y|} = \ln c$$

والحل العام يكون على الشكل:

$$\boxed{1+e^x = c\,|\cos y|.}$$

$\cos 0 = 1$

$\sin 0 = 0$

إيجاد الحل الخاص من أجل $y(0) = 0$:

بالتعويض نجد:

$$1+\cancel{e^0}^{\,1} = c\,|\cos 0|$$

$$1+1 = c \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

والحل الخاص هو:

$$\boxed{1+e^x = 2\,|\cos y|}$$

① $xy\,dy - \dfrac{1+y^2}{1+x^2}\,dx = 0$

بفصل المتغيرات نقوم بقسمة الطرفين على $x(1+y^2)$ ينتج:

$$\frac{1}{1+y^2}\,dy - \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = 0$$

باستخدام الكسور الجزئية نجد:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1 x + b_2}{1+x^2}$$

$$1 = A(1+x^2) + (B_1 x + b_2)\,x$$

بمساواة الحدود المطلقة في الطرفين نجد:

مساواة معامل x^2 في الطرفين نجد:

بمساواة معامل x في الطرفين نجد:

$$A + B = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B_1 = -1 \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

أي أن:

$$\frac{1}{1+(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}$$

فتصبح المعادلة على الشكل:

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy - \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right]dx = 0$$

بالمكاملة نجد:

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) - \ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln c$$

بتعويض شرط $y(1) = -3$ أي $x = 1$ ، $y = -3$ نجد:

③ $x\,dx + y\,dy = 0$

بمكاملة الطرفين نجد:

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C$$

الحل الخاص نجد:

$$2 + 2 = 24 \Rightarrow \boxed{C = 21}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 21}$$

إيجاد المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

① $y = c_1 x + c_2 x^2 \longrightarrow ①$

$y' = c_1 + 2c_2 x \longrightarrow ②$

$y'' = 0 + 2c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2} y''}$

بتعويض c_2 في المعادلة ② نجد:

$y' = c_1 + 2\left(\frac{1}{2} y''\right) x \Rightarrow \boxed{c_1 = y' - x y''}$

بتعويض قيمة c_1 , c_2 في المعادلة الأصلية:

$y = (y' - x y'')x + \left(\frac{1}{2} y''\right) x^2$

$y = xy' - x^2 y'' + \frac{1}{2} x^2 y'' = xy' - \frac{1}{2} x^2 y''$

② $y = c_1 x + c_2 e^x$

لوجود ثابتان c_1 , c_2 في الحل العام للمعادلات فإن المعادلة المطلوبة هي معادلة من الرتبة الثانية، وعليه نفاضل مرتين

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2 e^x \longrightarrow ① \\ y' = c_1 + c_2 e^x \longrightarrow ② \\ y'' = c_2 e^x \longrightarrow ③ \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة ② في $(-x)$ ونجمع مع المعادلة ① نجد:

$y - xy' = c_2 e^x (1 - x)$

وبالتعويض في قيمة المعادلة ③:

$y - xy' = y''(1 - x)$

$y - xy' = y'' - xy''$

$\boxed{xy'' - y'' - xy' + y = 0}$ معادلة تفاضلية رتبة ثانية ...

$$y = x^2 + ax + be^{-x}$$

نعامل مرتين لنبيد:

$$\begin{cases} y = x^2 + ax + be^{-x} \longrightarrow (1) \\ y' = 2x + a - be^{-x} \longrightarrow (2) \\ y'' = 2 + be^{-x} \longrightarrow (3) \end{cases} \Rightarrow be^{-x} = y'' - 2$$

بجمع 2، 3 نحصل

$$y' + y'' = 2x + a + 2 \Rightarrow a = y' + y'' - 2x - 2 \quad (4)$$

بالتعويض 4، 3 في 1 نجد:

$$y = x^2 + (y' + y'' - 2x - 2)x + y'' - 2$$

$$y = -x^2 + y''(x+1) + xy' - 2x - 2$$

$$(x+1)y'' + xy' - y = x^2 + 2x + 2$$

معادلة تفاضلية ذات رتبة ثانية ...

حل

$$y'' + 3y' - 10y = 0$$

المعادلة المميزة:

$$r^2 + 3r - 10 = (r-2)(r+5) = 0$$

$$r_1 = 2,\ r_2 = -5$$

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}}$$

$$0 - 4 = -4$$

$$y'' + y = 0$$

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

$\alpha = \frac{-b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ المميزة

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = 0 \pm i$$

جذر مضاعف

$$y = e^{0x}[c_1 \sin \cancel{\beta x} + c_2 \cos x]$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

المميزة:

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$(r-3)^2 = 0 \quad r = 3$$

$$\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}$$

③ نفس حل ④

ا - خامساً الحالة الأكثر :

$$y = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$$

نفاضل مرتين

$$y' = -c_1 e^{-x} \cos x - c_1 e^{-x} \cdot \sin x - c_2 e^{-x} \sin x + c_2 e^{-x} \cos x$$

$$y'' = c_1 e^{-x} \cos x + c_1 e^{-x} \sin x + c_2 e^{-x} \sin x - c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x - c_2 e^{-x} \cos x - c_2 e^{-x} \cos x - c_2 e^{-x} \sin x$$

$$y = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x \longrightarrow ①$$

$$\Rightarrow y' = -(c_1 + c_2) e^{-x} \sin x + (c_2 - c_1) e^{-x} \cos x \longrightarrow ②$$

$$y'' = 2c_1 e^{-x} \sin x - 2c_2 e^{-x} \cos x \longrightarrow ③$$

بضرب ② في العدد 2 وجمع المعادلتين نجد :

$$2y' + y'' = 2c_1 e^{-x} \cos x - 2c_2 e^{-x} \sin x \longrightarrow ④$$

بضرب ① في العدد 2 وجمع المعادلتين مع (4) نجد :

$$2y + 2y' + y'' = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الأولى

التمرين 8:

$y'' + 3y' + 10y = 0$

لحل هذه المعادلة نفرض أن

$y = e^{\lambda x}$

ونعوض في المعادلة المميزة من الشكل

$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$

حساب $\Delta = b^2 - 4ac$ نجد

$\Delta = (3)^2 - 4(-10)(1) = 49$

بما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل جذران مختلفان هما

$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$

والحل العام من الشكل:

$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}}$

② $y'' - 6y + 9 = 0$

بفرض أن $y = e^{\lambda x}$

فالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

حساب المميز Δ نجد

$\Delta = 0$

وبالتالي المعادلة تقبل حلا مضاعفا

$\lambda = \frac{-b}{2a} = \lambda = \frac{6}{2} = 3$

والحل العام من الشكل:

$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}}$

ب) $y'' + y = 0$

بفرض أن $y = e^{\lambda x}$ فالمعادلة المميزة هي

$\lambda^2 + 1 = 0$

حساب المميز Δ نجد

$\Delta = -4 < 0$

ومنه المعادلة تقبل جذران مركبان

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

حيث $\alpha = \frac{-b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$\alpha = 0$, $\beta = 2$

والجذران المركبان هما

$\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$

والحل العام من الشكل:

$y = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) e^{0x}$

$\boxed{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}$

③ $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$

ونكتب من الشكل

$y'' + 4y = 0$

نفرض أن $y = e^{\lambda x}$, بالتعويض في المعادلة المميزة من الشكل:

$\lambda^2 + 4 = 0$

وبحساب المميز نجد

$\Delta = -16 < 0$

بما أن المميز $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلا مركبا

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$